Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [XI.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 134--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121881

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Pole dyadické.

Než pojednáme o poli dyadickém obdobně jako jsme pojednali o poli skalárním a vektorovém, probéřeme poněkud obšírněji theorii dyadických mnohočlenů (dyadics), přihlížejíce k použití jejímu v mathematické fysice *).

---

*) *Jaumann* ve spise: »Die Grundlagen der Bewegungslehre« (pag. 28) rozeznává dvojí druh dyad a tudíž i dyadických mnohočlenů. Pro první druh platí rovnice (20ᵃ), totiž

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r});$$

takovou dyadu zove Jaumann *skalární* a označuje ji $\mathbf{a} \,;\, \mathbf{b}$. Podobně lze zavésti jiný druh dyad té vlastnosti, že skalární součin takové dyady s vektorem $\mathbf{r}$ rovná se vektoriálnímu součinu $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{r}]$; to jest Jaumannova dyada *rotorická*, jež se dle něho označuje $\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}$. Základní rovnice pro oba tyto druhy dyad jsou tudíž

$$(\mathbf{a} \,;\, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}), \tag{148a}$$

$$[\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{r}]; \tag{149a}$$

obdobně platí, klademe-li v součinech na levé straně vektor $\mathbf{r}$ jako činitel na první místo, rovnice (20ᵇ), kterou nyní píšeme ve tvaru

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \,;\, \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} \tag{148b}$$

a rovnice jí podobná

$$\mathbf{r} \cdot [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}\,. \tag{149b}$$

Skalární a rotorické dyady týchže dvou vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ souvisí spolu vztahem, který vyvodíme takto:

Dle vzorce (16ᵃ) platí

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \underset{,}{\times} \mathbf{r} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{a} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}), \tag{ϱ}$$

a podobně

$$\begin{aligned}[\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{a} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{r}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} \\ [\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{r} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{r} \\ &= \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a});\end{aligned}$$

pročež

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r} + [\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{a} + [\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} = 0. \tag{150}$$

Z tohoto vzorce vychází

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r} = -[\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{a} - [\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{r}] - [\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}$$

čili užijeme-li na pravé straně označení Jaumannova (149ᵃ) a (149ᵇ)

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r} = [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}].$$

Součiny dvou dyad. Zaveďme nejprve definice pro *součiny dvou dyad,* a to pro součiny *skalární* i *vektoriální.*

Skalární součin dvou dyad **ab** a **cd** jest *dyada,* jejíž předním členem jest přední člen dyady první **a** a zadním členem zadní člen dyady druhé **d**; tato dyada jest násobena skalárním součinem zadního členu první dyady **b** a předního členu druhé dyady **c**. Lze tudíž psáti

$$\mathbf{ab} \,.\, \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{ad}, \tag{153}$$

anebo zachovávajíce abecední pořádek

$$\mathbf{ab} \,.\, \mathbf{cd} = \mathbf{a}\, (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{d}.$$

Podobně definujeme vektoriální součin dvou dyad vzorcem

$$\mathbf{ab} \times \mathbf{cd} = \mathbf{a}\, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\, \mathbf{d}, \tag{154}$$

kde na pravé straně vyskytuje se součin tří vektorů **a**, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, **d**, který zoveme *triadou* *).

Ale výše uvedenou rovnici (ϱ) lze dle (148^b) a (148^a) též psáti

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \,.\, (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}) \,.\, \mathbf{r};$$

tudíž platí

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}) \,.\, \mathbf{r} = [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{r} \,.\, [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] \tag{151a}$$

aneb

$$\mathbf{r} \,.\, [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] - (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}) \,.\, \mathbf{r} = [\mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{r}\, (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}). \tag{151b}$$

Jako dyady mohou i dyadické mnohočleny býti dvojí: skalární a rotorické; obecné tvary jejich jsou:

$$\Phi^s = \mathbf{a}\,;\,\mathbf{b} + \mathbf{c}\,;\,\mathbf{d} + \mathbf{e}\,;\,\mathbf{f},$$
$$\Phi^r = \mathbf{a} \underset{,}{\times} \mathbf{b} + \mathbf{c} \underset{,}{\times} \mathbf{d} + \mathbf{e} \underset{,}{\times} \mathbf{f},$$

ježto každý mnohočlen o libovolném počtu sčítanců převésti lze na tvar trojčlenu.

O těchto mnohočlenech platí podobné rovnice jako o dyadických součinech skalárních a rotorických,

totiž

$$\mathbf{r} \,.\, \Phi^s - \Phi^s \,.\, \mathbf{r} = \Phi^r \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{r} \,.\, \Phi^r \tag{152a}$$

aneb

$$\mathbf{r} \,.\, \Phi^r - \Phi^s \,.\, \mathbf{r} = \Phi^r \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{r} \,.\, \Phi^s. \tag{152b}$$

*) Triady píšeme ve formě **abc**, tedy bez závorek, abychom je rozeznali od skalárního součinu tří vektorů (**abc**), což jest jak známo výraz $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{c}$. Podobně není třeba klásti dyadické součiny **ab** do závorek, jak bylo psáno výše na několika místech tohoto pojednání; laskavý čtenář provede si snadno příslušnou opravu.

Jako z dyad tvořeny byly mnohočleny dyadické, tak i z triad vznikají mnohočleny triadické tvaru

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3\mathbf{c}_3 + \ldots$$

aneb, zavedeme-li základní jednotkové vektory,

$$a_{111}\mathbf{iii} + a_{112}\mathbf{iij} + \ldots + a_{211}\mathbf{jii} + \ldots$$

. . . .

Jest důležitou vlastností dyady **ab**, že převádí vektor **r** v jiný **a** (**b** . **r**) (dle vzorce 20[a]); podobně skalární součin dvou dyad **ab** . **cd** představuje dvojnásobnou transformaci vektorů **r**, jimiž součin ten skalárně jest násoben. Neboť (**ab** . **cd**) . **r** čili (**b** . **c**) **ad** . **r** rovná se dle 20[a] vektoru (**b** . **c**) **a** (**d** . **r**). Položíme-li v tomto výraze, který můžeme též psáti ve tvaru

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})\,(\mathbf{d}\,.\,\mathbf{r}),\quad \text{za } \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) \text{ součin } \mathbf{ab}\,.\,\mathbf{c},$$

obdržíme

$$(\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{cd})\,.\,\mathbf{r} = \mathbf{ab}\,.\,\mathbf{c}\,(\mathbf{d}\,.\,\mathbf{r}),$$

čili, poněvadž

$$\mathbf{c}\,(\mathbf{d}\,.\,\mathbf{r}) = \mathbf{cd}\,.\,\mathbf{r},$$

konečně

$$(\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{cd})\,.\,\mathbf{r} = \mathbf{ab}\,.\,(\mathbf{cd}\,.\,\mathbf{r}). \tag{155^a}$$

Z toho vychází: Budiž **r** vektor, vedený z počátku O k libovolnému bodu P v prostoru; i jest **cd** . **r** jiný vektor $\mathbf{r}' = OP'$. Součinem **cd** vyjádřena jest tudíž transformace prostoru, kterou všechny body P přecházejí v body P'. Vektor $\mathbf{r}'$ převádí se součinem **ab** v třetí vektor $\mathbf{r}'' = OP''$ tak, že bod P' zaujme polohu P''. Součinem **ab** . **cd** představuje se tudíž dvojnásobná transformace prostoru, při níž body P převádějí se do polohy P''.

Vzorec (155[a]) poučuje nás též o tom, že skalární součin dvou dyad a vektoru jest associativní. Věta ta platí však jen v těch případech, když vektor **r** stojí v těchto součinech buď po obou dyadách nebo před nimi; není správná, je-li vektor **r** jako činitel mezi oběma dyadami. Neplatí totiž rovnost součinů (**ab** . **r**) . **cd** a **ab** . (**r** . **cd**). Neboť dle rovnic (20)

$$(\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{r})\,.\,\mathbf{cd} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{r})\,.\,\mathbf{cd} = (\mathbf{b}\,.\,\mathbf{r})\,.\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{cd})$$
$$= (\mathbf{b}\,.\,\mathbf{r})\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{d},$$

kdežto

$$\mathbf{ab}\,.\,(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{cd}) = \mathbf{ab}\,.\,(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{d} = \mathbf{ab}\,.\,\mathbf{d}\,(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{c});$$

tudíž obdržíme pro oba uvedené součiny různé vektory.

Také skalární součiny tří dyad jsou associativní; jest totiž

$$(\mathbf{ab} \,.\, \mathbf{cd}) \,.\, \mathbf{ef} = \mathbf{ab} \,.\, (\mathbf{cd} \,.\, \mathbf{ef}). \tag{156a}$$

Neboť levou stranu této rovnice lze psáti

$$(\mathbf{ab} \,.\, \mathbf{cd}) \,.\, \mathbf{ef} = (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{ad} \,.\, \mathbf{ef} = (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, (\mathbf{d} \,.\, \mathbf{e})\, \mathbf{af};$$

pravá strana její rovná se téže dyadě, ježto

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} \,.\, (\mathbf{cd} \,.\, \mathbf{ef}) &= \mathbf{ab} \,.\, (\mathbf{d} \,.\, \mathbf{e})\, \mathbf{cf} = (\mathbf{d} \,.\, \mathbf{e})\, \mathbf{ab} \,.\, \mathbf{cf} \\ &= (\mathbf{d} \,.\, \mathbf{e})\, (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{af}. \end{aligned}$$

Přejděme nyní od dyad k **mnohočlenům dyadickým**; obecný tvar jejich jest, jak známo,

$$\Phi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 + \ldots$$

Jak jsme již v oddíle o součinech dyadických ukázali, lze každý takový mnohočlen převésti na tvar trojčlenu

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn},$$

při čemž obecně ani přední členy **a**, **b**, **c**, ani zadní členy **l**, **m**, **n** nejsou konplanární, t. j. k jedné rovině rovnoběžné.

Každý takový mnohočlen lze pokládati (podobně jako jednoduchou dyadu) za jakýsi operator, jímž se převádí libovolný vektor **r** v jiný určitý vektor v prostoru, který vyjadřujeme buď součinem $\Phi \,.\, \mathbf{r}$ aneb $\mathbf{r} \,.\, \Phi$; označíme-li nový vektor **v** neb **v′**, obdržíme $\mathbf{v} = \Phi \,.\, \mathbf{r}$ neb $\mathbf{v}' = \mathbf{r} \,.\, \Phi$.

Vektor **v** neb **v′** takto definovaný jest *lineární funkcí vektoru* **r**. Nalezli jsme pro první z nich výraz (56)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \Phi \,.\, \mathbf{r} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\, \mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\, \mathbf{j} \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\, \mathbf{k}, \end{aligned}$$

jestliže

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

a

$$\begin{aligned} \Phi = a_{11}\mathbf{ii} &+ a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} \\ + a_{21}\mathbf{ji} &+ a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} \\ + a_{31}\mathbf{ki} &+ a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}. \end{aligned}$$

Nebude nesnadno nalézti podobný výraz pro součin $\mathbf{r} \,.\, \Phi$, totiž

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \mathbf{r} \,.\, \Phi = (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\, \mathbf{i} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)\, \mathbf{j} \\ + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\, \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zavedeme-li mnohočlen Φ_C *sdružený* k Φ, daný vzorcem

$$\begin{aligned}\Phi_C = a_{11}\mathbf{ii} &+ a_{21}\mathbf{ij} + a_{31}\mathbf{ik} \\ + a_{12}\mathbf{ji} &+ a_{22}\mathbf{jj} + a_{32}\mathbf{jk} \\ + a_{13}\mathbf{ki} &+ a_{23}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk},\end{aligned}$$

jest patrně

$$\mathbf{v}' = \Phi_C \,.\, \mathbf{r},$$

tudíž

$$\mathbf{r} \,.\, \Phi = \Phi_C \,.\, \mathbf{r}. \tag{157}$$

Ukážeme snadno, že lineární funkce vektorová $\Phi \,.\, \mathbf{r}$ určena jest známe-li hodnotu její pro tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, které nejsou konplanární. Neboť libovolný vektor $\mathbf{r}$ můžeme vždy vyjádřiti výrazem

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c};$$

jsou-li tudíž dány součiny $\Phi \,.\, \mathbf{a}$, $\Phi \,.\, \mathbf{b}$, $\Phi \,.\, \mathbf{c}$, známe také $\Phi \,.\, \mathbf{r}$.

Ve zvláštním případě lze dyadický mnohočlen vyjádřiti ve formě dvojčlenu, jestliže totiž buď přední členy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nebo zadní členy $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ v trojčlenu $\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$ jsou konplanární. Kdyby na př. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ byly konplanární, mohli bychom klásti

$$\mathbf{a} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c},$$

pročež

$$\Phi = (x\mathbf{b} + y\mathbf{c})\,\mathbf{l} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn} = \mathbf{b}\,(x\mathbf{l} + \mathbf{m}) + \mathbf{c}\,(y\mathbf{l} + \mathbf{n}),$$

místo čehož lze psáti kratčeji

$$\Phi = \mathbf{bo} + \mathbf{cp}.$$

O takovém mnohočlenu dyadickém, který jsme pojmenovali *planárním*, bylo pověděno v oddíle o součinech tří a čtyř vektorů, že součin jeho s libovolným vektorem, v němž jest $\left\{\begin{matrix}\text{praefaktorem} \\ \text{postfaktorem}\end{matrix}\right\}$, jest nový vektor, položený v rovině $\left\{\begin{matrix}\text{předních členů } \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{c} \\ \text{zadních členů } \mathbf{o} \text{ a } \mathbf{p}\end{matrix}\right\}$ jeho. Pravíme také, že planárný mnohočlen má *jeden stupeň nullity.*

V dyadickém mnohočlenu obecného tvaru

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$$

mohou býti buď přední členy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, nebo zadní členy $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ též kollineární, t. j. téhož běhu; tento zvláštní mnohočlen lze vyjádřiti jednoduchou dyadou. V prvém případě bude totiž

$$\mathbf{a} = a\mathbf{c} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = b\mathbf{c},$$

tudíž

$$\Phi = \mathbf{c}\,(a\mathbf{l} + b\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \mathbf{c}\mathbf{q};$$

a podobně v případě druhém. Jsou to dyadické mnohočleny *lineární*. Ježto dle rovnic (20)

$$\Phi \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{c}\mathbf{q} \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{c}\,(\mathbf{q} \,.\, \mathbf{r})$$

a

$$\mathbf{r} \,.\, \Phi = \mathbf{r} \,.\, \mathbf{c}\mathbf{q} = (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{c})\,\mathbf{q},$$

můžeme říci, že lineární mnohočlen dyadický, je-li v součinu s vektorem $\mathbf{r}$ $\left\{\begin{matrix}\text{praefaktorem}\\ \text{postfaktorem}\end{matrix}\right\}$, převádí tento vektor v jiný, mající týž běh jako $\left\{\begin{matrix}\text{přední}\\ \text{zadní}\end{matrix}\right\}$ člen mnohočlenu.

Mnohočleny takové mají *dva stupně nullity.*

Jestliže dyadický mnohočlen Φ v dalším zvláštním případě annulluje všechny vektory v prostoru $\mathbf{r}$, je-li tudíž pro každé $\mathbf{r}$ součin $\Phi \,.\, \mathbf{r} = 0$ a $\mathbf{r} \,.\, \Phi = 0$, pravíme, že mnohočlen rovná se nulle a píšeme $\Phi = 0$. Takový mnohočlen má *tři stupně nullity.*

Tudíž dyada $\mathbf{u}\mathbf{v}$, jejíž jeden činitel roven jest nulle, má hodnotu 0.

Definujme: Dva dyadické mnohočleny Φ a Ψ se sobě rovnají, platí-li pro kterýkoli vektor $\mathbf{r}$ buď rovnice

$$\Phi \,.\, \mathbf{r} = \Psi \,.\, \mathbf{r}$$

aneb (158)

$$\mathbf{r} \,.\, \Phi = \mathbf{r} \,.\, \Psi.$$

Stačí však, když jedna z těchto rovnic jest platna jenom pro tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, které nejsou konplanární; neboť je-li vyhověno rovnicím na př.

$$\Phi \,.\, \mathbf{a} = \Psi \,.\, \mathbf{a},\ \Phi \,.\, \mathbf{b} = \Psi \,.\, \mathbf{b},\ \Phi \,.\, \mathbf{c} = \Psi \,.\, \mathbf{c},$$

jest též správna rovnice

$$x\Phi \,.\, \mathbf{a} + y\Phi \,.\, \mathbf{b} + z\Phi \,.\, \mathbf{c} = x\Psi \,.\, \mathbf{a} + y\Psi \,.\, \mathbf{b} + z\Psi \,.\, \mathbf{c}$$

čili

$$\Phi \,.\, (x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}) = \Psi \,.\, (x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}).$$

Poněvadž

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{r},$$

platí též

$$\Phi \,.\, \mathbf{r} = \Psi \,.\, \mathbf{r},$$

z čehož tudíž plyne

$$\Phi = \Psi.$$

Co se týče složitějších součinů nežli jsou $\Phi \,.\, \mathbf{r}$ aneb $\Phi \times \mathbf{r}$ (utvořený na základě rovnice (22ª)), budiž tuto uveden toliko součin $[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s}$, v němž $\mathbf{r}$ a $\mathbf{s}$ jsou dva libovolné vektory; dokážeme o něm, že jest roven $\Phi \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]$. Neboť

$$\Phi \times \mathbf{r} = (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots) \times \mathbf{r} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r} + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r} + \ldots$$

čili dle (22ª)

$$\Phi \times \mathbf{r} = \mathbf{a}_1 \,[\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}] + \mathbf{a}_2 \,[\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}] + \ldots;$$

pročež

$$[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} = \mathbf{a}_1 \,[\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} + \mathbf{a}_2 \,[\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} + \ldots$$

Součiny $[\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}]$, $[\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}]$ atd. na pravé straně jsou vektory; můžeme tudíž použíti rovnice (20ª) a psáti

$$[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} = \mathbf{a}_1 \,([\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s}) + \mathbf{a}_2 \,([\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s}) + \ldots$$

Dle rovnice (14) jest však

$$[\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} = \mathbf{b}_1 \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]$$

atd., pročež

$$[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} = \mathbf{a}_1 \,(\mathbf{b}_1 \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]) + \mathbf{a}_2 \,(\mathbf{b}_2 \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]) + \ldots$$

anebo vzhledem k (20ª)

$$\begin{aligned}[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} &= \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}] + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}] + \ldots \\ &= (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots) \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]\end{aligned}$$

a konečně

$$[\Phi \times \mathbf{r}] \,.\, \mathbf{s} = \Phi \,.\, [\mathbf{r} \times \mathbf{s}]. \tag{159ª}$$

Podobně se dokáže vzorec

$$\mathbf{s} \,.\, [\mathbf{r} \times \Phi] = [\mathbf{s} \times \mathbf{r}] \,.\, \Phi. \tag{159ᵇ}$$

Skalární součiny dvou dyadických mnohočlenů. Od součinu dyadického mnohočlenu a vektoru přejdeme k skalárnímu součinu dvou dyadických mnohočlenů. Je-li

$$\Phi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 + \ldots$$

a

$$\Psi = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + \ldots,$$

jest vzhledem k platnému zákonu distributivnímu

$$\begin{aligned} \Phi \,.\, \Psi = & (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots) \,.\, (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + \ldots) \\ = & \; a_1 b_1 \,.\, c_1 d_1 + a_2 b_2 \,.\, c_1 d_1 + a_3 b_3 \,.\, c_1 d_1 + \ldots \\ + & \; a_1 b_1 \,.\, c_2 d_2 + a_2 b_2 \,.\, c_2 d_2 + a_3 b_3 \,.\, c_2 d_2 + \ldots \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{160a}$$

čili

$$\begin{aligned} \Phi \,.\, \Psi = & (b_1 \,.\, c_1) a_1 d_1 + (b_2 \,.\, c_1) a_2 d_1 + (b_3 \,.\, c_1) a_3 d_1 + \ldots \\ + & (b_1 \,.\, c_2) a_1 d_2 + (b_2 \,.\, c_2) a_2 d_2 + (b_3 \,.\, c_2) a_3 d_2 + \ldots \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{160b}$$

Skalární součin dvou dyadických mnohočlenů jest tedy dyadický mnohočlen.

Netřeba zvláště dokazovati, že rovnice (155^a), platná pro dyady, platí též pro mnohočleny dyadické; jest tedy

$$(\Phi \,.\, \Psi) \,.\, \mathbf{r} = \Phi \,.\, (\Psi \,.\, \mathbf{r}). \tag{155b}$$

Nejsou však sobě rovny součiny $(\Phi \,.\, \mathbf{r}) \,.\, \Psi$ a $\Phi \,.\, (\mathbf{r} \,.\, \Psi)$. Zákonu associativnímu podrobeny jsou skalární součiny dvou (neb i více) dyadických mnohočlenů s vektorem, nalézá-li se tento činitel na jednom nebo na druhém konci součinu, nebo nalézají-li se na obou koncích součinu různé vektory; je-li vektor $\mathbf{r}$ uprostřed výrazu, nejsou součiny ty associativní a třeba náležitě dbáti závorek.

Také platnost rovnice (156^a) lze rozšířiti na mnohočleny dyadické, t. j.

$$(\Phi \,.\, \Psi) \,.\, \Omega = \Phi \,.\, (\Psi \,.\, \Omega), \tag{156b}$$

místo čehož píšeme kratčeji $\Phi \,.\, \Psi \,.\, \Omega$.

Skalární součin tří (nebo i více) dyadických mnohočlenů jest associativní; kterékoli dva činitelé lze uzávorkovati aneb závorky vynechati, aniž celý součin mění svou hodnotu.

Též zákonem distributivním řídí se skalární součiny dyadických mnohočlenů; tudíž

$$\Phi \,.\, (\Psi + \Psi') = \Phi \,.\, \Psi + \Phi \,.\, \Psi',$$
$$(\Phi + \Phi') \,.\, \Psi = \Phi \,.\, \Psi + \Phi' \,.\, \Psi$$

a

$$(\Phi + \Phi' + \Phi'' + \ldots) . (\Psi + \Psi' + \Psi'' + \ldots) = \Phi . \Psi + \Phi' . \Psi$$
$$+ \Phi'' . \Psi + \ldots + \Phi . \Psi' + \Phi' . \Psi' + \Phi'' . \Psi' + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

Skalární součin dvou stejných dyadických mnohočlenů slove *dvojmocí* dyadického mnohočlenu; i píšeme

$$\Phi . \Phi = \Phi^2;$$

podobně jest *trojmoc* mnohočlenu:

$$\Phi . \Phi . \Phi = \Phi^3$$

a obecně *n-tá mocnina* mnohočlenu:

$$\Phi . \Phi . \Phi \ldots = \Phi^n.$$

Idemfaktor. Jak bylo již dříve několikráte vytčeno, jest zvláště důležitý mnohočlen dyadický, který jsme nazvali *jednotkovým mnohočlenem* čili *idemfaktorem*; tvar jeho jest jak známo,

$$\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk},$$

značí-li **i**, **j**, **k** tři jednotkové vektory, mající běhy os pravoúhlé soustavy souřadnicové.

Dle vzorců (82) má tento mnohočlen vlastnost, že, násobíme-li jím skalárně (jako praefaktorem nebo jako postfaktorem) kterýkoli vektor **r**, obdržíme týž vektor, že tedy

$$\mathbf{I} . \mathbf{r} = \mathbf{r} . \mathbf{I} = \mathbf{r}.$$

Vlastnost tuto můžeme rozšířiti na skalární součiny idemfaktoru s kterýmkoli mnohočlenem dyadickým; platí tudíž

$$\Phi . \mathbf{I} = \Phi \quad \text{a} \quad \mathbf{I} . \Phi = \Phi.$$

Násobíme-li totiž součin $\Phi . \mathbf{I}$ skalárně libovolným vektorem **r**, obdržíme dle (155^b)

$$(\Phi . \mathbf{I}) . \mathbf{r} = \Phi . (\mathbf{I} . \mathbf{r});$$

ale dle (82^b) jest $\mathbf{I} . \mathbf{r} = \mathbf{r}$, tudíž

$$(\Phi . \mathbf{I}) . \mathbf{r} = \Phi . \mathbf{r}.$$

Vzhledem k výše uvedené definici o rovnosti dvou dyadických mnohočlenů (158) vychází odtud

$$\Phi . \mathbf{I} = \Phi, \qquad (162^a)$$

podobně se dokáže, že též

$$\mathbf{I} \,.\, \Phi = \Phi. \tag{162^b}$$

Má tedy idemfaktor ve vektorové analysi týž význam jako jednotka v obyčejné algebře; odtud i jméno jeho jednotkový mnohočlen.

Idemfaktor lze vyjádřiti ještě jinými vektory nežli jsou **i**, **j** a **k**; za tou příčinou vyjděme od rovnice (19), v níž místo **d** pišme **r**, čímž obdržíme

$$(\mathbf{abc})\,\mathbf{r} = (\mathbf{bcr})\,\mathbf{a} + (\mathbf{car})\,\mathbf{b} + (\mathbf{abr})\,\mathbf{c}, \tag{σ}$$

kde značí na př. (**bcr**) skalární součin tří vektorů, totiž součin $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{r}$ nebo některý z podobných součinů tomuto rovných (dle (14)). Klademe-li v součinech na pravé straně této rovnice vektory **a**, **b**, **c** na první místa (což jest možné, ježto (**bcr**) atd. jsou skaláry), nabudeme

$$(\mathbf{abc})\,\mathbf{r} = \mathbf{a}\,([\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{r}) + \mathbf{b}\,([\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \,.\, \mathbf{r}) + \mathbf{c}\,([\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{r})$$

čili vzhledem k rovnici (20ᵃ)

$$(\mathbf{abc})\,\mathbf{r} = \mathbf{a}\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{r} + \mathbf{b}\,[\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \,.\, \mathbf{r} + \mathbf{c}\,[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{r}.$$

Zaveďme nyní nové tři vektory, dané vzorci

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{(\mathbf{abc})}, \quad \mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{(\mathbf{abc})}, \quad \mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{(\mathbf{abc})}; \tag{163^a}$$

pak přejde poslední rovnice ve

$$\mathbf{r} = \mathbf{aa}^{-1} \,.\, \mathbf{r} + \mathbf{bb}^{-1} \,.\, \mathbf{r} + \mathbf{cc}^{-1} \,.\, \mathbf{r} = (\mathbf{aa}^{-1} + \mathbf{bb}^{-1} + \mathbf{cc}^{-1}) \,.\, \mathbf{r}.$$

Jelikož $\mathbf{r} = \mathbf{I} \,.\, \mathbf{r}$, obdržíme srovnáním pro idemfaktor **I** hodnotu

$$\mathbf{I} = \mathbf{aa}^{-1} + \mathbf{bb}^{-1} + \mathbf{cc}^{-1} \,. \tag{164^a}$$

Výpočtem zcela podobným tomuto (necháme-li v rovnici (σ) vektory **a**, **b**, **c** na druhých místech), nalezneme též

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}^{-1}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^{-1}\,\mathbf{b} + \mathbf{c}^{-1}\,\mathbf{c}. \tag{164^b}$$

(Pokračování.)