Antonín Jeřábek

Algebraická analyse dvojstředového čtyřúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 195--203

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121880`

při čemž

$$A_2 - A_3 = (A_2 - A_4) - (A_3 - A_4),$$

tedy

$$A_2 - A_3 \equiv \lambda_2 - \lambda_3 \equiv 0 \quad (mod\ 5).$$

Lze tedy nalézti celé číslo $\varkappa'$ takové, že

$$n\,(\zeta\mu - \varkappa') < 1$$

a ježto

$$n\,(\zeta) = 1,$$

bude, klademe-li

$$\varkappa = \varkappa'\zeta^4,$$

$$n\,(\mu - \varkappa) < 1.$$

Z platnosti Euklidova algorithmu plyne věta:

Každé celé číslo z tělesa pátých kořenů z jednotky lze rozložiti „podstatně" jediným způsobem v součin prvočinitelů. Slovo podstatně značí, že nepokládáme za různé rozklady, při nichž prvočinitelé jsou zaměněni prvočiniteli associovanými.

(Dokončení.)

Algebraická analyse dvojstředového čtyřúhelníku.

Napsal **Ant. Jeřábek.**

Úloha I. *Sestrojiti dvojstředový čtyřúhelník, jsou-li dány opsaná kružnice K a bod P, jímž probíhají úhlopříčky.*

Rozbor. Budiž O střed opsané kružnice K, jejíž poloměr $= r$, a $OP = l$. (obr. 1.)

Protože dvojstředový čtyřúhelník teprv třemi podmínkami dostatečně jest určen, jest naše úloha neurčitá; i lze očekávati nekonečně mnoho takových čtyřúhelníků, mezi nimiž se vyskytnou i *deltoid s pravými úhly* i *rovnoramenný lichoběžník.*

Snadno nahlédneme, že v obou těch případech *střed O' vepsané kružnice K'* leží na OP. Jest otázkou, zdali bude tak ve všech případech. —

Označme písmenem P zatím průsečík *jedné* úhlopříčky ku př. úhlopříčky BD s přímkou OO' a klaďme $OO' = d$ a *poloměr kružnice $K' = \varrho$.* Vrchol A hledaného čtyřúhelníku bude na přímce AO', jež jsouc prodloužena, rozpoluje oblouk BD v bodě

E; podobně vrchol C na přímce CO', rozpolující oblouk *protější úseče* v bodě F. Potom bude EF *průměrem na tětivě* BD *kolmým.*

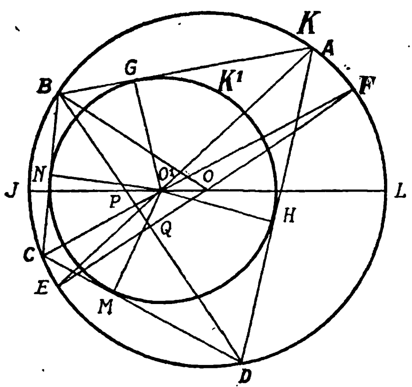
Je-li $\sphericalangle BAD = \alpha$, bude $\sphericalangle BCD = 2R - \alpha$, a potom

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAE = \frac{\alpha}{2},$$

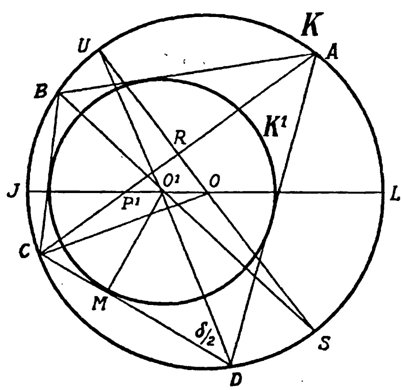
$$\sphericalangle BCF = \sphericalangle DCF = R - \frac{\alpha}{2};$$

mimo to budou středové úhly

$$\sphericalangle BOE = \alpha \quad \text{a} \quad \sphericalangle BOF = 2R - \alpha.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Mají-li strany čtyřúhelníku $ABCD$ dotýkati se kružnice K', musí vzdálenost O' od stran rovnati se poloměru ϱ; tedy

$$O'A \sin \frac{\alpha}{2} = \varrho, \tag{1}$$

$$O'C \cos \frac{\alpha}{2} = \varrho. \tag{2}$$

Dle (1) a (2) jest $O'A \sin \frac{\alpha}{2} = O'C \cos \frac{\alpha}{2}$; a protože $O'A : O'C = O'F : O'E$, jest též $O'F \sin \frac{\alpha}{2} = O'E \cos \frac{\alpha}{2}$ a

(přihlédneme-li k $\triangle$ům $O'OF$ a $O'OE$)

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{d^2+r^2+2dr\cos POQ}$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{d^2+r^2-2dr\cos POQ}.$$

Považíme-li, že v $\triangle$u BOQ pravoúhlém $OQ = r\cos\alpha$, jest $\cos POQ = \frac{r\cos\alpha}{l}$; a tedy

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(d^2+r^2+\frac{2dr^2}{l}\cos\alpha\right)$$
$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(d^2+r^2-\frac{2dr^2}{l}\cos\alpha\right),$$

čili

$$\frac{2dr^2}{l}\cos\alpha\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=(d^2+r^2)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

odkud

$$\frac{2dr^2\cos\alpha}{l}=(d^2+r^2)\cos\alpha,$$

z čehož konečnou *podmínkou dvojstředového čtyřúhelníku*

$$\frac{2dr^2}{l}=d^2+r^2. \tag{3}$$

Jelikož v této rovnici $OP = l$ závisí toliko na d a r, jest z této rovnice patrno, že i druhá úhlopříčka AC prochází bodem P. Neboť kdybychom předcházející vývody opakovali za předpokladu, že P jest průsečíkem AC s OO', dostali bychom pro $OP = l$ tutéž rovnici (obr. 2.).

Ze (3) vyplývá

$$d=\frac{r^2-r\sqrt{r^2-l^2}}{l},$$

protože OO' musí býti menší než r. —

Zbývá ještě ustanoviti ϱ.

Dle (1) jest

$$\frac{O'J \,.\, O'L}{O'E} \sin\frac{\alpha}{2} = \varrho,$$

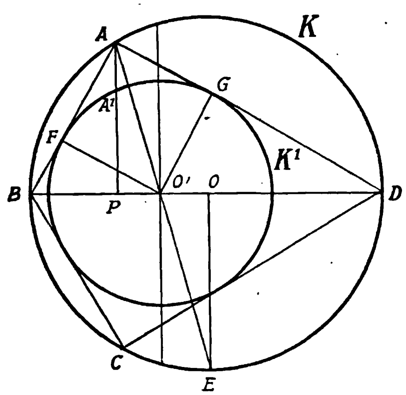
čili

$$\frac{(r-d)(r+d)\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{d^2+r^2-\frac{2dr^2}{l}\cos\alpha}} = \varrho,$$

a dle (3)

$$\varrho = \frac{(r^2-d^2)\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(d^2+r^2)(1-\cos\alpha)}} = \frac{r^2-d^2}{\sqrt{2(d^2+r^2)}}. \quad (4)$$

Z dosavadního rozboru vysvítá, že $ABCD$ je *čtyřúhelníkem z tečných,* vyhověno-li podmínkám (3) a (4), jimiž určena jest kružnice vepsaná i *co do polohy i co do velikosti.*



Obr. 3.

Mimo to vyplývá, že *všecky**) hledané čtyřúhelníky dvojstředové mají *společnou kružnici vepsanou K',* a že *společný střed O'* nachází se *na spojnici OP.*

Sestrojení (obr. 3.). Budiž K daná kružnice o poloměru r a $OP = l$.

Učiňme $OE \perp OP$ a $PA \perp OP$, spojme E s A, i jest *a) průsečík O' středem,* a je-li $O'F \perp AB$,

*) tedy i zmíněný deltoid s pravými úhly i rovnoramenný lichoběžník.

b) *$O'F$ poloměrem ϱ kružnice K'*, vepsané všem dvojstředovým čtyřúhelníkům, jež vepsány jsou K.

c) Nyní jest toliko vésti bodem P (obr. 1.) tětivu libovolnou BD, postaviti kolmý průměr EF i spojiti body E, F se středem O' a spojnice prodloužiti do A a C; i jest $ABCD$ čtyřúhelník žádaný.

Důkaz. *a*) (obr. 3.)

$$\frac{O'P}{O'O} = \frac{O'A}{O'E} = \frac{O'A \,.\, O'E}{\overline{O'E}^2} = \frac{O'B \,.\, O'D}{d^2 + r^2};$$

z toho

$$\frac{l - d}{d} = \frac{r^2 - d^2}{d^2 + r^2} \quad \text{a} \quad l = \frac{2dr^2}{d^2 + r^2},$$

odkud jednoznačně určeno jest

$$O'O = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - l^2}}{l}$$

(protože d musí býti menší než r), souhlasíc s podmínkou (3.

b) (obr. 3.)

$$O'A \,.\, O'E = O'B \,.\, O'D, \text{ tedy } O'A = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{d^2 + r^2}};$$

protože $O'A$ jest úhlopříčkou čtverce $O'FAG$, jest

$$O'F \,.\, \sqrt{2} = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{d^2 + r^2}}$$

a konečně dle (4.)

$$O'F = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{2\,(d^2 + r^2)}} = \varrho.$$

c) (obr. 1.) V pravoúhlém $\triangle\, BOQ$ jest $OQ = r \cos \alpha$ a protože dle *a*)

$$OP = \frac{2dr^2}{d^2 + r^2},$$

jest

$$\cos POQ = \frac{(d^2 + r^2) \cos \alpha}{2dr},$$

anebo

$$2dr \cos POQ = (d^2 + r^2) \cos \alpha.$$

V $\triangle$ $O'OE$ jest pak

$$O'E = \sqrt{(d^2 + r^2) - (d^2 + r^2)\cos\alpha} = \sqrt{(d^2 + r^2)(1 - \cos\alpha)}$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2(d^2 + r^2)}.$$

Odtud

$$O'A = \frac{O'J\,.\,O'L}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2(d^2 + r^2)}}$$

a protože dle b)

$$\frac{r^2 - d^2}{\sqrt{2(d^2 + r^2)}} = \varrho, \quad \text{jest} \quad O'A = \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

anebo $O'A \sin\frac{\alpha}{2} = \varrho$, což znamená, že vzdálenost stran AB a AD od O' rovná se poloměru ϱ, protože dle sestrojení

$$\sphericalangle EAB = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle EAD.$$

Podobně obrácením rozboru se dokáže, že

$$O'C \cos\frac{\alpha}{2} = \varrho,$$

čili že i *spojnice* BC *a* CD jsou *tečnými kružnice* K'.

Důsledek I.

Kružnice K a K' mají pro průsečík úhlopříček P dvojstředových čtyřúhelníků společnou poláru.

Důkaz. Body P, O', O leží na jedné přímce. Budiž p vzdálenost *pólu* P (obr. 3.) od jeho *poláry vzhledem ke kružnici* K, a p' vzdálenost téhož od *poláry vzhledem ku* K'. I jest

$$p = \frac{\overline{PA}^2}{PO} = \frac{r^2 - l^2}{l},$$

$$p' = \frac{\overline{PA'}^2}{PO'} = \frac{\overline{O'A'}^2 - \overline{PO'}^2}{PO'} = \frac{\varrho^2 - (l - d)^2}{l - d}$$

$$= \frac{r^2 + 2dl - d^2 - 2l^2}{2(l - d)},$$

protože

$$2\varrho^2 = r^2 - 2dl + d^2 \dagger).$$

Snadno lze dokázati, že $p = p'$.

Dle (3.) jest totiž

$$\frac{d}{l} = \frac{d^2 + r^2}{2r^2}.$$

Odečtením členů předních od zadních

$$\frac{l-d}{l} = \frac{r^2 - d^2}{2r^2};$$

záměnou vnějších členů

$$\frac{r^2}{l} = \frac{r^2 - d^2}{2(l-d)};$$

odečtením l na obou stranách

$$\frac{r^2 - l^2}{l} = \frac{r^2 + 2dl - d^2 - 2l^2}{2(l-d)}, \quad \text{čili} \quad p = p'.$$

Poznámka. Protože (dle známé věty) ve čtyřúhelníku kružnicí vepsaném průsečík vnitřních úhlopříček jest pólem vnější úhlopříčky, můžeme též říci:

Vnější úhlopříčka dvojstředového čtyřúhelníku jest polárou průsečíku vnitřních úhlopříček i vzhledem ke kružnici opsané i vepsané.

Důsledek II.

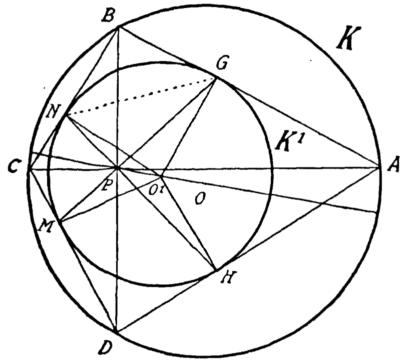
Úhlopříčky čtyřúhelníku dvojstředového a spojnice protějších dotyčných bodů protínají se v témž bodě jediném P.

Důkaz. Prodloužíme-li (obr. 4.) dle poslední poznámky obě dvojice protějších stran dvojstředového čtyřúhelníku, určí nám průsečíky těch dvojic vnější úhlopříčku L a tím zároveň poláru bodu P (jakožto průsečíku vnitřních úhlopříček) vzhledem ku K. Ale táž vnější úhlopříčka L jest též polárou bodu P vzhledem ke K', t. j. $\left\{\begin{matrix} GM \\ HN \end{matrix}\right\}$ jakožto *tětivy tečných* $\left\{\begin{matrix} AB, \ DC \\ AD, \ BC \end{matrix}\right\}$, vedených z bodů poláry, protínají se taktéž v bodě P.

†) $\overline{PA}^2 = BP \,.\, PD$ (obr. 3.); poněvadž pak $O'A = \varrho\sqrt{2}$, jest $2\varrho^2 - (l-d)^2 = (r-l)(r+l)$, anebo $2\varrho^2 + 2dl - d^2 = r^2$.

Jsou tedy *průsečík úhlopříček* a *průsečík spojnic protějších dotyčných bodů* ve dvojstředovém čtyřúhelníku *bodem totožným.*

Úloha II. *Sestrojiti dvojstředový čtyřúhelník, jsou-li dány vepsaná kružnice K' a průsečík úhlopříček P* (obr. 4.).



Obr. 4.

Rozbor. Bod P jest, jak dokázáno, průsečíkem spojnic protějších dotyčných bodů. Středový úhel $HO'G = 2R - \alpha$, protože $O'G \perp AB$ a $O'H \perp AD$; podobně středový $\sphericalangle NO'M = 2R - \gamma$. — Protože $\alpha + \gamma = 2R$, jest

$$\sphericalangle HO'G + \sphericalangle NO'M = 4R - (\alpha + \gamma) = 2R.$$

Potom *arc* GH + *arc* MN rovná se polokružnici; a proto součet *obvodových* úhlů nad oblouky GH a MN rovná se *úhlu pravému*; tudíž $\sphericalangle HPG$, maje vrchol uvnitř K' a rovnaje se tedy jejich *součtu,* jest taktéž *pravý.* — Můžeme říci: *Spojnice protějších bodů dotyčných ve dvojstředovém čtyřúhelníku stojí na sobě kolmo.*

Sestrojení.

a) (obr. 4.) Bodem P veďme v kruhu K' kterékoliv dvě tětivy *na sobě kolmé.* V koncových bodech sestrojme tečné ku K' až k průsečíkům A, B, C, D; i jest $ABCD$ čtyřúhelník žádaný.

b) Kdybychom měli sestrojiti pouze kružnici K, vyloučili bychom ze (3.) a (4.) poloměr r; tím bychom dospěli ku (5.), píšíce místo $l \ldots (l' + d)$ a dle toho bychom sestrojili OO' ($= d$).

$$\frac{d}{l'} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - l'^2}. \qquad (5.)$$

Vztyčíme (obr. 5.) $PH \perp PO'$ až k průsečíku s kružnicí K', vedeme $HM \parallel PO'$ a $O'M \parallel PH$, spojíme M s L; s bodu P spustíme $PN \perp ML$ i vedeme $QO \parallel ML$; O pak jest hledaným středem kružnice K. Poloměr r získáme jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsné jsou ML a OP.

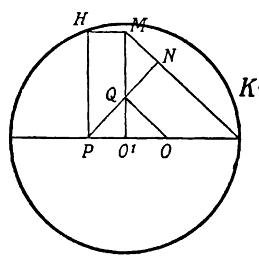
Důkaz. *a*) Jest dokázati, že $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = 2R$ (obr. 4.).

Označme $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle DCB = \gamma$. Pak jest

$$\sphericalangle HNG = \tfrac{1}{2} \sphericalangle HO'G = \tfrac{1}{2}(2R - \alpha);$$
$$\sphericalangle NGM = \tfrac{1}{2} \sphericalangle NO'M = \tfrac{1}{2}(2R - \gamma);$$

tudíž $$\sphericalangle HNG + \sphericalangle NGM = 2R - \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

Avšak v pravoúhlém $\triangle NPG$ jest $\sphericalangle HNG + \sphericalangle NGM = R$, tudíž dle posledního vztahu $R = 2R - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, odkud konečně $\alpha + \gamma = 2R$.



Obr. 5.

b) $\overline{PH}^2 = \varrho^2 - l'^2$; tedy $\overline{O'M}^2 = \varrho^2 - l'^2$ (obr. 5.).

V pravoúhlém $\triangle PQO$ jest $O'O : O'P = \overline{OQ}^2 : \overline{PQ}^2$. Protože $\triangle PQO \sim \triangle MO'L$, jest též

$$OQ : PQ = O'L : O'M.$$

Odtud

$$O'O : O'P = \overline{O'L}^2 : \overline{O'M}^2 \text{ čili } O'O : l' = \varrho^2 : (\varrho^2 - l'^2).$$

Dle (5.) $O'O = d$.

Mimo to

$$\overline{ML}^2 = \overline{O'M}^2 + \overline{O'L}^2 = \varrho^2 - l'^2 + \varrho^2 = 2\varrho^2 - l'^2;$$
$$OP^2 = (l' + d)^2.$$

Tudíž

$$ML^2 + OP^2 = 2\varrho^2 + 2l'd + d^2 = 2\varrho^2 + 2dl - d^2 = r^2$$

(srov. †).
