Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

Příspěvek k řešení binomické rovnice $x^n \pm 1 = 0$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 209--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121860

Příspěvek k řešení binomické rovnice $x^n \pm 1 = 0$.

Podává

V. Jarolímek,

ředitel c. k. české vyšší realné školy v Praze.

1. Jest zajisté s podivením, kterak dosud dosti rozšířena jest domněnka, že rovnici $x^n + 1 = 0$ řešiti lze elementárnou algebrou, totiž redukcí na rovnice kvadratické, toliko pokud $n < 6$, a rovnici $x^n - 1 = 0$ jen pro $n < 7$. Setkávámeť se s ní i v algebře Machovcově (§ 119) jinak velmi dobré.

A přece známa jest s dostatek souvislost hodnot $\sqrt[n]{\pm 1}$ s pravidelným n-úhelníkem, která zřejmě k tomu ukazuje, že rovnice $x^n \pm 1 = 0$ řešitelna bude elementární algebrou, pokud sestrojiti lze pravidelný n-úhelník elementárnou geometrií, totiž toliko přímkami a kružnicemi, tedy zejména pro $n = 2^r$, $n = 3 . 2^r$, $n = 5 . 2^r$, kdež r je kladné číslo celé, ale po libosti veliké.

Zobrazíme-li totiž hodnoty

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \tag{1}$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ body v rovině, jichž polárné souřadnice jsou $\varrho = 1$, $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, dostaneme vrcholy pravidelného n-úhelníka, kterážto konstrukce nevyžaduje než rozdělení kružnice na n stejných dílů. Realná hodnota $\sqrt[n]{1} = +1$ výrazu (1) pro $k = 0$ odpovídá vrcholu úhelníka ležícímu na ose X soustavy polárné. Pro sudé n obdržíme ještě druhou hodnotu realnou

$\sqrt[n]{1} = -1$ za $k = \frac{n}{2}$, jíž přísluší vrchol protější, kdežto pro liché n leží naproti vrcholu $+1$ strana $\perp$ X.

Obdobně rovnicí

$$(2) \qquad \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

dána jest soustava n bodů pro $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$, jež jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka. Jen liché n dává tu jedinou hodnotu realnou $\sqrt[n]{-1} = -1$ pro $k = \frac{n-1}{2}$, kdež jeden vrchol lichoúhelníka připadá na $-$X (amplituda $\varphi = \pi$); sudému však n příslušejí hodnoty výrazu (2) jen pomyslné, ježto osa X rozpolujíc dvě protější strany sudoúhelníka, žádného vrcholu jeho neobsahuje.

V odstavcích následujících podáváme řešení rovnice

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 2^r, \quad n = 3 \,.\, 2^r, \quad n = 5 \,.\, 2^r$$

algebrou elementárnou.

2. Řešení rovnice

$$x^n + 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 2^r$$

budiž napřed provedeno na příkladě

$$(3) \qquad x^{32} + 1 = 0.$$

Ježto x liší se od nully, možno obě strany rovnice děliti x^{16}:

$$x^{16} + x^{-16} = 0.$$

Přičtením čísla 2 na obou stranách a oddvojmocněním dostaneme

$$x^8 + x^{-8} = \pm\sqrt{2}.$$

Opakováním tohoto výkonu vyjde

$$x^4 + x^{-4} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}},$$

dále

$$x^2 + x^{-2} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}$$

a posléze

(4) $$x + x^{-1} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}} = a.$$

Násobením x nabudeme rovnice kvadratické

$$x^2 - ax + 1 = 0,$$

jejíž kořeny

(5) $$x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}) = \frac{1}{2}(a \pm i\sqrt{4 - a^2})$$

čili

(6) $$x = \sqrt[32]{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}} \pm i\sqrt{2 \mp \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}\right].$$

Tento výraz má různých hodnot 32, ježto variací znamének ve výrazu a (rov. 4.) jest 16 a každé a dá hodnoty dvě (rov. 5.). Jinak řečeno: ve výraze (6) možno znaménka až po i měniti jakkoli ($\pm$ opakuje se pětkrát, tedy variací $2^5 = 32$), kdežto v pravo za i nutno vykonati vždy touž měnu jako v odmocněnci v levo od i.

Obecná pak rovnice

(7) $$x^{2^r} + 1 = 0$$

dá obdobným řešením kořeny

(8) $$x = \sqrt[2^r]{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm\underbrace{\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots}}}}_{(r-1)\text{-krát}} \pm i\underbrace{\sqrt{2 \mp \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots}}}}_{(r-1)\text{-krát}}\right].$$

3. Řešení rovnice

$$x^n + 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 3 \,.\, 2^r.$$

Příklad:

$$(9) \qquad x^{24}+1=0.$$

Tento dvojčlen jest dělitelen dvojčleny (x^3+1), (x^8+1). Užijme k rozkladu vždy dvojčlenu, jehož x má mocnitele 2^r. Podíl

$$(x^{24}+1):(x^8+1)=x^{16}-x^8+1.$$

Jest tedy

$$x^{24}+1=(x^8+1)\,.\,(x^{16}-x^8+1)=0,$$

kteréžto rovnici vyhoví se způsobem dvojím:

$$(10) \qquad x^8+1=0,$$

$$(11) \qquad x^{16}-x^8+1=0.$$

Kořeny rovnice (10) jsou dle vzorce (8)

$$(12) \qquad x=\sqrt[8]{-1}=\frac{1}{2}\,[\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\pm i\sqrt{2\mp\sqrt{2}}].$$

Rovnici (11) dělme zase x^8:

$$x^8-1+x^{-8}=0.$$

Přičtěním čísla 3 na obou stranách a oddvojmocněním vyjde

$$x^4+x^{-4}=\pm\sqrt{3}.$$

Zvětšíme-li obě strany o 2 a oddvojmocníme-li, dostaneme

$$x^2+x^{-2}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}},$$

a opakováním téhož výkonu

$$x+x^{-1}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}.$$

Z této rovnice kvadratické vyjde posléze

$$(13) \qquad x=\sqrt[24]{-1}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}\pm i\sqrt{2\mp\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}\right].$$

Výraz (12) obsahuje kořenů 8, výraz (13) kořenů 16, celkem 24 hodnot čísla $\sqrt[24]{-1}$. O variacích znamének v těchto výrazech platí ovšem totéž pravidlo, jako pro výraz (6).

Dodatek. Řešení rovnice (11) podle rovnice kvadratické ($x^8 = y$) vedlo by sice také k cíli, ale cestou daleko delší.

Bylo by totiž

$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}),$$

tedy

$$x = \sqrt[8]{\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})},$$

kdežto by bylo odmocňovati dvěma třikráte za sebou dle známého vzorce

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)}.$$

Obecná rovnice

$$x^{3.2^r} + 1 = 0 \tag{14}$$

řeší se obdobným rozkladem

$$(x^{2^r} + 1) . (x^{2.2^r} - x^{2^r} + 1) = 0.$$

2^r kořenů rovnice (14) jest tudíž obsaženo ve výraze (8), rovnice pak

$$x^{2^{r+1}} - x^{2^r} + 1 = 0$$

dá obdobně jako rovnice (11) dalších 2^{r+1} kořenů:

$$x = \sqrt[3.2^r]{-1} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}} \pm i\sqrt{2 \mp \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}}\right];$$

v každém členu tohoto binomu číslici 2 opakovati jest (s příslušným odmocnidlem) r-kráte.

4. Řešení rovnice

$$x^n + 1 = 0 \quad \text{pro} \quad n = 5 \cdot 2^r.$$

Příklad:

$$(16) \qquad x^{40} + 1 = 0.$$

Tento dvojčlen jest dělitelen dvojčleny $(x^5 + 1)$, $(x^8 + 1)$.

Užijme k rozkladu vždy dvojčlenu, jehož x má mocnitele 2^r. Bude tudíž

$$(x^{40} + 1) = (x^8 + 1) \cdot (x^{32} - x^{24} + x^{16} - x^8 + 1) = 0.$$

Rovnice $x^8 + 1 = 0$ dá zase dle odst. 2. osm kořenů rovnice (16). Ostatních 32 jde z rovnice

$$(17) \qquad x^{32} - x^{24} + x^{16} - x^8 + 1 = 0,$$

již dělíme x^{16} a spořádáme takto:

$$(x^{16} + x^{-16}) - (x^8 + x^{-8}) + 1 = 0.$$

Substitucí

$$x^8 + x^{-8} = y,$$

tudíž

$$x^{16} + x^{-16} = y^2 - 2$$

nabudeme rovnice

$$y^2 - y - 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$y = x^8 + x^{-8} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Připočtením čísla 2 na obou stranách a oddvojmocněním vyjde

$$x^4 + x^{-4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})},$$

opakováním téhož výkonu

$$x^2 + x^{-2} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}},$$

dále

$$x + x^{-1} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}}}$$

a posléze

(18) $$x = \sqrt[40]{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}}} \pm i\sqrt{2 \mp \sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}}}\right].$$

Až po i dávají znaménka variací $2^5 = 32$, kdežto v odmocněnci za i sluší znaménka měniti obdobně jako v odmocněnci prvém. Obsahuje tedy rovnice (18) kořenů 32, rovnice pak $x^8 + 1 = 0$ ostatních 8 kořenů dané rovnice $x^{40} + 1 = 0$.

Obecná rovnice

(19) $$x^{5.2^r} + 1 = 0$$

řeší se obdobně rozkladem

$$(x^{2^r} + 1).(x^{4.2^r} - x^{3.2^r} + x^{2.2^r} - x^{2^r} + 1) = 0.$$

2^r kořenů rovnice (19) jest tudíž obsaženo ve výraze (8), rovnice pak

$$x^{4.2^r} - x^{3.2^r} + x^{2.2^r} - x^{2^r} + 1 = 0$$

dá analogicky jako rovnice (17) dalších 4.2^r kořenů:

(20) $$x = \sqrt[5.2^r]{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}}} \pm i\sqrt{2 \mp \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}}}\right];$$

v každém členu tohoto binomu číslici 2 (s příslušným odmocnidlem) opakovati jest $(r - 1)$kráte.

5. Kořeny rovnice

(21) $$x^{2^r} - 1 = 0$$

jsou totožny s hodnotami

$$\sqrt[2^{r-1}]{-1},\ \sqrt[2^{r-2}]{-1},\ \sqrt[2^{r-3}]{-1},\ldots\sqrt{-1},\ -1,+1.$$

Na příklad

$$x^{32}-1=0$$

lze rozložiti

$$(x^{16}+1)(x^{16}-1)=(x^{16}+1)(x^8+1)(x^8-1) \text{ atd.}$$

posléze

$$(x^{32}-1)=(x^{16}+1)(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)=0,$$

z čehož jde 6 binomických rovnic, jichž kořeny jsou hodnoty

$$\sqrt[16]{-1},\ \sqrt[8]{-1},\ \sqrt[4]{-1},\ \sqrt{-1},-1,+1.$$

Obdobně i řešení rovnic

$$x^{3.2^r}-1=0, \tag{22}$$

$$x^{5.2^r}-1=0 \tag{23}$$

obsaženo jest v odst. 3. a 4.

Na př.

$$x^{24}-1=0 \tag{24}$$

dá

$$(x^{12}+1)(x^6+1)(x^3+1)(x^3-1)=0.$$

Jsou tudíž kořeny rovnice (24) hodnoty

$$\sqrt[12]{-1},\ \sqrt[6]{-1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[3]{1}.$$

Kořeny rovnice

$$x^{40}-1=0$$

jsou hodnoty

$$\sqrt[20]{-1},\ \sqrt[10]{-1},\ \sqrt[5]{-1},\ \sqrt[5]{+1}=0.$$

Poznámka. Hodnoty $\sqrt[5]{1}$ jsou kořeny rovnice

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0;$$

rovnice stupně čtvrtého jest reciproká.

Některé věty trigonometrické.

Žákům středních škol podává

Dr. V. Láska,

docent české vysoké školy technické v Praze.*)

Označme strany trojúhelníka a, b, c a protilehlé úhly α, β, γ; pak platí, jak známo, věty:

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c$$
$$b \sin \alpha - a \sin \beta = 0.$$

Položíme-li

$$a = s_1 + s_2, \qquad \alpha = S_1 + S_2,$$
$$b = s_1 - s_2, \qquad \beta = S_1 - S_2,$$

nabudeme

$$s_1 \{\cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2)\}$$
$$- s_2 \{\cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2)\} = c,$$
$$s_1 \{\sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2)\}$$
$$- s_2 \{\sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2)\} = 0.$$

Poněvadž však

$$\sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2) = 2 \sin S_1 \cos S_2,$$
$$\sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2) = 2 \cos S_1 \sin S_2,$$
$$\cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2) = 2 \cos S_1 \cos S_2,$$
$$\cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2) = - 2 \sin S_1 \sin S_2,$$

bude

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2 s_1 \cos S_1 \cos S_2 + 2 s_2 \sin S_1 \sin S_2 &= c, \\ s_1 \cos S_1 \sin S_2 - s_2 \sin S_1 \cos S_2 &= 0, \end{aligned}$$

---

*) t. č. professor vyšší geodaesie i astronomie při c. k. vysoké škole technické ve Lvově. *Red.*