Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 7, R141--R156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121850

zhruba vyznačena *druhá věta* mechanické teorie tepla, která je dalším dokladem nemožnosti „symohybů", neboť při mechanických pohybech mění se mechanická práce třením, tuhostí převodů, odporem prostředím na *teplo*, t. j. energii, jež se nedá všecka navrátiti do původního tvaru. Poněvadž pak všechny ostatní energie *velmi snadno* na teplo se proměňují, není podle této druhé věty možné „perpetuum mobile" v širším smyslu, kde by na př. nebylo mechanických pohybů (tedy na př. stále svítící zdroj a pod.).

Ačkoliv všechna dosavadní měření, často velmi jemná a přesná dotvrzují stále a stále platnost zákona zachování energie a platnost druhé věty thermodynamické, přece jen mnoho lidí a často dovedných a vynalézavých věnuje mnoho času a peněz bludnému fantomu a marné snaze stvořiti zázračný stroj, který by z ničeho tvořil všechno a který by ovšem i rozvrátil veškerou důvěru v rozum a vědění. Nehledá se již *„kámen mudrců"* aniž *„elixír životní"*, ale *„perpetuum mobile"* dále straší v pomatených nebo nevzdělaných hlavách.

Řešení úloh.

Z matematiky.

1. Řešil p. *Josef Bára*, VIII. rrg. Kralupy n. Vlt.

Veďme poloměr svírající s osou x úhel a. Tětiva kolmá na tento poloměr protíná kružnici v bodech A a B, jejichž souřadnice jsou

$$A\,(t\cos a - \tfrac{1}{2}d\sin a,\ t\sin a + \tfrac{1}{2}d\cos a),$$
$$B\,(t\cos a + \tfrac{1}{2}d\sin a,\ t\sin a - \tfrac{1}{2}d\cos a),$$

při čemž $t = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}d^2}$ je vzdálenost tětivy od středu kružnice.

Průměty mají souřadnice:

$$A'\,(t\cos a - \tfrac{1}{2}d\sin a,\ n),\qquad B'\,(t\cos a + \tfrac{1}{2}d\sin a,\ -n).$$

Spojnice průmětů má rovnici $y + n = -\dfrac{2n}{d\sin a}(x - t\cos a - \tfrac{1}{2}d\sin a)$

čili

$$dy\sin a = -2nx + 2nt\cos a. \tag{1}$$

Rovnici obálky určíme z rovnice spojnice průmětů a z její derivace podle a

$$dy\cos a = -2nt\sin a \tag{2}$$

vyloučením úhlu a.

Z rovnice (2) dostaneme

$$\operatorname{tg} a = -\frac{dy}{2nt},\quad \sin a = -\frac{dy}{\sqrt{d^2y^2 + 4n^2t^2}},\quad \cos a = \frac{2nt}{\sqrt{d^2y^2 + 4n^2t^2}}$$

a po dosazení do (1)

$$-\frac{d^2y^2}{\sqrt{d^2y^2 + 4n^2t^2}} = -2nx + \frac{4n^2t^2}{\sqrt{d^2y^2 + 4n^2t^2}}.$$

Úpravou obdržíme:

$$4n^2x^2 = 4n^2t^2 + d^2y^2, \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{4n^2} = \frac{t^2}{d^2}.$$

Obálka spojnic průmětů je hyperbola o poloosách t, $2nt/d$.

2. Řešil p. *Jaroslav Štěpán*, VII. r., Lipník n. B.

Různé kořeny rovnic ať jsou x_1, x_2.

Platí $$x_2 - x_1 = p_2 - p_1, \quad x_1/x_2 = q_1/q_2.$$

Řešením obou rovnic obdržíme

$$x_1 = q_1 \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}, \quad x_2 = q_2 \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}.$$

Hledaná rovnice má tvar

$$(q_1 - q_2)^2x^2 + (q_1^2 - q_2^2)(p_1 - p_2)x + q_1q_2(p_1 - p_2)^2 = 0.$$

3. Řešil p. *Josef Bára*, VII. rrg., Kralupy n. Vlt.

Máme-li rovnici n-tého stupně a dokážeme-li, že jí vyhovuje $n + 1$ kořenů, musí býti identicky rovna nule.

Levou stranu dané identity znásobíme společným jmenovatelem

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d),$$

takže bude

$$a^n(b - c)(b - d)(c - d) - b^n(a - c)(a - d)(c - d) + c^n(a - b)(a - d) \,.\, (b - d) - d^n(a - b)(a - c)(b - c) = 0. \quad (1)$$

Budeme ji pokládati za rovnici o neznámé a. Poněvadž $n \leqq 2$, je to rovnice 2. stupně. Je splněna pro 3 hodnoty $a = b$, $a = c$, $a = d$, neboť dosazením těchto hodnot do levé strany (1) se dostane:

$$a = b, \quad b^n(b - c)(b - d)(c - d) - b^n(b - c)(b - d)(c - d) = 0,$$
$$a = c, \quad c^n(b - d)(c - d)(b - c) + c^n(b - d)(c - d)(c - b) = 0,$$
$$a = d, \quad d^n(b - c)(b - d)(c - d) - d^n(d - b)(d - c)(b - c) = 0.$$

Tím je identita dokázána.

4. Riešil p. *L'udovít Bunčák*, VIII. rg., Skalica na Slov.

Spojíme dva body a stred úsečky nimi vytvorenej spojíme s priesečíkom dvoch priamok iducích onými bodmi a majúcich smer asymptôt. Tým dostaneme jeden priemer hyperboly. To isté opakujeme s druhou dvojicou daných bodov a dostaneme druhý priemer. Priesečíkom tých priemerov je stred hyperboly. V jednom bode sostrojme týčnicu, ktorá tvorí na asymptotách úseky, ktorých geom. priemerom je výstrednosť hyperboly.

5. Řešení autorovo.

a) Je-li x Kč amortisační roční anuita, jest

$$x \,.\, R_{50} = 150.000 \text{ Kč} \quad (1)$$
$$R_{50} = 18{\cdot}255\,925 \text{ (při } 5\%), \quad x = 8216{\cdot}51 \text{ Kč}.$$

Čistý výnos 5000 Kč + 8216·51 Kč = 13.216·51 Kč. Hrubá činže (13 216·51 + 2000)/0·50 Kč = 30 433·02 Kč.

b) Je-li x Kč řádná amortisační anuita, y Kč mimořádná = uspořeným daním, přirážkám a dávkám

$$x \,.\, R_{50} + y \,.\, R_6 = 150.000 \text{ Kč}. \quad (2)$$

Hrubá činže během osvobození 5000 + 2000 + x + y, kdežto po vstupu do plné daňové povinnosti (5000 + 2000 +)/0·50, tedy

$$y - x = 7000. \quad (3)$$

Z (1) a (2) plyne y = 11 906·22 Kč, x = 4 906·22 Kč, hrubá činže jest 23 812·44 Kč. Čistý výnos po 6 let 21 812·44 Kč, pak 11 906·22 Kč.

c) Místo rovnice (2) nastoupí

$$x \,.\, R_{50} + y \,.\, R_{25} = 150\,000 \text{ Kč}, \tag{4}$$

z (3) a (4) plyne $y = 8587{\cdot}10$ Kč, $x = 1587{\cdot}10$ Kč, hrubá činže 17 174·20 Kč, čistý výnos po 25 let 15 174·20 Kč, později 6587·10 Kč.

Činí-li daně, přirážky a dávky pouze 35% hrubé činže, bude v případě:

a) Stejný čistý výnos 13 216·51 Kč, hrubá činže tedy

$$\frac{13\,216{\cdot}51 + 2000}{1 - 0{\cdot}35} = 23\,410{\cdot}02 \text{ Kč}.$$

b) Hrubá činže během osvobození $7000 + x + y$, za plné daňové povinnosti $(7000 + x)/(1 - 0{\cdot}35)$. Odtud místo (3) rovnice

$$0{\cdot}65\, y - 0{\cdot}35\, x = 2450. \tag{5}$$

Z (2) a (5) $y = 7126{\cdot}59$ Kč, $x = 3764{\cdot}90$ Kč, hrubá činže 17 891·49 Kč, čistý výnos po 6 let 15 891·49 Kč, pak 8764·90 Kč.

c) Z rovnic (4) a (5) $y = 5787{\cdot}59$ Kč, $x = 3748{\cdot}38$ Kč, hrubá činže 16 535·97 Kč, výnos 14 535·97 Kč po 25 let, později 8748·38 Kč.

Z úlohy je dobře viděti vliv různých faktorů.

6. Řešil p. *Jaroslav Štěpán*, VII. r., Lipník n. B.

$$c' = b \,.\, \cos\alpha - a \cos\beta,\ c'' = b \,.\, \cos\alpha + a \cos\beta,\ c' \,.\, n = c''.$$

Odtud $\quad n \,.\, b\cos\alpha - n \,.\, a\cos\beta = b\cos\alpha + a\cos\beta$

nebo $\quad \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{n+1}{n-1}.$ Ježto $\alpha < \beta$, $\cos\alpha/\cos\beta > 1$,

platí $\quad \dfrac{b}{a} < \dfrac{n+1}{n-1}.$

7. Řešil p. *Jan Grünvald*, VII. čsl. rrg., Ústí n. Labem.

Označíme-li strany čtyřúhelníka a, b, c, d, jest:

$$\frac{abm}{4r} + \frac{cdm}{4r} = P\,(1), \qquad \frac{adn}{4r} + \frac{bcn}{4r} = P(2).$$

Sečtením (1) a (2) a po úpravě obdržíme:

$$(a + c)(b + d) = 4\,Pr\,\frac{m + n}{mn}.$$

Poněvadž také $\quad (a + c) + (b + d) = \dfrac{2P}{\varrho}\,$ a $\,a + c = b + d$,

dostáváme z posledních tří rovnic eliminací stran:

$$P = 4\varrho^2 r\,\frac{m + n}{mn}.$$

8. Riešil p. *Štefan Schwarz*, VIII. rrg., Nové Mesto nad Váhom.

Zo súmerne združených bodov k A_1, A_2, A_3 dľa priamky z, A'_i $(i = 1, 2, 3)$ sostrojíme kružnice k'_i $(i = 1, 2, 3)$, ktoré pretínajú kolmo kružnice k_1, k_2, k_3. Priesečík chordal kružníc k'_1, k'_2, k'_3 je stredom hľadanej kružnice k. Jej polomer sa rovná dĺžke tečny z neho vedenej, k týmto kružniciam.

9. Riešil p. *Ľudovít Bunčák*, VIII. rg., Skalica na Slov.

V trojuholníku platí: $\cos\gamma = \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$, kde γ_1 a γ_2 sú čiastky uhla γ, na ktoré ho delí v_c.

Pretože $\cos\gamma_1 = v/a$, $\cos\gamma_2 = v/b$, $\sin\gamma_1 = m/a$, $\sin\gamma_2 = n/b$, platí

$$\frac{v}{a} \cdot \frac{v}{b} - \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} = \cos\gamma,$$

z čoho $v^2 = mn + ab\cos\gamma.$

Ďalej $a^2 = v^2 + m^2$, $a^2 = (mn + ab\cos\gamma) + m^2$,

alebo $a^2 = m(m + n) + ab\cos\gamma.$

$m + n = c$ a preto $a^2 = mc + ab\cos\gamma$; taktiež $b^2 = nc + ab\cos\gamma$.

10. Řešil p. *Jan Grünvald*, VII. čsl. rrg., Ústí n. Labem.

Podle článku dr. Jana Schustra: Poznámky o rovinných křivkách, Rozhledy, X, str. 109, má rovnice hyperboly, v niž se rozpadá kissoida příslušná k bodu (x_0, y_0) dané hyperboly jako středu transformace kissoidální, tvar

$$\xi^2(a - b)^2 - \eta^2(a + b)^2 + 2\sqrt{2}[\xi(b^2x_0 + a^2y_0) + \eta(b^2x_0 - a^2y_0)] = 0,$$

kde

$$x - x_0 = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y - y_0 = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}.$$

Souřadnice středu této hyperboly určíme derivací podle proměnných ξ a η

$$\xi(a - b)^2 + \sqrt{2}(b^2x_0 + a^2y_0) = 0 \qquad (1)$$

a

$$-\eta(a + b)^2 + \sqrt{2}(b^2x_0 - a^2y_0) = 0. \qquad (2)$$

Sečtením a odečtením (1) a (2) obdržíme pro proměnlivé parametry:

$$x_0 = \frac{\eta(a + b)^2 - \xi(a - b)^2}{2\sqrt{2}b^2} \quad \text{a} \quad y_0 = \frac{-\eta(a + b)^2 - \xi(a - b)^2}{2\sqrt{2}a^2}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$$

a další úpravou dostáváme hledané geometrické místo ve tvaru:

$$\xi^2(a - b)^4 + \eta^2(a + b)^4 - 2\xi\eta(a^4 - b^4) - 8\frac{a^4b^4}{a^2 - b^2} = 0.$$

Podobně pro druhou asymptotu:

$$\xi^2(a + b)^4 + \eta^2(a - b)^4 - 2\xi\eta(a^4 - b^4) - 8\frac{a^4b^4}{a^2 - b^2} = 0.$$

11. Řešil p. *Jan Grünvald*, VII. čsl. rrg., Ústí n. Labem.

Dosazením $a = b$ do rovnice

$$\xi^2(a \mp b)^2 - \eta^2(a \pm b)^2 + 2\sqrt{2}[\xi(b^2x_0 + a^2y_0) + \eta(b^2x_0 - a^2y_0)] = 0$$

dostaneme $2\eta^2 - \sqrt{2}[\xi(x_0 + y_0) + \eta(x_0 - y_0] = 0$ (1)

nebo $2\xi^2 + \sqrt{2}[\xi(x_0 + y_0) + \eta(x_0 - y_0)] = 0.$ (2)

Derivací (1) podle η obdržíme

$$4\eta - \sqrt{2}(x_0 - y_0) = 0$$

čili $x_0 - y_0 = 4\eta/\sqrt{2}.$ (3)

Dělením rovnice rovnoosé hyperboly

$$x_0^2 - y_0^2 = a^2$$

rovnicí (3) dostáváme

$$x_0 + y_0 = a^2\sqrt{2}/4\eta. \qquad (4)$$

Dosazením (3) a (4) do (1) a úpravou dostáváme rovnici vrcholů parabol ve tvaru kubické paraboly

$$\eta^3 + \tfrac{1}{4}a^2\xi = 0$$

a podobně z rovnice (2)

$$\xi^3 + \tfrac{1}{4}a^2\eta = 0.$$

12. Riešil p. *Štefan Schwarz*, VIII. rrg., Nové Mesto nad Váhom.

Súradnice krajných bodov tetivy v elipse sú $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, $(a\cos 3\varphi,\ -b\sin 3\varphi)$.

Rovnica ich spojnice

$$y - b\sin\varphi = \frac{-b\sin 3\varphi - b\sin\varphi}{a\cos 3\varphi - a\cos\varphi}\,(x - a\cos\varphi),$$

dosadením $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$
a upravením

$$\frac{y - b\sin\varphi}{x - a\cos\varphi} = \frac{b\sin^3\varphi - b\sin\varphi}{a\cos^3\varphi - a\cos\varphi}.$$

Z rovnice je jasné, že jej vyhovujú body o súradniciach $x = a\cos^3\varphi$, $y = b\sin^3\varphi$. Deliaci pomer tohoto bodu vôči obom základnym je

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{a\cos^3\varphi - a\cos 3\varphi}{a\cos^3\varphi - a\cos\varphi} = -3$$

Teda tetiva je delená na $\frac{1}{4}$ svojej dĺžky.

Pre hyperbolu sú súradnice koncových bodov

$$(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi),\quad (a\sec\alpha,\ b\operatorname{tg}\alpha).$$

Vzťah medzi oboma, p. autorom vyvodený:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi) + \sin\varphi\,.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \varphi) = 0$$

dá po úprave

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi(1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi)}{\cos\frac{1}{2}\varphi(1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi)}.$$

a ďalej

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha} = -\frac{\sin\varphi(3 + \sin^2\varphi)}{\cos^3\varphi} = -3\operatorname{tg}\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi$$

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 + 3\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} = 4\sec^3\varphi - 3\sec\varphi.$$

Takže rovnica tetivy je:

$$\frac{y - b\operatorname{tg}\varphi}{x - a\sec\varphi} = \frac{b(-3\operatorname{tg}\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi) - b\operatorname{tg}\varphi}{a(4\sec^3\varphi - 3\sec\varphi) - a\sec\varphi}$$

$$\frac{y - b\operatorname{tg}\varphi}{x - a\sec\varphi} = \frac{-b\operatorname{tg}^3\varphi - b\operatorname{tg}\varphi}{a\sec^3\varphi - a\sec\varphi}.$$

Z čoho vidno, že rovnici vyhovuje bod $(a\sec^3\varphi,\ -b\operatorname{tg}^3\varphi)$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{a\sec^3\varphi - a(4\sec^3\varphi - 3\sec\varphi)}{a\sec^3\varphi - a\sec\varphi} = -3.$$

13. Řešil p. *Jan Kazimour*, VI. r., Písek.

Budiž M $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ bod elipsy, N $(a\cos 3\alpha,\ -b\sin 3\alpha)$ druhý průsek tětivy s elipsou, P $(a\cos 9\alpha,\ b\sin 9\alpha)$ další průsek následující tětivy, Q $(a\cos 27\alpha,\ -b\sin 27\alpha)$ opět další atd., až poslední T $(a\cos 3^n\alpha,\ (-1)^n.\sin 3^n\alpha) \equiv M\ (a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$. Jest tedy

$$\cos 3^n\alpha = \cos\alpha,\quad (-1)^n\sin 3^n\alpha = \sin\alpha.$$

Pro sudé n jest

$$3^n\alpha = 2k\pi + \alpha,$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{3^n - 1},$$

pro liché n pak
$$3^n a = 2k\pi - a,$$
$$a = \frac{2k\pi}{3^n + 1},$$
obecně tedy
$$a = \frac{2k\pi}{3^n - (-1)^n}.$$

14. Řešil p. *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X.

Úloha žádá, aby
$$d^2 = a^2 (\cos\varphi - \cos 3\varphi)^2 + b^2 (\sin\varphi + \sin 3\varphi)^2 =$$
$$= 4 (a^2 \sin^2\varphi \sin^2 2\varphi + b^2 \cos^2\varphi \sin^2 2\varphi) = \max.$$
Derivací podle φ dostaneme:
$$a^2 (\sin^2 2\varphi + 4 \sin\varphi \cos 2\varphi) + b^2 (-\sin^2 2\varphi + 4 \cos^2\varphi \cos 2\varphi) = 0,$$
při čemž bylo zkráceno výrazem $\sin\varphi \cos\varphi$, jenž dává maxima ve vrcholech. Zavedeme funkce jednoduchého úhlu a dělíme $\cos^4\varphi$, načež
$$a^2 \operatorname{tg}^4\varphi - 2e^2 \operatorname{tg}^2\varphi - b^2 = 0, \quad \operatorname{tg}^2\varphi_{12} = \frac{e^2 \pm \sqrt{e^4 + a^2b^2}}{a};$$
minus dává kořeny imaginární, takže
$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{e^2 + \sqrt{e^4 + a^2b^2}}.$$
Úhel tětivy s normálou nemá vlastního minima, poněvadž roste stále ve stejném smyslu. Může však míti hodnotu 0 nebo 180°. Poněvadž tětiva jest souměrná k tečně, nastane tento případ, když tečna (i normála totožná s tětivou) má sklon $\pm$ 45°, t. j., když
$$\frac{b}{a} \operatorname{cotg}\varphi = \pm 1, \quad \operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{b}{a}.$$

15. Řešil p. *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X.

Parametrické úhly v koncových bodech buďtež α, β.

Výrazy
$$d^2 = a^2 (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + b^2 (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = f(\alpha, \beta) \text{ a}$$
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{-b/a \operatorname{cotg}\beta + b/a \operatorname{cotg}\alpha}{1 + b^2/a^2 \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta} = \frac{ab \sin(\beta - \alpha)}{a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta} = F(\alpha, \beta)$$
mají býti střídavě konstantní a extrémní. Zjednejme si derivace
$$d \cdot \frac{\delta d}{\delta\alpha} = a^2 \sin\alpha (\cos\beta - \cos\alpha) - b^2 \cos\alpha (\sin\beta - \sin\alpha),$$
$$d \cdot \frac{\delta d}{\delta\beta} = -a^2 \sin\beta (\cos\beta - \cos\alpha) + b^2 \cos\beta (\sin\beta - \sin\alpha),$$
$$\frac{1}{ab} (a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta)^2 \frac{\delta F}{\delta\alpha} =$$
$$= -a^2 \sin\beta [\cos(\beta - \alpha) \sin\alpha + \sin(\beta - \alpha) \cos\alpha] -$$
$$- b^2 \cos\beta [\cos(\beta - \alpha) \cos\alpha - \sin(\beta - \alpha) \sin\alpha] = -a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta,$$
$$\frac{1}{ab} (a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta)^2 \frac{\delta F}{\delta\beta} = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha.$$

Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta a}, & \frac{\delta f}{\delta \beta} \\ \frac{\delta F}{\delta a}, & \frac{\delta F}{\delta \beta} \end{vmatrix}$ vymizí v těchto dvou případech:.

a) $\cos a = \cos \beta$, pročež $\sin a = -\sin \beta$ (extrémy u hlavních vrcholů) zkrácený:

$$\begin{vmatrix} b^2 \sin 2a & , & -b^2 \sin 2a \\ (-(a^2 \sin^2 a + b^2 \cos^2 a), & & a^2 \sin^2 a + b^2 \cos^2 a) \end{vmatrix} = 0.$$

$d_{\min}$ při daném ω a $\omega_{\min}$ při daném d vypočtou se ze vztahu

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{b}{ad} \sqrt{4b^2 - d^2};$$

b) $$\sin a = \sin \beta, \quad \cos a = -\cos \beta.$$

Extrémy při vedlejším vrcholu plynou z rovnice:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{a}{bd} \sqrt{4a^2 - d^2}.$$

16. Řešil p. *Jaroslav Štěpán*, VII. r., Lipník n. B.

Danému svazku o středu S odpovídá zase svazek o středu P. Označíme-li kolmice z P d_k, kolmice z S δ_k ($\delta_k \perp d_k$), pak platí tyto vztahy:

$$\delta_k = \delta_{k-1} \cdot \cos (k, k-1) + d_{k-1} \cdot \sin (k, k-1),$$
$$\delta_{k-1} = \delta_k \cdot \cos (k, k-1) + d_k \cdot \sin (k, k-1).$$

Z obou rovnic obdržíme

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{(d_{k-1} - d_k) \cdot \sin (k, k-1)}{1 + \cos (k, k-1)} = (\delta_{k-1} - \delta_k) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(k, k-1).$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici pro všechny dané indexy nezapomínajíce, že po indexu n následuje index 1, obdržíme vlevo nulu, vpravo součet tvaru

$$\sum_1^n d_k (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(k+1, k) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(k, k-1)) = 0$$

nebo

$$\sum_1^n d_k \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}[(k+1, k) - (k, k-1)]}{\cos \frac{1}{2}(k+1, k) \cos \frac{1}{2}(k, k-1)}.$$

b) Platí:

$$\delta_k + \delta_{k-1} = \frac{(d_k + d_{k-1}) \sin (k, k-1)}{1 - \cos (k, k-1)} = (d_k + d_{k-1}) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(k, k-1).$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici pro všechny dané indexy a sečteme-li ty rovnice, znásobené střídavě čísly $+1$ a -1, bude zase vlevo 0, vpravo pak

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k d_k [\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(k, k-1) - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(k+1, k)] = 0$$

a po úpravě

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k d_k \frac{\sin \frac{1}{2}[(k+1, k) - (k, k-1)]}{\sin \frac{1}{2}(k+1, k) \sin \frac{1}{2}(k-1, k)}.$$

17. Řešil p. *Josef Bára*, VIII. rrg., Kralupy n. Vlt.

Každý člen zmenšíme vždy na nejbližší racionální odmocninu.

$$s_n > 1 + 1 + 1 + 2 + \ldots + [n^2 - (n-1)^2](n-1) + n,$$
$$s_n > 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \ldots + (2n-1)(n-1) + n.$$

Předposlední člen můžeme psát $2[(n-1) + 1](n-1)$.
Podobně ostatní členy:

$$s_n > (2 \cdot 1 + 1)\,1 + (2 \cdot 2 + 1)\,2 + \ldots + n,$$
$$s_n > 2\,\underbrace{[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2]}_{s} + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n.$$

s (vypočteme známým způsobem)

$$= \tfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n) \qquad s_n > \tfrac{1}{6}(4n^3 - 3n^2 + 5n)$$

a tím spíše $\qquad \tfrac{1}{6}(4n^3 - 3n^2 - n) < s_n.$

Členy zvětšíme na nejbližší racionální odmocniny:

$$s_n < 1 + 3.2 + 5.3 + \ldots + [n^2 - (n-1)^2]\,n,$$
$$s_n < (2-1)\,1 + (4-1)\,2 + \ldots + (2n-1)\,n,$$
$$s_n < 2\,\underbrace{(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)}_{s} - (1 + 2 + 3 + \ldots + n),$$
$$s = \tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \qquad s_n < \tfrac{1}{6}(4n^3 + 3n^2 - n).$$

18. Řešil p. *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X.

Upravme

$$(n+1)!\,V = n + 1 - \frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} - \ldots \pm \frac{(n+1)!}{(n+1)!} =$$
$$= \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - \ldots \pm \binom{n+1}{n+1} =$$
$$= 1 - (1-1)^{n+1} = 1, \quad \text{takže } V_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

19. Řešil p. *Jan Kazimour*, VI. r., Písek.

Budiž U pata kolmice spuštěné z bodu Y na P, V pata kolmice spuštěné z bodu A na R. Pravoúhlé trojúhelníky AVX, YUX jsou shodné, neboť $\overline{AX} = \overline{XY}$, $\sphericalangle AXV = \sphericalangle YXU$ (úhly vrcholové). Jest tedy $\overline{AV} = \overline{YU}$, t. j. $\overline{AV}$ rovná se vzdálenosti daných rovnoběžek P, Q.

Z toho konstrukce: Nad. $\overline{AM}$ jako průměrem opišme kružnici k_1, kolem bodu A kružnici k_2 poloměrem rovným vzdálenosti rovnoběžek P, Q. Průsečíky obou kružnic jsou V_1, V_2. Spojnice MV_1, resp. MV_2 je hledanou přímkou R. Úloha má tedy dvě řešení. (Pozn. Řešení jsou možná, pokud se oba kruhy protínají.)

20. Řešil p. *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X.

Podle známé věty o ose úhlu v $\triangle$ jest

$$\frac{b}{c} = \frac{b-m}{c-n} = \frac{m}{n}.$$

Napišme dále cosinovou větu o obou dílčích trojúhelnících

$$h^2 + b^2 - 2hbc \cos \tfrac{1}{2}a = (b-m)^2,$$

$$h^2 + c^2 - 2hc \cos \tfrac{1}{2}a = (c - n)^2$$

a vylučme $\cos \frac{1}{2}a$.

Bude $\quad b\,(n^2 - 2cn - h^2) = c\,(m^2 - 2bm - h^2).$

Vyloučíme-li dále $b = mc/n$, dostaneme

$$c = \frac{h^2 + mn}{2m}, \quad b = \frac{h^2 + mn}{2n}, \quad a = b - m + c - n = \frac{(h^2 - mn)(m + n)}{2mn},$$

$$s = \frac{h^2 (m + n)}{2m}, \quad s - a = \tfrac{1}{2}(m + n), \quad s - b = \frac{h^2 - m^2}{2n}, \quad s - c = \frac{h^2 - n^2}{2m},$$

$$P = \frac{h\,(m + n)}{4mn} \sqrt{(h^2 - m^2)(h^2 - n^2)},$$

$$\sin a = \frac{2h\,(m + n)}{(h^2 + mn)^2} \sqrt{(h^2 - m^2)(h^2 - n^2)},$$

$$\sin \beta = \frac{2hm}{h^4 - m^2n^2} \sqrt{(h^2 - m^2)(h^2 - n^2)}, \quad \sin \gamma = \frac{n}{m} \sin \beta.$$

Z fysiky.

1. Řešil p. *Jan Šejvl*, stud. prům. školy, Jablonné nad Orlicí.

Případ *a*) vyjde jako speciální případu ad *b*). Sloupec vzduchu v rameni o průřezu o_1 mějž výšku a a tlak rovný tlaku barometrickému p_0 měřenému v *cm* Hg.

Klesne-li píst o y, klesne hladina pod ním o $x < y$ a v druhém rameni stoupne rtuť o z takové, že $o_1 x = o_2 z$. Tlak sloupce vzduchového se zvýší:

$$p_0 o_1 a = p o_1 (a - y + x),$$

$$p = \frac{a}{a - y + x} p_0$$

a bude roven tlaku barometrickému zvětšenému o rozdíl výšek hladin rtuti t. j. $x + z$:

$$\frac{a}{a - y + x} p_0 = p_0 + x + \frac{o_1}{o_2} x,$$

$$\left(1 + \frac{o_1}{o_2}\right) x^2 + \left(p_0 + a - y + \frac{o_1}{o_2} a - \frac{o_1}{o_2} y\right) x - y p_0 = 0.$$

Vyhovuje jediné jeden kořen, a to pro znaménko +. Případ ad *a*) vyplyne z tohoto, položíme-li $o_1 = o_2$.

c) Ve všech ramenech ostatních stoupne hladina rtuti o totéž a můžeme tedy uvažovati pouze rameno jedno o průřezu $o' = o_1 + o_2 + \ldots + o_n$ a postupovati jako předešle.

2. Řešení autorovo.

Zvolíme-li základní hladinu, jež všude probíhá rtutí, a jsou-li h_k výšky rtuti v ramenech, platí $p_k + h_k = \text{const}$.

Pošine-li se k-tý píst o y_k, změní se odpovídající hladina rtuti o x_k. Pro nový tlak p'_k platí

$$p_k a_k = (a_k - y_k + x_k)\, p'_k,$$

a zase pro všecka ramena

$$p'_k + h_k - x_k = u,$$

kde u je veličina nezávislá na indexu.

Ježto se objem kapaliny nezměnil, platí:

$$\Sigma o_k (h_k - x_k) = \Sigma o_k h_k,$$

tedy
$$\Sigma o_k x_k = 0.$$

Máme tedy

$$p'_k = \frac{p_k a_k}{a_k - y_k + x_k}, \quad \frac{p_k a_k}{a_k - y_k + x_k} + h_k - x_k = u.$$

Odtud pro x_k platí rovnice:

$$x_k^2 + x_k (a_k - y_k - h_k + u) - p_k a_k - (h_k - u)(a_k - y_k) = 0,$$

tedy

$$x_k = \tfrac{1}{2} \{-(a_k - y_k - h_k + u) \pm$$
$$\pm \sqrt{(a_k - y_k - h_k + u)^2 + 4p_k q_k + 4 (h_k - u)(a_k - y_k)}\}.$$

Dosazením do rovnice o zachování objemu obdržíme pro n rovnici

$$\Sigma o_k \{-(a_k - y_k - h_k + u) +$$
$$+ \sqrt{(a_k - y_k - h_k + u)^2 + 4p_k a_k + 4 (h_k - u)(a_k - y_k)}\} = 0.$$

Hodnota tato pak dovoluje určit x_k a tím vše řešeno.

3. Řešení autorovo.

Je-li v rychlost ve dně, v_1 na horní hladině ve výšce h, dá zákon živé síly

$$\tfrac{1}{2} (v^2 - v_1^2) = hgs,$$

zákon kontinuity $ov = o_1 v_1$.

Odtud

$$v = \frac{o_1 v_1}{o} \quad \text{a} \quad v_1^2 \left(\frac{o_1^2}{o^2} - 1\right) = 2sgh.$$

Je-li v_1 stálé, zní zákon průřezu

$$o_1^2 = \frac{2hgs + v_1^2}{v_1^2} o^2.$$

4. Řešení autorovo.

Klesne-li hladina v horní nádobě o x, stoupne v dolní o $y = o_1 x / o_2$. Objem plynu v horní stoupne z $o_1 a$ na $o_1 (a + x)$, v dolní klesne s $o_2 c$ na $o_2 (c - y)$. Přetlak určující rychlost bude

$$(a - x) sg + p \frac{a}{a + x} - p' \frac{c}{c - y},$$

tedy rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2}{s} \left\{(a - x) sg + p \frac{a}{a + x} - p' \frac{c}{c - y}\right\}}.$$

Tok přestane, když

$$(a - x) sg + p \frac{a}{a + x} - p' \frac{o_2 c}{o_2 c - o_1 x} = 0.$$

5. Řešení autorovo.

Je-li v počátkovém postavení tlak z obou stran přepážky p_1, p_2, bude $p_1 - p_2 = R (\cos \alpha - \cos \beta)$. Otočením trubice o φ otočí se rtuť o ψ. Objem bude $\alpha + \psi - \varphi$ resp. $\beta + \varphi - \psi$, takže $p_1 \alpha = p'_1 (\alpha + \psi - \varphi)$, $p_2 \beta =$

$= p'_2 (\beta + \varphi - \psi)$, tedy bude

$$p'_1 - p'_2 = R\,[\cos(\alpha + \varphi - \psi) - \cos(-\varphi + \beta + \psi)]$$

nebo po dosazení

$$\frac{p_1\alpha}{\alpha + \psi - \varphi} - \frac{p_2\beta}{\beta + \varphi - \psi} = R\,[\cos(\varphi + \alpha - \psi) - \cos(\beta - \varphi + \psi)].$$

Aby byly hladiny stejně vysoko, musí být otočení rtuti $\psi = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Tedy pro stejnost hladin potřebné otočení φ dáno rovnicí:

$$\frac{p_1\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \varphi} - \frac{p_2\beta}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi} = 2R \sin(\alpha + \beta + \varphi) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Ježto teď $\quad p_1 - p_2 = 2R \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha),$

platí konečně

$$\frac{p_1\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \varphi} - \frac{p_2\beta}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi} = (p_1 - p_2)\frac{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}.$$

6. Řešil p. *Jan Kazimour*, VI. r., Písek.

Budiž x vzdálenost pražce od jednoho konce struny, y od druhého. Po odstranění pražce bude

$$x - \Delta x + y - \Delta y = l,$$

při čemž

$$\Delta x = \frac{xP_1}{E}, \quad \Delta y = \frac{yP^2}{E},$$

P_1, P_2 jsou napětí obou částí struny, E modul pružnosti. Podle Taylorova vzorce jsou kmitočty obou částí struny

$$N_1 = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{P_1}{m}}, \quad N_2 = \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{P_2}{m}},$$

značí-li m hmotu jednotky délky struny. Je tedy

$$P_1 = 4m\,N_1^2x^2, \qquad P_2 = 4m\,N_2^2y^2,$$

$$\Delta x = \frac{4m}{E}N_1^2x^3, \quad \Delta y = \frac{4m}{E}N_2^2y^3,$$

$$x + y - \frac{4m}{E}(N_1^2x^3 + N_2^2y^3) = l. \tag{1}$$

Po odstranění pražce má struna napětí P, jež velmi přibližně odpovídá prodloužení délky $l - \Delta x - \Delta y$ na délku l, takže

$$\Delta l = \frac{l\,.\,P}{E} \doteq \frac{4m}{E}(N_1^2x^3 + N_2^2y^3),$$

$$P \doteq \frac{4m}{l}(N_1^2x^3 + N_2^2y^3).$$

Kmitočet celé struny po odstranění pražce jest

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{m}}, \quad \text{takže} \quad N^2 = \frac{1}{l^3}(N_1^2x^3 + N_2^2y^3). \tag{2}$$

Derivujeme rovnice (2) a (1) podle x:

$$(N^2)' = \frac{3}{l^3}(N_1^2x^2 + N_2^2y^2y'),$$

$$1 + y' - \frac{12m}{E}(N_1^2x^2 + N_2^2y^2y') \doteq 0.$$

Položíme-li $(N^2)' = 0$, t. j. $N_1^2x^2 + N_2^2y^2y' = 0$,
jest $\quad 1 + y' = 0$, t. j. $\quad y' = -1; \quad N_1^2x^2 - N_2^2y^2 = 0$,

$$\frac{x}{y} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{3}$$

Utvoříme-li druhou derivaci N^2 podle x a dosadíme-li tam tento výsledek, snadno se přesvědčíme, že nastává minimum N.

7. Řešení autorovo.

Je-li x kolmá vzdálenost drátu od středu, řídí se vodivost drátu rovnicí:

$$y = \frac{1}{\varrho_1\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right)} + \frac{1}{\varrho_2\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right)}.$$

Zavedeme $a^2 - x^2 = u^2$

$$y = \frac{1}{\varrho_1\left(\sqrt{R^2 - a^2 + u^2} - u\right)} + \frac{1}{\varrho_2\left(\sqrt{R^2 - a^2 + u^2} + u\right)}.$$

Buď dále $u = \sqrt{R^2 - a^2}\sin\varphi$

$$y = \frac{1}{\varrho_1\sqrt{R^2 - a^2}\,(\cos\varphi - \sin\varphi)} + \frac{1}{p_2\sqrt{R^2 - a^2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2 - a^2}}\left[\frac{1}{\varrho_1\sqrt{2}\cos(45^0 + \varphi)} + \frac{1}{\varrho_2\sqrt{2}\cos(45^0 - \varphi)}\right].$$

Když ještě zavedeme $\quad y\sqrt{2}\sqrt{R^2 - a^2} = v, \quad 45^0 + \varphi = \psi$,
půjde o extremum funkce

$$v = \frac{1}{\varrho_1\cos\psi} + \frac{1}{\varrho_2\sin\psi}.$$

Odtud

$$v' = \frac{\sin\psi}{\varrho_1\cos^2\psi} - \frac{\cos\psi}{\varrho_2\sin^2\psi} = 0,$$

$$v'' = \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{1}{\cos\psi} + \frac{2\sin^2\psi}{\cos^3\psi}\right) + \frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{1}{\sin\psi} + \frac{2\cos^2\psi}{\sin^3\psi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varrho_1}\,\frac{1 + \sin^2\psi}{\cos^3\psi} + \frac{1}{\varrho_2}\,\frac{1 + \cos^2\psi}{\sin^3\psi}.$$

Zmizení derivace vede na $\quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\varrho_1/\varrho_2}$.
Pro druhou derivaci obdržíme

$$v'' = \frac{1}{\varrho_1}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{\varrho_1^2}}{\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}}\right)\frac{\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)^3}{\varrho_2} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho_2}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{\varrho_2^2}}{\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)^3}{\varrho_1},$$

$$v'' = \frac{\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)^3}{\varrho_1\varrho_2}\cdot\frac{3\left(\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}\right)}{\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}} = \frac{3}{\varrho_1\varrho_2}\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)^3 > 0,$$

tedy jde o minimum

$$v = \frac{1}{\varrho_1}\sqrt{1 + \sqrt[3]{\varrho_1^2/\varrho_2^2}} + \frac{1}{\varrho_2}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}}}{\sqrt[3]{\varrho_1}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}}\left[\frac{1}{\varrho_1\sqrt[3]{\varrho_2}} + \frac{1}{\varrho_2\sqrt[3]{\varrho_1}}\right] = \frac{\left[\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Vodivost je tedy $y = \frac{\left[\sqrt[3]{\varrho_1^2} + \sqrt[3]{\varrho_2^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho_1\varrho_2}\sqrt{2(\varrho_1^2 - a^2)}$, a odpor reciproká hodnota.

8. Řešení autorovo.

Mýdlová bublina poloměru r má přetlak $p - p_0 = 4T/r$.

Když se udělí náboj Q, má energii $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{R}$. Vzroste-li poloměr o dR, bude energie $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{r+dr}$. Tedy produkovaná práce je $dL = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2}dr$. Tato práce odpovídá zvětšení objemu $dv = 4\pi r^2 dr$, je tedy elektrický mechanický tlak $\frac{dL}{dv} = p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi r^4} = \frac{Q^2}{8\pi r^4}$.

Nábojem se zvětší bublina, vnitřní napětí se zmenší, takže

$$p_1 - p_0 = \frac{4T}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$

Při tom platí $\qquad (p_1 - e) R^3 = (p - e) r^3,$

$$\left(p_0 - e + \frac{4T}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4}\right) R^3 = \left(p_0 + \frac{4T}{r} - e\right) r^3$$

nebo $\qquad (p_0 - e) R^4 + 4TR^3 - \left(p_0 + \frac{4T}{r} - e\right) r^3 R - \frac{Q^2}{8\pi} = 0.$

což je rovnice určující poloměr po nabití bubliny.

Při předpokladu, že změna poloměru náboje elektrického je malá, možno psát $R = r + dr$, zanedbat součin Tdr i mocniny dr, čímž vznikne $dr = \frac{Q^2}{3r^3(p_0 - e)}\cdot\frac{1}{8\pi}$. Pro $p_0 = 76\ cm$ Hg, $e = 1{\cdot}26\ cm$ Hg je $dr = = 4{\cdot}4 \,.\, 10^{-7}\ cm$.

9. Řešení autorovo.

Rovnice pro čočku zní: $\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$, a dá se psáti: $\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{1}{g}$. Přibereme $a + b = L$, což vede na $\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{L - a} = \frac{1}{g}$ nebo $a^2 - a[g(n_1 - n_2) + L] + n_1 g L = 0$

$$a_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[g(n_1 - n_2) + L \pm \sqrt{g^2(n_1 - n_2)^2 + 2Lg(n_1 - n_2) + L^2 - 4n_1 gL}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[g(n_1 - n_2) + L \pm \sqrt{g^2(n_1 - n_2)^2 - 2Lg(n_1 + n_2) + L^2}\right].$$

Posun D roven: $D = \sqrt{g^2(n_1 - n_2)^2 - 2Lg(n_1 + n_2) + L^2}$.

Odtud pro g platí: $\qquad g^2(n_1 - n_2)^2 - 2Lg(n_1 + n_2)^2 + L^2 - D^2 = 0,$

$$g = \frac{L(n_1 + n_2) \pm \sqrt{L^2 (n_1 + n_2)^2 - (L^2 - D^2)(n_1 - n_2)^2}}{(n_1 - n_2)^2} =$$

$$= \frac{L(n_1 + n_2) \pm \sqrt{4L^2 n_1 n_2 + D^2 (n_1 - n_2)^2}}{(n_1 - n_2)^2}.$$

Pro výsledek je rozhodující dolní znamení.
Kdyby bylo $n_1 = n_2$, pak v čitateli, rozvineme

$$\frac{L(n_1+n_2) - 2L\sqrt{n_1 n_2}\left[1 + \frac{D^2}{8L^2}\frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 n_2}\right]}{(n_1 - n_2)^2} = \frac{L(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})^2 - \frac{D^2}{4L}\frac{(n_1 - n_2)^2}{\sqrt{n_1 n_2}}}{(n_1 - n_2)^2} =$$

$$= \frac{L - \frac{D^2}{4L}\frac{(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})^2}{\sqrt{n_1 n_2}}}{(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})^2} = \frac{4L^2\sqrt{n_1 n} - D^2\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})^2}{4L\sqrt{n_1 n_2}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})^2} \doteq$$

$$\doteq \frac{4L^2 - 4D^2}{4L \,.\, 4} = \frac{L^2 - D^2}{4L}.$$

10. Řešil p. *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X.
Moment setrvačnosti

$$K = \int_0^r [r \,.\, \omega_1 \,.\, dr \,.\, s_1 \,.\, r^2 + r \,.\, \omega_2 \,.\, dr \,.\, s_2 \,.\, r^2]\, dr = \tfrac{1}{4}\pi^4 (\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2).$$

Vzdálenost těžiště oblouku od středu

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\omega} r^2 \,.\, d\varphi \,.\, \cos\varphi}{\omega r} = \frac{2r \sin \frac{1}{2}\omega}{\omega}.$$

Vzdálenost těžiště výseče od středu $x_1 = \frac{4r \sin \frac{1}{2}\omega}{3\omega}$.

Direkční moment

$$D = \frac{r^2 \omega_1 s_1}{2} \,.\, \frac{4r \sin \frac{1}{2}\omega_1}{3\omega_1} - \frac{r^2 \omega_2 s_2}{2} \,.\, \frac{4r \sin \frac{1}{2}\omega_2}{3\omega_2} = \frac{2r^3}{3}(s_1 \sin \tfrac{1}{2}\omega_1 + s_2 \sin \tfrac{1}{2}\omega_2).$$

Redukovaná délka

$$l = \frac{K}{D} = \frac{3r}{8} \,.\, \frac{\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2}{s_1 \sin \frac{1}{2}\omega_1 + s_2 \sin \frac{1}{2}\omega_2} = \frac{3r}{8} \,.\, \frac{\omega_1 (s_1 - s_2) + 2\pi s_2}{(s_1 - s_2) \sin \frac{1}{2}\omega_1}.$$

Podmínkou minima jest

$$(s_1 - s_2) \sin \tfrac{1}{2}\omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega_1 (s_1 - s_2) \cos \tfrac{1}{2}\omega_1 - \pi s_2 \cos \tfrac{1}{2}\omega_1 = 0,$$

neboli $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\pi s_2}{s_1 - s_2}$, pro $s_1 : s_2 = 1 : 2$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_1 - 2\pi$

neboli $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_2 + \pi.$

Z této rovnice graficky nebo zkusmo

$$\omega_2 = 155^0\, 5', \quad \omega_1 = 204^0\, 55'.$$

Deskriptivní geometrie.

1. Řešil p. *Vl. Bartošek*, VII. r., Olomouc.

Elipsu sestrojíme jako vržený stín koule, při rovnoběžném osvětlení, o poloměru vedlejší poloosy, která dotýká se v ohnisku F roviny elipsy. — V ohnisku F vztyčíme kolmici na rovinu elipsy a na ni naneseme délku b; koncový bod této úsečky je středem koule, jejíž vržený stín na rovinu elipsy je hledaná elipsa. Směr světelných paprsků určíme takto: z bodů M a N opíšeme tečné kužely k té kouli, pak jeden kužel posuneme tak, aby jeho vrchol splynul s vrcholem druhého, čímž dostaneme dva rot. kužely o společném vrcholu, jichž osy nesplývají. Tyto kužely se pronikají v površkách, které udávají směr svět. paprsků. V obecném případě jsou možny 2 pronikové površky, tedy 4 možné svět. paprsky a tedy 4 řešení dané úlohy.

2. Řešil p. *Jan Šejvl*, stud. průmysl. školy, Jablonné nad Orlicí.

Rovina τ vedená vrcholem V rovnoběžně s rov. ϱ jest rovinou tečnou. Opišme kol vrcholu V jako středu plochu kulovou, která na površkách VA, VB stanoví body A', B' a jejíž stopou v rovině τ je kružnice k. Rovina tečná ke kružnici k proložená body A', B' je kolmá k ose plochy. Stopou této roviny v rovině τ je tečna ke kružnici k vedená stopníkem spojnice $A'B'$.

3. Řešil p. *František Slonek*, VII. rg., Telč.

Body A a B nechť jsou středy koulí poloměru r. Pak rovina ϱ, vedená rovnoběžně s rovinou t ve vzdálenosti r, (rovina ϱ leží na téže straně od roviny t jako body A a B) seče obě koule v kružnicích, jejichž společné tečny jsou osami válcových ploch. Celkem 4 řešení.

4. Řešil p. *František Slonek*, VII. rg., Telč.

Na přímce a stanovíme bod A', mající od bodu S vzdál. rovnou SA. Z bodu S spustíme kolmici na a. Osa hyperboloidu jest pak kolmá na rovinu rovnoběžnou se spojnicí AA' a kolmicí. Rotací přímky a kolem této osy vytvoří se hledaná plocha.

5. Řešení autorovo.

Rovina podstavy dotýká se patrně koule K' soustředné s danou koulí K, jejíž poloměr je $r + v$ (neb $v - r$), značí-li r poloměr dané koule. Všechny takové roviny obalují kužel opsaný kouli K', jehož vrchol je v bodě A. Budiž T bod dotyku roviny s koulí K', pak $\overline{AT} = \varrho$ jest poloměr podstavy kužele. Abychom stanovili dotyčný bod na půdorysně, uvažme, že jest vzdálen od středu koule $d = \sqrt{\varrho^2 + (r + v)^2}$, tedy jest na kružnici opsané na půdorysně ze středu S dané koule poloměrem d. Sestrojme nyní libovolnou rovinu σ, jež se dotýká koule K' a uvedené kružnice na π v libovolném bodu a otočme ji až, by procházela bodem A kol průměru koule kolmého k π. Snadno nyní sestrojíme kružnici podstavnou v rovině σ, aby procházela bodem A, dotýkala se půdorysny a měla střed v bodě T. Úloha je obecně čtyřznačná.

Seznam řešitelů úloh.

Josef Bára, VIII. rrg., Kralupy n. Vlt., m.: 1—13, 17—20; *Vladimír Bartošek*, VII. r., Olomouc, dg.: 1—5; *Ľudovít Bunčák*, VIII. rg., Skalica Slov., m.: 4, 6, 7, 9, 19, dg.: 2—4; *Cyril Dřízga*, VI. rg., Místek, m.: 2, 3, 6, 9, 19, 20, f.: 1; *Jan Grünvald*, VII. rrg., Ústí n. L., m.: 1—12, 19, 20; *Jan Hodinář*, V. r., Lipník n. B., m.: 2, 3, 6, 18, 19; *Andělin Hrubý*, VII. *a* r.; Mor. Ostrava, m.: 1, 2, 4, 6, 9, 19, 20, dg.: 1—5; *Jan Kazimour*, VI. r., Písek, m.: 1—15, 17—20, f.: 1—10; *Arnošt Knöpflmacher*, VI. rg., Trenčín, m.: 1—3, 6—9, 12, 16—20; *Štěfan Schwarz*, VIII. rrg., Nové Mesto n. Váhom, m.: 1—15, 17—20, f.: 1, 2, 4, 6, dg.: 2, 3, 4; *František Slonek*, VII. rg., Telč, m.: 4, 8, 19, dg.: 1—4; *Stanislav Synek*, VII. r., Praha II., m.: 9, 19; *Jan Šejvl*, stud. průmysl. školy, Jablonné n. Orlicí, m.: 1—7, 10, dg.: 1—5; *Jaroslav Štěpán*, VII. r., Lipník n. B., m.: 1—9, 11—20, f.: 2—4, 7, 9, 10; *Karel Šilháček*, VII. r., Praha X., m.: 1—20, f.: 1—5, 7, 9, 10.

Udělení cen.

Redakce, přihlížejíc k jakosti a počtu řešení, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem Jednoty československých matematiků a fysiků:

Z matematiky:

První cenu obdrží: *Jan Kazimour*, VI. r. v Písku, druhé ceny *Štefan Schwarz*, VIII. rrg. v Nov. Meste nad Váhom. *Jaroslav Štěpán*, VII. r. v Lipníku.

Z fysiky:

Obdrží cenu *Jan Kazimour*, VI. r. v Písku.

Z deskriptivní geometrie:

Obdrží cenu *Jan Šejvl*, stud. průmysl. školy v Jablonném n. O.

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdrží: *Karel Šilháček*, VII. r. v Praze X, jakož i *Bohdan Kaisler*, žák V. *a* třídy obecné školy chlapecké v Českých Budějovicích, označený správou školy za nejlepšího počtáře.

Doplňky a opravy:

Str. 50 řádek 16 zdola místo řádu čti řádku.
Str. 110 řádek 5 zdola místo Virouneta čti Véronneta.
Str. 110 řádek 4 zdola místo Arano- čti Avanc.
Str. 111 řádek 2 zhora místo okolí čti obilí.
Str. 111 řádek 18 zdola místo za čti a.
Str. 112 řádek 2 zdola místo Mores čti Moses.
