Karel Lerl

Poznámka k metodice obyčejných zlomků

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D285--D286

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121843`

VYUČOVÁNÍ.

Poznámka k metodice obyčejných zlomků.

Karel Lerl, Luhačovice.

Koncem stejnojmenného článku (Č. m. f. r. 69 D, str. 118—122) jsem podotkl, že při výkladu zlomků je potřebí vlastně neustále poukazovati na *princip permanence,* který se má pro tento nový druh čísel prokázati. Použití principu permanence nabízí se vždy tehdy, přecházíme-li v nějakém vědním oboru vůbec od abstraktních pojmů k pojmům obecnějším. Tím je odůvodněno jeho vyskytnutí se v samých základech a počátcích aritmetiky, i neustálé jeho používání ve všech možných odvětvích analyse.

Analytický výklad zlomků dal by se stručně shrnouti (za předpokladu aritmetiky celých čísel) takto:

α) O dvou symbolech $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ pravíme, že jsou si rovny, platí-li $pq' = p'q$. Tato rovnost zůstává v platnosti i tehdy, jsou-li oba zlomky nevlastními. Užití zlomků v algebře co mocnitelů má stejné oprávnění jako čísel celých, avšak jejich zavedení musí se díti s největší pečlivostí, neboť pak teprve lze mluviti o korektní analysi. Rovnosti dvou zlomků lze pak využíti k odvození základních vlastností zlomků.

β) Hodnota zlomku se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li obě čísla v symbolu týmž číslem. Je-li dokázati vztah $\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm}$, jest zde $p' = pm$, $q' = qm$ a nutno v oboru celých čísel stvrditi platnost rovnice $p\,(qm) = q\,(pm)$. Později nutno dokázati, že ku každému zlomku přísluší jeden a jen jeden zlomek ireduktibilní a naopak tomuto nekonečně mnoho (spočetné množství) jemu rovných zlomků.

γ) Sčítání a odčítání definujeme rovnicemi $\frac{a}{b} \pm \frac{a'}{b} = \frac{a \pm a'}{b}$

Snadno se přesvědčíme, že platnost vztahu není v rozporu s pravidly v oboru celých čísel. Stačí položiti $a = bq$, $a' = bq'$ (kde q, q' jsou celá čísla) a máme $a \pm a' = b\,(q \pm q')$, t. j. $q \pm q' = \frac{a \pm a'}{b}$.

Při slučování zlomků vůbec počínáme s uváděním na spol. jmenovatele. Druhý případ je proveden za předpokladu $a > a'$.

δ) Násobení je udáno definiční rovnicí: $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$. I zde není rozporu s oborem celých čísel, jak snadno nahlédneme. Stačí jen klásti $a = bq$, $a' = b'q'$ a plyne $aa' = (bb')\,qq'$, z čehož $qq' = \frac{aa'}{bb'}$.

Dělení je definováno rovnicí $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}$ a i zde, klademe-li $a = bq$, $a' = b'q'$, $q : q' = q''$ (kde q, q' a q'' jsou celá čísla), lze psáti $q = q'q''$, $a = bq'q''$, z čehož $ab' = bb'q'q'' = a'bq''$ a tedy $q'' = \frac{ab'}{ba'}$. I zde je patrno, jak dlouze bylo nutno provésti úvahu, aby byla zajištěna platnost početních výkonů v novém oboru bez změny.

ε) Při některých výkonech dlužno poukázati na invarianci sledu či pořadí jednotlivých členů. Za předpokladu, že zlomky jsou uvedeny na spol. jmenovatele, lze psáti $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a - a' + a''}{b}$, poněvadž $\frac{a}{b} + \frac{a''}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a + a'' - a'}{b}$; t. j. při slučování členů několika polynomů lze voliti zcela libovolné pořadí. Stejně je tomu při výkonu násobení, kde pořad činitelů lze též libovolně zaměniti jako při celých číslech.

ζ) Konečně třeba se zmíniti o násobení mnohočlenu mnohočlenem, jež lze nahraditi násobením mnohočlenu členem. Shrneme-li kladné členy ve výraz A, záporné ve výraz B, je mnohočlen udán ve tvaru $A - B$. Zmíněné násobení je pak vyjádřeno rovnicí $(A - B)\,f = Af - Bf$. Tím získáme pravidlo o násobení mnohočlenu mnohočlenem, dlužno však jen připomenouti pravidla o násobení relativních čísel. Pro dva polynomy tvaru $P = A - B$, $Q = A' - B'$ pak platí $PQ = (A - B)\,(A' - B') = AA' - AB' - A'B + BB'$.

Principu permanence užíváme i jindy, přecházíme-li k pojmům abstraktnějším. Tak od celých kladných čísel přecházíme k číslům záporným a lomeným, od čísel racionálních k iracionálním, od čísel reálných k číslům komplexním, od čísel algebraických k číslům transcendentním, atd. Ve vyšší analysi pak některé poznatky o konvergentních řadách můžeme zobecněním přenésti na řady divergentní zavedením několika nových pojmů; stejným způsobem získá se mnoho popudů i při budování teorie asymptotických řad. Další obory jsou pak v teorii funkční a integrálů.
