Vladimír Kořínek

Návod ke studiu algebry pro začátečníky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D25--D39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121837

Návod ke studiu algebry pro začátečníky.

Vladimír Kořínek, Praha.

Tento článek jest určen za prvé těm, kteří se chtějí seznámiti se základními poznatky algebry, a dále těm, kteří se rozhodli obnoviti a doplniti si své vědomosti z elementární algebry. Program studia, jak je doleji sestaven, obsahuje nejdůležitější věci z algebry, jichž znalost je potřebí při studiu nějaké matematické disciplíny neb v přírodních a technických vědách. Mimo zmíněný minimální program pojednává článek ještě o učebnicích, z nichž možno tyto věci nastudovat.

Program studia. Stručně možno shrnouti takový minimální program pro začátečnické studium algebry takto:

I. Základní pojmy algebry.

Pojem tělesa a oboru integrity. Reálná a komplexní čísla a jich vlastnosti. Polynomy jedné proměnné (neurčité). Polynomy více proměnných (neurčitých). Dělitelnost polynomu, největší společný dělitel polynomu. Reducibilita a ireducibilita polynomu jedné proměnné (neurčité).

II. Lineární algebra.

Teorie determinantu: Definice a základní vlastnosti determinantu. Subdeterminanty a doplňky libovolného řádu. Hodnost determinantu. Věta Laplaceova. Věta o násobení determinantu. Reciproký determinant.

Teorie lineárních forem: Formy lineárně závislé a nezávislé. Souvislost s hodností matice těchto forem.

Řešení lineárních rovnic: Cramerovo pravidlo. Řešení homogenní i nehomogenní soustavy m rovnic o n neznámých. Počet lineárně nezávislých řešení dané homogenní soustavy.

Teorie matic: Pojem matice. Determinanty z matice. Hodnost matice. Sčítání a násobení matic. Adjungovaná matice. Determinant adjungované matice.

III. Teorie algebraických rovnic.

Symetrické funkce: Definice. Elementární symetrické funkce. Hlavní věta o symetrických funkcích. Výpočet dané symetrické funkce pomocí elementárních symetrických funkcí. Potenční součty a formule Newtonovy. Diskriminant polynomu jakožto symetrická funkce kořenů.

Základní věta algebry.

Rozklad v kořenové činitele. Vícenásobné kořeny, jich definice pomocí rozkladu v kořenové činitele a pomocí derivací polynomu. Diskriminant rovnice.

Řešení algebraických rovnic: Rovnice pro dělení kruhu a její goniometrické řešení. n-té kořeny z jedničky. Primitivní n-té kořeny z jedničky a jich počet. Eulerova funkce φ. Rovnice binomické. Pojem algebraického řešení rovnic. Algebraické řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně. Casus irreducibilis rovnice 3. stupně a jeho goniometrické řešení. Rovnice reciproké.

Numerické řešení rovnic o reálných koeficientech: Jednoduché odhady pro absolutní hodnoty kořenu pomocí koeficientu rovnice. Separace kořenu. Věta Budan-Fourierova. Descartesova a Sturmova. Hornerovo schema a praktické provádění separace kořenu. Metoda Newtonova pro přibližný výpočet kořenů. Regula falsi. Praktický výpočet kořenu podle těchto metod.

IV. Kvadratické formy.

Bilineární a kvadratická forma. Transformace bilineárních a kvadratických forem. Hodnost bilineární a kvadratické formy. Zákon setrvačnosti pro kvadratické formy.

V. Základy číselné teorie.

Dělitelnost v oboru integrity celých racionálních čísel. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek. Prvočíslo. Jednoznačný rozklad celého čísla v součin prvočísel. Čísla nesoudělná. Eulerova funkce φ a její vlastnosti. Lineární kongruence. Věta Fermatova. Věta Wilsonova.

Učebnice elementární algebry. Uvedu nyní stručně knihy, z nichž možno takto vytčený program studovat. Z učebnic algebry jsou to především dvě knihy: jednodílná kniha Bieberbachova: Vorlesungen über Algebra, (1) a (2)[1]) a dvoudílná kniha Perronova: Algebra, (5) a (6). Náš program lépe se přimyká ke knize Bieberbachově, neboť Perron obsahuje celé velké partie týkající se teorie eliminace (řešení a vlastností soustav algebraických rovnic o více neznámých), která není zahrnuta do hořejšího programu. Zvláště ve svém 5. vydání jsou Bieberbachovy Vorlesungen knihou moderně psanou. Dukazy jednotlivých vět jsou v této knize podány v nejjednodušším tvaru, jsou, pokud to možno, ryze algebraické a jsou provedeny, pokud to lze, logickou úvahou. Vadou knihy je však, že dukazy jsou často příliš stručné, ba možno říci, že jsou někdy i nedbale odbyty, takže začátečník přichází při studiu často do rozpaků a některým místum jen těžko porozumí. Perronova Algebra není tak moderně psaná, algebraické stanovisko není v ní tak uplatněno, dukazy jsou často příliš a zbytečně složité. Perron pracuje rád při dukazech výpočtem, někdy i velmi složitým, místo logickou úvahou. Zato vše je provedeno velmi pečlivě a do všech podrobností, takže se čtenář neocitne na rozpacích. Leccos bylo zlepšeno a opraveno v 2. vydání Perronovy knihy (6). Celkový charakter knihy však tak, jak je zde vylíčen, přirozeně zůstal. Souhrnně možno tedy říci toto: Čtenář, který se nebojí překážek a dovede samostatně do-

---

[1]) Čísla v kulatých závorkách za názvy knih odkazují na seznam citované literatury na konci článku, kde čtenář najde všechny bibliografické údaje.

myšlet stručně provedené důkazy, dojde snáze a rychleji k zde vytčenému cíli studiem knihy Bieberbachovy.

Ostatní známé učebnice algebry nehodí se ke studiu naznačeného programu. Tak na příklad první díl známé Weberovy: Lehrbuch der Algebra (10), který byl po generace standartní knihou pro algebru, je jednak psán ze stanoviska dnes již zastaralého, jednak obsahuje mnoho látky, která překračuje rámec zde stanovený. Vybírat pak z této knihy partie, které do tohoto rámce patří, je téměř nemožno. Kniha Roberta Fricke: Lehrbuch der Algebra (4) je ve svém prvním díle v podstatě jen málo upraveným prvním dílem Algebry Weberovy. Učebnice moderní abstraktní algebry, jako je kniha Hauptova, Hasseova neb van der Waerdenova, nehodí se rovněž pro naše účely. V těchto knihách jde o abstraktní, ryze algebraické vybudování teorie, z níž jen velmi malá část patří do našeho programu, a zůstává v nich naopak stranou mnoho věcí, které ze stanoviska abstraktní algebry patří do funkční teorie polynomu, jako je základní věta algebry, odhady pro absolutní hodnotu kořenu pomocí koeficientu rovnice, separace kořenu, numerické řešení rovnic, goniometrické řešení některých rovnic a věci tomu podobné. Tyto věci jsou však právě pro začátečníka duležité. Je nutno, jednak aby se naučil prakticky počítat, jednak aby se obeznámil blíže s vlastnostmi tělesa všech komplexních čísel a s vlastnostmi polynomů v tomto tělese, neboť, když pomineme vlastní podrobné studium algebry, bude právě při dalším studiu matematiky tyto věci nejvíce potřebovat.

Při tomto výčtu knih upozorňuji ještě, že lineární algebru možno též velmi dobře studovat z české knihy: Základy teorie determinantu a matic a jich užití od B. Bydžovského (3).

Ukáži nyní, jak lze studovati látku obsaženou v hořejším programu podle knihy Bieberbachovy i podle knihy Perronovy, aby si čtenář mohl vybrat tu z nich, která se mu lépe líbí, neb po případě tu, kterou má po ruce. Učiním to tím, že zde sestavím ty partie uvedených knih, které možno při studiu vynechat.

Bieberbachovy Vorlesungen über Algebra. Počněme s knihou Bieberbachovou. Za podklad vezmu 5. vydání této knihy (2).[2]) Jednotlivé paragrafy této knihy budu označovati stejně, jak to dělá Bieberbach, třemi čísly, z nichž první značí oddíl (Abschnitt), druhé kapitolu, třetí paragraf. Pro kontrolu uvedu vždy stručný obsah vytčené části.[3])

[2]) IV. vydání (1) se celkem liší v částech duležitých pro náš program jen velmi málo od 5. vydání. V 5. vydání je hlavně rozšířen a přepracován úvod tvořící 1. a 2. kapitolu 1. oddílu (Abschnitt) a pak 2. kapitola 2. oddílu, jednající o řešení soustav lineárních rovnic. Nutno upozorniti, že tato 2. kapitola 2. oddílu je ve 4. vydání naprosto nedostatečná zvláště pokud se týče řešení soustavy nehomogenních rovnic. V 5. vydání věc byla opravena.

[3]) Mnou uvedený obsah není vždy překladem názvu příslušného paragrafu, kapitoly neb oddílu.

Není-li nic jiného řečeno, znamená to, že každý paragraf, který je pojatý do níže uvedeného seznamu, možno vynechat celý. Abych umožnil studium i těm, kteří mají po ruce 4. vydání Bieberbachovy knihy, uvedu vždy za údaji paragrafu neb stránek 5. vydání v hranatých závorkách příslušné údaje pro 4. vydání, pokud se tyto údaje liší od údajů pro páté vydání.

1. *Oddíl.* Základní vlastnosti algebraických rovnic.

1, 2, 9 [V 4. vyd. není.] Dukaz, že těleso komplexních čísel je jediné nadtěleso hyperkomplexních čísel nad tělesem čísel reálných.

1, 4, 1 *Poznámka.* Dukaz základní věty algebry v tomto § provedený je příliš stručný. Podrobně je tento dukaz proveden v knize O. Schreier u. E. Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. (9) § 17, str. 221—230. Viz též § 16, str. 211—221, kde jsou dokázány některé věty z § 17.

1, 4, 2 Dukaz základní věty algebry pomocí věty Rouchéovy z funkční teorie. Dukaz věty Rouchéovy jest jen naznačen. Proto bude lépe, když čtenář, který nezná větu Rouchéovu z funkční teorie, tento dukaz vynechá.

1, 5, 9 [V 4. vyd. není.] *Poznámka.* Dukaz základní věty algebry zde
1, 5, 10 provedený, v podstatě moderně upravený 2. dukaz Gaussuv, je proveden velmi podrobně v 5. vydání Perronovy Algebry (6), I. díl, § 50, str. 242—248. Viz též § 49, str. 241—242, neboť v § 50 je potřebí věty 125. § 1, 5, 9 a § 1, 5, 10 možno vynechat, byl-li dobře prostudován dukaz z § 1, 4, 1 neb jiný dukaz základní věty.

2. *Oddíl.* Lineární algebra a kvadratické formy.

2, 2 *Poznámka.* Ve 4. vydání není výklad o řešení lineárních rovnic zdařilý. Zvláště nedostatečný je výklad o řešení soustavy nehomogenních rovnic. Proto čtenář, který studuje podle 4. vydání, učiní lépe, když tuto partii nastuduje jinde, na př. v Bydžovského Základech teorie determinantů (3), § 4, odst. 19, a § 6. V 5. vydání byla tato partie úplně přepracována, takže vyhovuje.

2, 3, 3 Zevšeobecnění věty o součinu dvou determinantu.

2, 3, 4 Vynechat konec § od str. 88 [72] nahoře, jednající o subdeterminantech adjungované matice.

2, 3, 6 Polosymetrické determinanty.

2, 4, 5 *Poznámka.* Dukaz věty, že lineární transformací se nemění hodnost kvadratické formy, užívá v 4. vydání větu o determinantech součinu dvou matic z § 2, 3, 3. Hoření věta je sice bezprostředním dusledkem věty z § 2, 3, 3, avšak tato věta sama a její dukaz jsou dosti složité. Proto autor nahradil v 5. vydání onen dukaz jiným, který je založen na teorii lineárních rovnic. Dukaz je však příliš stručný, takže začátečník mu těžko porozumí. Proto je tento dukaz v dodatcích k tomuto článku úplně proveden. Kdo studuje podle 4. vydání, musí si ovšem prostudovat § 2, 3. 3. pak mu dukaz hoření věty nebude činit potíží.

2, 4, 7 *Poznámka.* Dukaz zákona setrvačnosti kvadratických forem je rovněž příliš stručný. Je též v dodatcích úplně proveden.

2, 4, 8 Subdeterminanty positivní kvadratické formy.

2, 4, 9 Ortogonální transformace.

2, 4, 10 Hermitovy formy.

3. *Oddíl.* Symetrické funkce.

3, 1, 3 *Poznámka.* V dukaze Newtonových vzorcu pro potenční součty je napsán ihned výsledek dělení výrazu $\frac{f(x)}{x - x_i}$ vyskytujících se v rov. (5), str. 121 [103]. Toto dělení je úplně provedeno v knize H. Weber: Lehrbuch der Algebra, 1. Band. (10). § 46. str. 156—158. Viz též § 4, str. 32—34. odkudž je potřebí vzorce (8) na str. 34.

3, 1, 8 Druhý dukaz hlavní věty o symetrických funkcích.

3, 1, 13 Zevšeobecnění jisté formule pro diskriminant.

3, 2, 2 až 3, 2, 5 Tschirnhausova a Jerardova transformace.

4. *Oddíl.* Numerické řešení rovnic.

4, 1, 2 Cauchyovo pravidlo pro odhad absolutní hodnoty kořenu rovnice.

4, 1, 7 Z tohoto § vzíti jen Hornerovo schema, t. j. 2. a 3. odstavec tohoto § na str. 152 dole a str. 153 nahoře, [135]. Lillovou grafickou metodu vynechat.

4, 1, 9 Nomografické řešení rovnice.

4, 1, 11 a 4, 1, 12 *Poznámka.* Regula falsi a metoda Newtonova je v knize vyložena jen velmi zběžně. Obě metody budou vyloženy v tomto časopise později ve zvláštním článku.

4, 1, 13 Lagrangeova metoda řetězových zlomku pro numerické řešení rovnic.

4, 2, 6 Druhý zpusob konstrukce Sturmových řetězcu.

4, 2, 9 Sekulární rovnice.

4, 2, 10 Sestrojení Sturmových řetězcu pomocí kvadratických forem.

4, 3 Počet kořenu rovnice v oborech komplexní roviny. Vynechat celou kapitolu.

4, 4 Gräffeova metoda. Vynechat celou kapitolu.

4, 5 Věty o poloze kořenu v komplexní rovině. Vynechat celou kapitolu.

5. *Oddíl.* Algebraické řešení rovnic.

5, 5 Cyklické rovnice. Vynechat celou kapitolu.

5, 6 Algebraické řešení rovnice pro dělení kruhu. Vynechat celou kapitolu.

5, 7 Grupy substitucí. Vynechat celou kapitolu.

5, 8 Galoisova teorie. Vynechat celou kapitolu.

Anhang. Řetězové zlomky. Vynechat celý.

Perronova Algebra. Za podklad vezmu 2. vydání (6), které se liší od 1. vydání (5) dosti značně.[4]) Opět podám seznam partií, jež při studiu možno vynechat. Protože se obě vydání značně liší, uvedu všude za údaji paragrafů a stránek 2. vydání v hranatých závorkách příslušné údaje pro 1. vydání. V každém díle Perronovy Algebry jsou paragrafy číslovány jednotně od začátku až do konce, takže stačí udávat jen paragrafy. Jinak se budu říditi stejnými zásadami jako při knize Bieberbachově.

Při studiu možno vynechat tyto partie[5]):

I. díl. Základy.

2. *kapitola.* Funkční vlastnosti polynomů.

§ 14 [13] Diferenční počet. Aritmetické řady.

§ 17 [16] Vzíti jen interpolační formuli Newtonovu (16) [(15)] a Lagrangeovu (18) [(17)]. Důkaz formule Newtonovy je obsažen v oddíle III. tohoto §, v části od začátku oddílu na str. 73 [73] až na konec toho odstavce na str. 74 [74], který právě obsahuje formuli (16) [(15)]. Důkaz formule Lagrangeovy je v prvním odstavci oddílu IV. na str. 75 [75].

3. *kapitola.* Determinanty a lineární algebra.

§ 21 [20] Derivace determinantu, jehož prvky jsou polynomy.

§ 26 [24] *Poznámka.* Ze dvou důkazů součinové věty pro determinanty je lépe vzíti důkaz druhý, obsažený v oddílu II.

§ 27 [25] V tomto § vynechat celý oddíl IV. na str. 122 [124] obsahující teorii Hermitových forem.

§ 28 [26] Závislé polynomy.

---

[4]) V 1. díle je to především 1. kapitola, jednající o základních pojmech, která byla v 2. vydání přepracována a zlepšena. Byla rozšířena o 1 paragraf. V 3. kapitole byl přidán § 25 o lineárních transformacích. Tím byl nejen vyložen důležitý pojem, nýbrž i usnadněn výklad o formách v následujících paragrafech. V 5. kapitole byly upraveny paragrafy jednající o eliminaci a přidán § 47 o resultantu homogenních polynomů. V 6. kapitole byl upraven hlavně důkaz základní věty algebry, který byl značně zjednodušen. V 1. vydání bylo použito při tomto důkaze dosti složitých vlastností resultantu dvou polynomů o dvou proměnných, jichž však není nikterak třeba. Dále byla v této kapitole upravena partie jednající o soustavách rovnic. Mimo jiné byl přidán § 56 a § 58. Rovněž 2. díl byl značně přepracován, ale pro studijní program nahoře vytčený přepracování nemá velkého významu.

[5]) Není-li u jednotlivých paragrafů výslovně něco jiného uvedeno, znamená to, že možno vynechat paragraf celý.

§ 29 [27] Funkcionální determinanty.

Poznámka. Z lineární algebry není v knize vubec probrána partie o závislosti lineárních forem. Celá tato teorie plyne ovšem jako speciální případ z vět § 28 [26] a § 29 [27], dosadíme-li tam místo obecných polynomů lineární formy. Je však snadnější nastudovati tuto teorii jinde, na př. v Bydžovského Základech teorie determinantů (3).

4. *kapitola.* Symetrické funkce.

§ 30 [28] Zde vynechat oddíl III., str. 143—145 [150—152], jednající o nezávislosti symetrických funkcí.

§ 31 [29] První dukaz hlavní věty o symetrických funkcích vynechat. Je lépe vzíti až dukaz druhý v § 33 [31].

§ 32 [30] Zde vynechat oddíl II., str. 151—154 [159—162], obsahující Waringovu formuli pro potenční součty, a dále z oddílu III., str. 155 [164] část od odstavce za formulí (26) [(30)] až na konec §, jednající rovněž o Waringově formuli.

Poznámka. V § 32 v oddíle I. užívá se formule (9) z § 17, který byl vynechán. Je proto třeba na tomto místě si přečísti z § 17 oddíl I. V 1. vydání je důkaz proveden bez použití § 16, který odpovídá § 17 2. vydání.

§ 33 [31] *Poznámka.* § 33 [31] obsahuje druhý dukaz hlavní věty o symetrických funkcích. Tento dukaz vzíti. V 2. vydání je poněkud zjednodušen. Při tom věta 70. [70] je nejdříve dokázána pomocí vět 68 [68] a 69 [69] z § 31 [29], který byl vynechán. Za prvním dukazem je však důkaz druhý, přímý, který uvedených vět nepoužívá. Po prostudování tohoto § vrátiti se k § 31 [29] a prostudovati metodu výpočtu symetrických polynomů vyloženou v oddíle II. str. 149—150 [156—157].

§ 34 [32] *Poznámka.* Tento § obsahuje další metody pro výpočet symetrických polynomů, z nichž nejdůležitější jsou metody vyložené v 4. příkladě oddílu II [I] str. 161 [171].

§ 35 [33] Zde možno vynechat oddíl II., obsahující některé příklady, až na část IIC na str. 166—167 [176—177], obsahující vyjádření diskriminantu pomocí základních symetrických funkcí.

5. *kapitola.* Dělitelnost a reducibilita polynomů.

§ 39 [37] Dělitelnost a reducibilita polynomů více proměnných.
§ 40 [38] Největší společný dělitel polynomů více proměnných.
§ 41 [39] Kriteria reducibility a ireducibility.
§ 42 [40] Lomené racionální funkce více proměnných.
§ 43 [41] V tomto § vynechat podrobné vlastnosti resultantu, obsažené v části od věty 117 [117] na str. 208 [220] až do konce §.

§ 44 [42] V tomto § vynechat oddíl II., str. 213—215 [226—228], obsahující některé speciální vlastnosti diskriminantu.

§ 45 [43] Resultanty polynomu více proměnných.

§ 46 [44] Další vlastnosti resultantu polynomu více proměnných.

§ 47 [V 1. vyd. není.] Resultant homogenních polynomu.

6. *kapitola.* Kořeny algebraických rovnic.

§ 48 [45] *Poznámka.* V tomto § na str. 232 [248] je odkaz na větu 108 [108] z § 41 [39], která byla vynechána. Věc není však podstatná a nebude činit potíží při dalším studiu. Viz též poznámku k § 50 [47, 48].

§ 49 [46] *Poznámka.* Viz poznámku k § 50 [47, 48].

§ 50 [47, 48] *Poznámka.* Tento § obsahuje dukaz základní věty algebry. Je zde podán 2. Gaussuv dukaz v moderní úpravě. V 2. vydání (6) je velmi pěkně vyložen. Výklad v 1. vydání je však příliš složitý. Užívají se tam vlastnosti resultantu dvou polynomu o dvou proměnných z § 41, které se dostanou složitými úpravami determinantu. Užití resultantu v důkaze je však úplně zbytečné. Proto se dukaz tak, jak je podán v 1. vydání v § 47 a v § 48 ke studiu nehodí. Jiný dukaz základní věty algebry, jednoduchý a velmi pěkně vyložený, je obsažen v knize: O. Schreier u. E. Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. 1. díl (9), § 17, str. 221—229. Viz též § 16, str. 211—221. Čtenář, který si nastuduje dukaz základní věty algebry ze Schreiera, může vynechat z § 48 [45] II., III. a IV. oddíl a dále § 49 [46] a § 50 [47 a 48].

§ 51 [49] V tomto § vynechat oddíly I. a II. str. 248—252 [266—270], jednající o isomorfismech rozkladových těles, a vzíti jen oddíly III. a IV., jednající o vícenásobných kořenech.

§ 52 [50] *Poznámka.* Věta 133 [134] na str. 256 [275] má dva důkazy. První, který používá vlastností resultantu z § 43 [41], vynechat a vzíti jen druhý, který začíná na str. 257 [275] za formulí (8).

§ 53 až § 58 [§ 51 až § 54] jednající o transformaci rovnic a o řešeních soustav rovnic o více neznámých vynechat.

II. díl. Teorie algebraických rovnic.

1. *kapitola.* Separace kořenu. Numerické řešení rovnic.

§ 1 [1] Zde vynechat oddíl III. str. 4—5 [4—6]. jednající o vztazích mezi počtem kořenů rovnice v daném intervalu a hodností jisté kvadratické formy.

§ 4 [3] Sekulární rovnice.

§ 5 [V 1. vyd. není.] Ortogonální substituce a transformace kvadratické formy na hlavní osy.

§ 6 [5] V tomto § vzíti jen oddíl I., jednající o odhadu absolutní hodnoty kořenu rovnice pomocí jejích koeficientu. Ostatní části od počátku oddílu II., str. 33 [23] obsahující ruzné věty o odhadech absolutní hodnoty kořenu pro rovnice o speciálních koeficientech, vynechat.

§ 7 [V 1. vyd. není.] Jakost kořenu charakteristické rovnice matice.

§ 8 [6] V tomto § vynechat konec § od počátku oddílu III. na str. 43 [28], obsahující ruzné věty o komplexních kořenech rovnice.

§ 9 [7] V oddílu I. vynechat konec od 1. odstavce na str. 48 [33] až do konce oddílu, jednající o komplexních kořenech rovnice. Oddíl II. o Newtonově metodě vzíti. Oddíl III., obsahující použití Newtonovy metody na soustavu rovnic o více neznámých, vynechat. Oddíl IV. o regule falsi vzíti. Výklad o metodě Newtonově a o regule falsi je jen velmi zběžný. Obě metody budou vyloženy v tomto časopise později ve zvláštním článku.

§ 10 [8] Metody D. Bernoulliho a Gräffeho pro přibližný výpočet kořenu.

2. *kapitola*. Řešení algebraických rovnic až do 4. stupně a reciproké rovnice.

§ 14 [12] Vzíti jen 1. metodu pro řešení rovnice 4. stupně, vyloženou v oddíle I. Ostatní metody od oddílu II na str. 75 [61] až do konce § vynechat.

§ 15 [13] Řešení soustavy 2 kvadratických rovnic o 2 neznámých.

§ 16 [14] Tschirnhausova transformace.

3. *kapitola*. Teorie grup. Vynechat celou kapitolu.

4. *kapitola*. Galoisova teorie. Vynechat celou kapitolu.

5. *kapitola*. Rovnice 5. stupně. Vynechat celou kapitolu.

Poznámka. Mimo partii o nezávislosti lineárních forem nejsou v knize probrány ještě základy teorie čísel. Proto čtenář, který studuje algebru podle této knihy, musí si teorii čísel nastudovati odjinud. Viz níže uvedené knihy.

Lineární algebra. Lineární algebru možno též studovat z české knihy Bohumila Bydžovského: Základy teorie determinantů a matic a jich užití (3). V knize je vše velmi zevrubně vyloženo a ke každému paragrafu jsou připojeny příklady na cvičení. Z našeho vytčeného programu vymykají se tyto paragrafy a lze je tudíž vynechat:

I. § 10. Determinanty souměrné a polosymetrické.
I. § 11. Geometrické aplikace.
II. § 4. Formy kvadratické II. (Ortogonální transformace.)

Základy číselné teorie. Základy číselné teorie, jak jsou sestaveny v hořejším programu, jsou obsaženy v 5. oddílu, 4. kapitole Bieberbachových Vorlesungen über Algebra (1) a (2). Lze je však též studovat z české knihy: Karel Rychlík: Úvod do elementární teorie číselné (7). Tato knížka je sice psána velmi koncisně, ale důkazy jsou provedeny velmi přesně a úplně. Rovněž každý nový pojem je přesně definován, což vše podstatně usnadňuje studium. Do našeho rámce patří první dvě kapitoly knížky. Při studiu možno vynechat v 1. kapitole, jednající o dělitelnosti a o prvočíslech, § 15 až § 18. V 2. kapitole, jednající o kongruencích, možno vynechat tyto paragrafy: § 22, § 25 až § 27, § 33. Vynechané paragrafy obsahují velmi zajímavou látku, takže jsem přesvědčen, že čtenář zajímající se o matematiku si je se zájmem přečte. Rovněž 3. kapitola jednající o g-adických zlomcích je velmi zajímavá. Ačkoliv nepatří do našeho programu, má velký význam pro učitele středoškolské, neboť je v ní vyložen teoretický podklad psaní čísel v desetinné soustavě.

Jinou malou knížkou pro studium základů teorie číselné je knížka Arnolda Scholze: Einführung in die Zahlentheorie (8). Do našeho programu patří tyto partie: Celá 1. a 2. kapitola a z 3. kapitoly § 12 až § 18. Látka v těchto kapitolách obsažená je poněkud rozsáhlejší než látka vytčená v našem programu. Jednotlivé paragrafy této knížky souvisí však tak navzájem, že nelze stanoviti vhodnější výběr.

Dodatky. Vyložím zde podrobně dva důkazy z teorie kvadratických forem z Bieberbachových Vorlesungen über Algebra (1) a (2), protože jsou to důkazy dvou velmi důležitých vět a jsou v knize příliš stručné, takže by jim začátečník těžko porozuměl. Při tom budu užívati veskrze značení knihy.

První dodatek se týká § 2, 4, 5, vydání 5. knihy (2). Ve 4. vydání je důkaz jiný. Jde o tuto větu:

Převedeme-li kvadratickou formu lineární substitucí o nenulovém determinantu v jinou kvadratickou formu, pak mají matice obou forem stejnou hodnost.

Důkaz. Označme si matici koeficientů původní formy $\mathfrak{A}$. Pak lze tuto formu psáti podle 2, 4, 3 ve tvaru

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x},$$

kdež $\mathfrak{x}$ je matice o n řádcích a 1 sloupci

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{x}'$ je matice k $\mathfrak{x}$ transponovaná. (Viz 2, 4, 2, str. 96.) Provedeme-li na tuto kvadratickou formu substituci:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{y} \tag{1}$$

o nenulovém determinantu $|\mathfrak{B}| \neq 0$, dostaneme kvadratickou formu
$$\mathfrak{y}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y}.$$
Máme dokázat, že matice $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mají stejnou hodnost. Avšak podle věty z 2, 2, 5, str. 77, je hodnost matice $\mathfrak{A}$ rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých řešení soustavy homogenních lineárních rovnic, které lze psáti v maticovém tvaru
$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{O}, \tag{2}$$
kdež $\mathfrak{O}$ je matice o n řádcích a 1 sloupci skládající se ze samých nul.*) Je to, explicitně napsáno, těchto n rovnic:
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
Podobně hodnost matice $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ se rovná maximálnímu počtu lineárně nezávislých řešení soustavy homogenních lineárních rovnic:
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{O}. \tag{3}$$
Tato soustava má však stejná řešení jako soustava
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{O}. \tag{4}$$
Nejsnáze to nahlédneme pomocí maticového počtu, když maticovou rovnici (3) násobíme zleva maticí $\mathfrak{B}'^{-1}$ reciprokou k $\mathfrak{B}'$. (Viz 2, 4, 4.) Dostaneme na levé straně podle 2, 4, 4:
$$\mathfrak{B}'^{-1}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{E}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y}.$$
Na pravé straně dostaneme
$$\mathfrak{B}'^{-1}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}.$$
Odtud plyne ihned rovnice (4). Podobně znásobíme-li rov. (4) maticí $\mathfrak{B}'$, dostaneme rovnici (3). Bez maticového počtu dostaneme tento výsledek takto: Soustava lineárních rovnic (3) vypadá explicitně napsána takto:
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ji}a_{jk}b_{kl}x_l = 0, \quad i - 1, 2, \ldots, n.$$
Zavedeme-li sem nové neznámé substitucí
$$z_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{jk}b_{kl}x_l,$$
dostaneme
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}z_j = 0.$$

*) Pozor! Matic $\mathfrak{O}$ byla zavedena v 2, 1, 4, str. 64 a v 2, 2, 5, str. 76 jakožto matice (0, 0, . . ., 0) skládající se z 1 řádku a z n sloupců. Protože Bieberbach již v 2, 4, 5 symbol $\mathfrak{O}$ nedefinuje, je na tomto místě v knize vlastně chyba. Bieberbach by měl psáti $\mathfrak{O}'$ (matice transponovaná k $\mathfrak{O}$). Protože však $\mathfrak{x}$ a $\mathfrak{y}$ značí rovněž matice o n řádcích a 1 sloupci, ponechávám značení $\mathfrak{O}$ a výslovně podotýkám, že zde znamená něco jiného než v 2, 1, 4 a v 2, 2, 5.

Protože determinant $|b_{kl}| \neq 0$, mají tyto rovnice jen řešení

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{jk} b_{kl} x_l = 0.$$

To je však soustava (4). Je tudíž každé řešení soustavy (4) zároveň i řešením soustavy (3) a naopak.

Máme tedy dokázati, že soustava (2) a soustava (4) mají stejný maximální počet lineárně nezávislých řešení. Avšak soustavu (4) dostaneme z (2) pomocí substituce (1) a naopak z (4) dostaneme (2) pomocí inversní substituce

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{x}: \tag{5}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$. Substitucemi (1) a (5) je tedy přiřazeno ke každému řešení soustavy (2) jednoznačně jedno řešení soustavy (4) a naopak. Stačí tedy dokázati: Je-li

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ \vdots \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathfrak{y}_r = \begin{pmatrix} y_1^{(r)} \\ y_2^{(r)} \\ \vdots \\ y_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

nějakých r lineárně závislých řešení soustavy (4), pak těmto odpovídající řešení

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{y}_2, \ldots, \quad \mathfrak{x}_r \quad \mathfrak{B}\mathfrak{y}_r$$

jsou rovněž lineárně závislá a naopak. Že však řešení $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_r$ jsou lineárně závislá, to značí, že platí maticová rovnice:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{y}_i = \mathfrak{O},$$

kdež λ_i je jistých r čísel, z nichž alespoň jedno je od nuly různé. Tato maticová rovnice představuje nám totiž těchto n rovnic

$$\lambda_1 y_j^{(1)} + \lambda_2 y_j^{(2)} + \ldots + \lambda_r y_j^{(r)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Utvoříme-li stejnou lineární kombinaci řešení $\mathfrak{x}_i$, máme podle posledních rovnic z 2, 4, 1, str. 96:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{x}_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{B}\mathfrak{y}_i = \mathfrak{B} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathfrak{y}_i = \mathfrak{B}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}.$$

Jsou tudíž i řešení $\mathfrak{x}_i$ lineárně závislá. Stejným postupem, používajíce (5) místo (1), dostaneme i obrácené tvrzení. Tím je dukaz proveden.

Druhý dodatek týká se důkazu zákona setrvačnosti pro kvadratické formy v 2, 4, 7. Dukaz je v obou vydáních podán způsobem velmi nepřehledným a je neúplný. Podám zde proto trochu pozměněný důkaz, užívaje však téže základní myšlenky.

Podle 2, 4, 6 dá se každá kvadratická forma o reálných koeficientech převésti lineární substitucí o nenulovém determinantu a o reálných koeficientech ve formu, která obsahuje jen členy se čtverci proměnných (neurčitých). Provésti to lze ruznými zpusoby. Podle 2, 4, 5 je však hodnost všech takto získaných forem táž a rovna hodnosti formy původní. Hodnost formy, která obsahuje jen členy se čtverci proměnných (neurčitých), rovná se však zřejmě počtu těchto členů. Mají tedy všechny výsledné formy, které takto dostaneme, tentýž počet čtvercu proměnných. Zákon setrvačnosti nyní zní:

Ať převedeme jakoukoli lineární substitucí o nenulovém determinantu a o reálných koeficientech danou kvadratickou formu o reálných koeficientech na součet čtvercu proměnných (neurčitých), pak je v tomto součtu vždy stejný počet čtvercu s kladnými koeficienty a stejný počet čtverců se zápornými koeficienty.

Důkaz. Nejdříve provedeme důkaz pro případ, že daná kvadratická forma o n proměnných je hodnosti n-té, t. j. že má nenulový diskriminant.

Nechť daná kvadratická forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

dá se převésti substitucí

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

ve formu g

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

v níž $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ jsou reálná čísla od nuly ruzná, z nichž prvních t je kladných a ostatních $n - t = u$ je záporných. Nechť

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

je druhá substituce, která převádí formu f ve formu h

$$h(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots + \mu_n z_n^2,$$

kdež opět $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ jsou reálná čísla, z nichž prvních v je kladných a ostatních $n - v = w$ je záporných. Předpokládejme, že zákon setrvačnosti pro tyto dvě substituce neplatí. Pak bude počet kladných a tudíž i záporných koeficientů ve formách g a h různý. Bez újmy všeobecnosti možno předpokládat, že

$$t < v.$$

Odtud plyne, že $w < u$ a tedy

$$t + w < t + u = n. \tag{3}$$

Budiž

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

substituce inversní k (1) a

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

substituce inversní k (2). Utvořme tuto soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
B_{11} \quad x_1 + B_{12} \quad x_2 + \ldots + B_{1n} \quad x_n &= 0 \\
B_{21} \quad x_1 + B_{22} \quad x_2 + \ldots + B_{2n} \quad x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
B_{t1} \quad x_1 + B_{t2} \quad x_2 + \ldots + B_{tn} \quad x_n &= 0 \\
C_{v+1,1}\, x_1 + C_{v+1,2}\, x_2 + \ldots + C_{v+1,n}\, x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
C_{n1} \quad x_1 + C_{n,2} \quad x_2 + \ldots + C_{nn} \quad x_n &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Je to soustava $t + w$ rovnic o n neznámých. V dusledku nerovnosti (3) má tato soustava vždy nenulová řešení. Budiž $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jedno takové řešení. Hodnoty, které tomuto řešení odpovídají pomocí substituce (4), označme $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Z rovnic (6) plyne, že

$$\eta_1 = 0, \ \eta_2 = 0, \ldots, \eta_t = 0, \tag{7}$$

a alespoň jedno z čísel $\eta_{t+1}, \ldots, \eta_n$ je od nuly ruzné. Podobně hodnoty, které tomuto řešení odpovídají pomocí substituce (5), označme $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Opět plyne z rovnic (6), že

$$\zeta_{v+1} = 0, \ \zeta_{v+2} = 0, \ldots, \zeta_n = 0, \tag{8}$$

a alespoň jedno z čísel $\zeta_1, \ldots, \zeta_v$ je od nuly ruzné. Dosadíme-li nyní do formy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hodnoty ξ_i, dostaneme vzhledem na (1) a (7)

$$\begin{gathered}
f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = g(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \\
-\lambda_{t+1}\eta_{t+1}^2 + \lambda_{t+2}\eta_{t+2}^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2 < 0.
\end{gathered}$$

Na druhé straně dostaneme však vzhledem na (2) a (8)

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = h(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \mu_1\zeta_1^2 + \mu_2\zeta_2^2 + \ldots + \mu_v\zeta_v^2 > 0.$$

To je však spor. Předpoklad $t < v$ je tedy nemožný a musí býti $t = v$, $u = w$. Tím je zákon setrvačnosti pro případ nenulového diskriminantu formy dokázán.

Mějme nyní kvadratickou formu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o diskriminantu rovném nule. Budiž r hodnost této formy. Budiž dále opět (1) substituce o nenulovém determinantu, která převádí f ve formu g, jež obsahuje toliko členy se čtverci proměnných. Podle 2, 4, 5 i hodnost formy g je r. g obsahuje tudíž právě jen r členů se čtverci proměnných:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2.$$

Budiž dále (2) jiná substituce o nenulovém determinantu, která převádí f ve formu h, jež obsahuje rovněž jen členy se čtverci proměnných. Těchto členů je opět toliko r. h má tedy tvar:

$$h(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots + \mu_r z_r^2.$$

Provedeme-li nyní na formu g nejdříve substituci (4) inversní k (1) a pak substituci (2), dostaneme právě formu h. Toho lze však dosáhnouti též jedinou substitucí, substitucí složenou z (4) a (2):

$$y_i = \sum_{j,k=1}^{n} B_{ij} c_{jk} z_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

která vznikne, když do (4) dosadíme z (2) za x_j. (9) je substituce o n proměnných, která převádí g v h. Ve formě g se vyskytují však jen proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Dosadíme-li tam za ně (9), budou se tam formálně vyskytovati všechny proměnné $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Po úpravě však všechny členy, které obsahují alespoň jednu z proměnných $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_n$, musí se rovnat nule, neboť forma h tyto proměnné neobsahuje. Vezmeme-li nyní v substituci (9) jen prvních r řádku a položíme-li v nich ještě $z_{r+1} = 0, z_{r+2} = 0, \ldots, z_n = 0$, dostaneme substituci mezi proměnnými $y_1, y_2, \ldots, y_r$ a $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Z toho, co právě bylo řečeno, plyne, že tato substituce r proměnných převádí formu g ve formu h. Protože diskriminant formy h jakožto formy r proměnných je od nuly různý a rovná se podle 2, 4, 3 diskriminantu formy g jakožto formy o r proměnných násobenému čtvercem determinantu naší substituce r proměnných, musí tato substituce míti determinant různý od nuly. Forma g o r proměnných dá se tedy převésti ve formu h o r proměnných substitucí o nenulovém determinantu. Podle zákona setrvačnosti, který jsme již dokázali pro formy o nenulovém diskriminantu, má tedy forma g i h stejný počet čtverců s koeficienty kladnými i stejný počet čtverců s koeficienty zápornými. Tím je zákon setrvačnosti obecně dokázán.

Seznam literatury v článku citované.

1. Ludwig Bieberbach-Gustav Bauer: Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von † Dr. Gustav Bauer in vierter vermehrter Auflage dargestellt von Dr. Ludwig Bieberbach. 1928.
2. Ludwig Bieberbach-Gustav Bauer: Totéž. 5. Auflage. 1933.
3. Bohumil Bydžovský: Základy teorie determinantů a matic a jich užití. Knihovna spisů matematických a fysikálních, sv. 14. JČMF 1930.
4. Robert Fricke: Lehrbuch der Algebra. verfaßt mit Benutzung von Heinrich Webers gleichnamigem Buche. I. Band: Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. 1924.
5. Oskar Perron: Algebra.
   I. Teil. Die Grundlagen. 1927.
   II. Teil. Theorie der algebraischen Gleichungen. 1927.
6. Oskar Perron. Totéž. 2. Auflage.
   I. Teil. Die Grundlagen. 1932.
   II. Teil. Theorie der algebraischen Gleichungen. 1933.
7. Karel Rychlík: Úvod do elementární teorie číselné. Sbírka Kruh, sv. 7. JČMF 1931.
8. Arnold Scholz: Einleitung in die Zahlentheorie. Sammlung Göschen, Band 1131. 1939.
9. O. Schreier und E Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. I. Band. 1931.
10. Heinrich Weber: Lehrbuch der Algebra. I. Band. 2. Auflage. 1912.