Emanuel Klier

Křivka $y^y = x^x$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D12--D24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121828

Křivka $y^y = x^x$.

Emanuel Klier, Plzeň.

Úvodem připomeňme některé vztahy. Přirozený logaritmus komplexního čísla $z = \varrho e^{i\varphi} = \varrho e^{i(\varphi + 2t\pi)} = \varrho [\cos(\varphi + 2t\pi) + i \sin(\varphi + 2t\pi)]$ je

$$\log z = \log \varrho + i(\varphi + 2t\pi), \quad \log \varrho = \log |z|, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Pro $\varrho = 1$ a $\varphi + 2t\pi = 2l\pi$ resp. $\varphi + 2t\pi = (2l + 1)\pi$ je

$$\log(+1) = 2l\pi i, \quad \log(-1) = (2l + 1)\pi i$$

a log kladného či záporného čísla reálného x je tudíž

$$\log x = \log |x| + k\pi i,$$

kde $k = \begin{matrix} 2l \\ 2l + 1 \end{matrix}$ pro x $\begin{matrix} \text{kladné} \\ \text{záporné} \end{matrix}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Připomeňme ještě definiční rovnici

$$z = e^{\log z}.$$

Abychom nepřehlédli žádné okolnosti, která vede k mnohoznačnosti logaritmů, pišme pro reálná $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$x = \varepsilon_1 |x|, \quad y = \varepsilon_2 |y|, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$$

při čemž označme

$$\log \varepsilon_1 = k_1\pi i = \begin{matrix} 2l\pi i \\ (2l + 1)\pi i \end{matrix}, \quad \log \varepsilon_2 = k_2\pi i = \begin{matrix} 2m\pi i \\ (2m + 1)\pi i \end{matrix}$$

pro $\varepsilon_{1,2} = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$.

Definice křivky $y^y = x^x$. Křivkou o této rovnici budeme nazývat onu množinu bodů reálných, jejichž pravoúhlé souřadnice splňují tuto rovnici.

Výsledek operací y^y, x^x nemusí být reálný.[1]) Obecně bude komplexní. Pišme proto rovnici

$$y^y = x^x \tag{1}$$

ve tvaru

$$e^{x \log x} = z = e^{\log \varrho + i(\varphi + 2p\pi)}, \quad e^{y \log y} = z = e^{\log \varrho + i(\varphi + 2q\pi)}$$

čili

$$x [\log |x| + k_1\pi i] = \log \varrho + i(\varphi + 2p\pi),$$
$$y [\log |y| + k_2\pi i] = \log \varrho + i(\varphi + 2q\pi).$$

---

[1]) Úlohou, kdy x^x je reálný výraz, zabýval se prof. dr. Karel Dusl ve článku: K teorii exponenciální funkce x^x v Časopise p. p. mat. a fys. 54 (1925), č. 3.

Srovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme

$$\begin{aligned} x \log |x| &= \log \varrho \\ y \log |y| &= \log \varrho \end{aligned} \quad (2) \qquad \begin{aligned} xk_1\pi &= \varphi + 2p\pi \\ yk_2\pi &= \varphi + 2q\pi \end{aligned} \quad (2')$$

Vyloučením ϱ a φ

$$x \log |x| = y \log |y| \quad (3) \qquad k_1 x - k_2 y = 2n, \ n = p - q \quad (3')$$

Místo (3) lze též psáti

$$|y|^y = |x|^x \ (= \varrho). \tag{4}$$

Tyto výsledky dostaneme přímo touto úvahou: Má býti $(\varepsilon_2 |y|)^y = (\varepsilon_1 |x|)^x$. To však vyžaduje rovnost absolutních hodnot a rovnost mocnin jednotky, t. j.

$$|y|^y = |x|^x = \varrho, \quad \varepsilon_2^y = \varepsilon_1^x = e^{i(\varphi + 2t\pi)}$$

a z toho za použití relací pro log $\varepsilon_{1,2}$ rovnice (2′) a (3′).

Nyní můžeme vysloviti definici křivky $y^y = x^x$ též poněkud jinak: je to množina oněch reálných bodů (x, y) křivky (3) (čili křivky (4)), které při vhodné volbě celých čísel k_1, k_2, n vyhovují rovnici (3′); při tom jsou k_1, k_2, n libovolná čísla celá, vázaná pouze touto podmínkou: je-li x kladné (záporné), je k_1 sudé (liché); je-li y kladné (záporné), je k_2 sudé (liché). Je to tedy množina reálných průsečíků křivky (3) (resp. (4)) s přímkami (3′), pokud ovšem tato rovnice přímku určuje (výjimku činí případ $k_1 = k_2 = n = 0$, o čemž později).

Vyšetřeme nejprve vlastnosti a průběh křivky (4).

Parametrické vyjádření. Hledejme průsečíky křivky (4) s přímkami $y = \lambda x$ (v úvahu přicházejí pouze hodnoty $x \neq 0$, $y \neq 0$ a tedy i $\lambda \neq 0$ — pro $x = 0$ nebo $y = 0$ nemá totiž logaritmus v rovnici (3) smyslu); pro $\lambda = 1$, t. j. $y = x \ (\neq 0)$, je rovnice (3) vždy splněna; stačí tedy vyšetřovati ještě hodnoty λ, různé od 0 a od 1. Jest $|y| = |\lambda| . |x|$; rovnice (3) pak dává

$$\lambda x [\log |\lambda| + \log |x|] = x \log |x|.$$

Předpokládáme-li x od nuly různé, dostaneme z poslední rovnice

$$|x| = |\lambda|^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad \text{a dále} \quad |y| = |\lambda| \, |x| = |\lambda|^{\frac{1}{1-\lambda}}. \tag{5}$$

Abychom obdrželi výrazy pro souřadnice v jednotlivých kvadrantech, násobme poslední rovnice ε_1 resp. ε_2

$$x = \varepsilon_1 |\lambda|^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad y = \varepsilon_2 |\lambda|^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{6}$$

takže pro body v prvém a třetím kvadrantu platí $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$, t. j.

$$x = \pm |\lambda|^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad y = \pm |\lambda|^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad \frac{y}{x} = \lambda > 0 \tag{7}$$

a pro body ve druhém a čtvrtém kvadrantu při $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \mp 1$

$$x = \mp |\lambda|^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad y = \pm |\lambda|^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad \frac{y}{x} = \lambda < 0. \tag{8}$$

Horní znaménka platí pro první resp. druhý kvadrant, dolní pro třetí resp. čtvrtý kvadrant. Stačí tedy vyšetřiti křivku (5) pro $\lambda \gtrless 0$. Pro jednoduchost vynechme znamení absolutních hodnot (považujme x, y, λ za kladné) a sledujme pouze v prvém kvadrantu křivku složenou ze dvou větví o rovnicích

$$x = \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \qquad y = \lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{9}$$

$$x = \lambda^{-\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \qquad y = \lambda^{\frac{1}{1+\lambda}} \tag{9'}$$

čili

$$y^y = x^{\pm x} \tag{9''}$$

poněvadž v (8) je $\frac{y}{x} = -|\lambda|$.

Z posledních rovnic plyne ihned jedna vlastnost křivky (9″). Zaměníme-li totiž λ za $\frac{1}{\lambda}$, zamění se v každé větvi x za y a opačně. Křivka je tedy souměrná k přímce $y = x$. [Záměně $\lambda = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$ za $\frac{1}{\lambda}$ odpovídá záměna $\operatorname{tg}\varphi$ za $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$].[2)]

Zvláštní body. Rovnice (9), (9′) pozbývají významu pro některé z hodnot $\lambda = 0, 1, \infty$. Příslušné limity můžeme stanoviti některé přímo a některé derivováním čitatelů a jmenovatelů dle λ z rovnic (9) (9′) psaných ve tvaru:

$$\log x = \frac{\log\lambda}{\frac{1}{\lambda} - 1}, \quad \log y = \frac{\log\lambda}{1-\lambda}; \quad \log x = -\frac{\log\lambda}{\frac{1}{\lambda} + 1}, \quad \log y = \frac{\log\lambda}{1+\lambda}. \tag{10}$$

Derivováním dostaneme

$$\lim \log x = -\lim_{\lambda\to 0,1} \lambda, \quad \lim \log y = -\lim_{\lambda\to 1,\infty} \frac{1}{\lambda}; \qquad \lim \log x = \lim_{\lambda\to 0} \lambda, \quad \lim \log y = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}. \tag{10'}$$

[2)] Je zajímavo provést úvahy v systému otočeném o 45°.

Ostatní limity plynou přímo z (10). Celkem pak máme:

$$\begin{array}{llccc}
 & \lambda \to & 0 & 1 & \infty \\
\text{I. větev} & \left\{\begin{array}{l}\lim x \\ \lim y\end{array}\right. & \begin{array}{c}1\\0\end{array} & \begin{array}{c}e^{-1} \doteq 0{,}3679\\ e^{-1}\end{array} & \begin{array}{c}0\\1\end{array} \\
\text{II. větev} & \left\{\begin{array}{l}\lim x \\ \lim y\end{array}\right. & \begin{array}{c}1\\0\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\end{array} & \begin{array}{c}0\\1\end{array}
\end{array} \qquad (11)$$

Prohlásíme-li tyto hodnoty za „pravé hodnoty“, pak naše křivka je všude spojitá[3]) a obě větve přecházejí (bez hrotu) v sebe v dotyčných bodech na osách, jak dále potvrdíme.

Tečny. 1. Ze vzorců (9) (9′) (9″) najdeme logaritmickým derivováním:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \pm\, x \frac{1 \mp \lambda + \log \lambda}{(1 \mp \lambda)^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{y}{\lambda} \cdot \frac{1 \mp \lambda \pm \lambda \log \lambda}{(1 \mp \lambda)^2},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{1 + \log x}{1 + \log y} \qquad (12)$$

a (pokud $\lambda \neq 1$ pro první větev)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{1 \mp \lambda \pm \lambda \log \lambda}{1 \mp \lambda + \log \lambda}. \qquad (12')$$

Při tom platí horní znaménka pro prvou větev (9) a dolní pro druhou větev (9′).

2. Z posledního ze vzorců (12) je zřejmo, že pro obě větve je pro $x = 1$, $y = 0$ $\lim \frac{dy}{\mathrm{d}x} = 0$ a rovněž pro obě větve při $x = 0$, $y = 1$ $\lim \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \infty$. Osy jsou tedy společnými tečnami obou větví a v dotyčných bodech obě větve spojitě v sebe přecházejí.

3. V bodě (e^{-1}, e^{-1}) přijmeme opět limitu za pravou hodnotu pro prvou větev

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{dy}{dx} = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\log \lambda}{-1 + \frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda \to 1} -\lambda = -1. \qquad (12'')$$

Pro druhou větev je v bodě (1, 1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$.

4. Pro první větev nemůže nastat případ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$, neboť to by znamenalo $\log \lambda = 0$. Ale $\lambda = 1$ je na této větvi jen v bodě $x = y = e^{-1}$ a v tom jsme přijali za směrnici tečny -1.

[3]) Viz Ed. Weyr: Diferenciální počet, str. 224.

Na druhé větvi však $\frac{dy}{dx} = 1$, je-li dle (12′)

$$-1 - \lambda + \lambda \log \lambda = 1 + \lambda + \log \lambda$$

čili

$$-\frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda} = \log \lambda. \tag{13}$$

Položme $\lambda = e^{-2\xi}$ a pak (13) zní

$$\xi = \operatorname{Cotg} \xi. \tag{14}$$

Této rovnici vyhovuje dosti přibližně $\xi = 1{,}2$ a tedy $\lambda_1 \doteq 0{,}0907$ a z toho $x_1 \doteq 1{,}22$ $y_1 \doteq 0{,}11$.

Rovnici (14) vyhovuje však také $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, jak se snadno přesvědčíme. Je tedy $\lambda_2 \doteq 11{,}02$, $x_2 \doteq 0{,}11$, $y_2 \doteq 1{,}22$.

5. Volíme-li pro druhou větev $x_1 = e^{-1}$, bude dle třetí z rovnic (12) $dy = 0$ a obdobně pro $y_2 = e^{-1}$ bude $dx = 0$, čili buď

$$1 + \frac{1}{\lambda} = \log \lambda \quad \text{nebo} \quad 1 + \lambda = -\log \lambda.$$

Opět snadno shledáme, že splňuje-li první rovnici $\lambda_1 \doteq 3{,}59$, splňuje druhou $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} = 0{,}279$. Tomu odpovídají souřadnice

$$y_1 = \lambda_1 x_1 \doteq 3{,}59 e^{-1} \doteq 1{,}32 = x_2.$$

V těchto bodech nabývá y resp. x maxima, jak bychom potvrdili z druhých derivací.

Zobrazení křivky. K sestrojení bodů křivky máme již souřadnice a tečny několika bodů. Pro další libovolné λ počítáme souřadnice z (9), (9′) a užívajíce souměrnosti křivky sestrojíme další body.

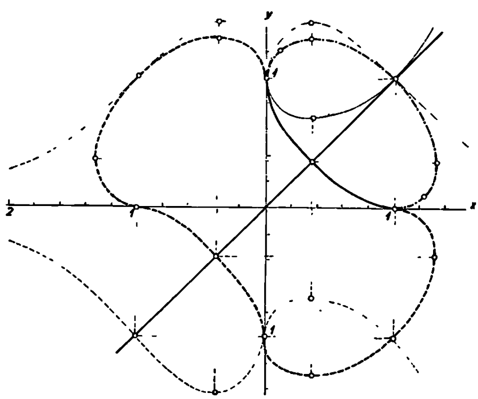
V obrazci je první větev (9) vyznačena plně, silně, druhá větev (9′) čerchovaně (tečka čárka), silně. V celku podobá se křivka elipse o středu na přímce $y = x$ a dotýkající se souřadných os.

Pro srovnání je v obrazci zakreslena slabě plně křivka $|y| = |x|^x$ a slabě čerchovaně $|y| = |x|^{-x}$, jimiž se zabýval v dříve již zmíněném článku prof. dr. Dusl.

V dalším vrátíme se opět k přesnému vyznačování absolutních hodnot. Dle rovnic (7) (8) dostaneme skutečný průběh křivky v jednotlivých kvadrantech takto: K prvé větvi (9) sestrojíme dle počátku středově souměrnou křivku ve třetím kvadrantu. Druhou větev (9′) zrcadlíme dle Y a X a dostaneme křivky ve druhém a čtvrtém kvadrantu. V druhém až čtvrtém kvadrantu je vyznačena křivka silně čárkovaně.

Z křivek $|y| = |x|^{\pm x}$ odvodíme příslušné křivky v ostatních kvadrantech jednak zrcadlením horní větve dle Y a pak zrcadlením této větve a plně vytažené větve v prvém kvadrantu dle osy X. Ve druhém až čtvrtém kvadrantu je křivka slabě čárkována.

Souvislost této křivky s námi uvažovanou je zřejma. Vedeme-li přímku $y = a$, protne křivku $\pm |x|^x$ v bodech, jejichž úsečky x učiníme pořadnicemi nad jednou z úseček x.



Je zajímavo, že přímka vedená pod úhlem málo odlišným od $-45°$ ve vhodné vzdálenosti od počátku protne naši křivku ve čtyřech bodech a přímku $y = x$, která představuje nezajímavý případ křivky $y^y = x^x$, v pátém bodě.

Křivka $y^y = x^x$. Pomocí λ lze vyjádřit souřadnice bodu· Avšak rovnice (2′) resp. (3′) omezují volbu λ a tím jsou přípustny jen určité body prostudované křivky jakožto body množiny (křivky) $y^y = x^x$. Samozřejmě $y = x$ je jedna větev spojitá.

1. V prvém kvadrantu můžeme zrušit omezovací význam rovnice (3′). Můžeme voliti $k_1 = k_2 = n = 0$.[4]) Pak (3′) je splněno pro jakékoliv x, y a v prvém kvadrantu je plně silně vytažená

[4]) Tím ovšem volíme z obecně mnohoznačné mocniny kladné jednotky pouze $+1$, t. j. uvažujeme absolutní hodnoty.

další spojitá větev křivky $y^y = x^x$. Obecně jsou souřadnice této větve iracionální čísla. Avšak pro $\lambda = \frac{j}{j \pm 1}$ dostáváme pro souřadnice hodnoty racionálné

$$x = \left(\frac{j}{j \pm 1}\right)^{\pm j} \quad y = \left(\frac{j}{j \pm 1}\right)^{1 \pm j} \quad j \geqq 0.$$

Považujeme-li body na osách za prvé takové body, pak druhý pár dostaneme pro $j = 1$ a horní znaménka, resp. $j = 2$ a dolní znaménka $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Další takové body se kupí stále hustěji po obou stranách bodu (e^{-1}, e^{-1}) s rostoucím j.

2. Má-li být z, jakožto výsledek operací y^y, x^x reálné, kladné, musí být $q = 2t\pi$. Pro body ve třetím kvadrantu $k_1 = 2l + 1$, $k_2 = 2m + 1$ a tudíž (2′) zní

$$x = -\frac{2r}{2l + 1} \quad y = -\frac{2s}{2m + 1} \quad \lambda = \frac{s\,(2l + 1)}{r\,(2m + 1)}. \tag{16}$$

Dle předešlého víme, že existují racionálné hodnoty pro x, y v prvém kvadrantu. Poněvadž ve třetím kvadrantu je křivka středově souměrná s křivkou v prvním kvadrantu, musí také míti ve třetím kvadrantu body s racionálními souřadnicemi

$$x = -\left(\frac{j}{j \pm 1}\right)^{\pm j} \quad y = -\left(\frac{j}{j \pm 1}\right)^{1 \pm j}. \tag{17}$$

Volba j je však omezena rovnicemi (16). Volíme-li j sudé a horní znaménka, nebo j liché a dolní znaménka v rovnicích (17), je rovnicím (16) vyhověno.

Tím vyčerpali jsme racionálné hodnoty x, y v prvém a třetím kvadrantu při $\lambda = \frac{j}{j \pm 1}$. Pro jiná λ dostáváme x, y iracionálná.

3. Volme $p = q$ v rovnicích (2′), t. j. $n = 0$ ve (3′) a dle téže rovnice je

$$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Z toho plyne, že existují body naší množiny

$$\begin{array}{llll} \text{v 1. kvadrantu} & \text{pro} & \lambda = \dfrac{l}{m} & \\ \text{2.} \quad ,, & ,, & \lambda = \dfrac{2l + 1}{2m} & \\ \text{3.} \quad ,, & ,, & \lambda = \dfrac{2l + 1}{2m + 1} & (18) \\ \text{4.} \quad ,, & ,, & \lambda = \dfrac{2l}{2m + 1} & \end{array}$$

Pro amplitudu z je dle (2')

$$q + 2p\pi = xk_1\pi + yk_2\pi. \tag{19}$$

4. Je-li v rovnici (5') k_1 (nebo k_2) $= 0$, pak muže být x (nebo y) iracionálné číslo i při $n \neq 0$ a při y (nebo x) racionálném, daném (2').

Ve druhém kvadrantu mužeme voliti $k_2 = 0$. Pak $x = -\left|\frac{2n}{2l+1}\right|$, rovnicí (8) je dáno λ a y. Vedeme-li tedy ve druhém kvadrantu přímku rovnoběžnou s Y ve vzdálenosti $\frac{2n}{2l+1}$, protne naši křivku v bodě, který náleží množině $y^y = x^x$. Dále je dle (2') $q = -2q\pi$, tedy z reálné kladné.

Obdobně je tomu ve čtvrtém kvadrantu při $k_1 = 0$. Musí být $y = -\left|\frac{2n}{2m+1}\right|$, přímka rovnoběžná s X protne křivku opět v bodě množiny, pro nějž x, λ jsou dány rovnicí (7).

Pro takové přímky, rovnoběžné s osami, dostáváme troje řešení splňující rovnici $x^x = y^y$, a to dvě na křivce a třetí na přímce $y = x$.

Poznámka. Dle uvedeného je zřejmo, že nelze jednati obecně o tečně křivky $y^y = x^x$ (kromě prvního kvadrantu), neboť neexistují dva soumezné body, nýbrž jen libovolně blízké body všude husté množiny, příslušné ruzným větvím logaritmické funkce.[5])

Příklady. 1. Volme $\lambda = 2$, t. j. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$. Jak snadno také přímo potvrdíme, je $(\frac{1}{4})^{1/4} = (\frac{1}{2})^{1/2}$. Při tom $\sqrt[4]{1} = \sqrt[2]{1} = 1$.

Kdybychom volili $\lambda = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{10^n + 1}$ (takže λ se blíží 2 s libovolnou přesností volbou dosti velkého n) existoval by bod ve třetím (a prvém) kvadrantu, ale nikoliv pro $\lambda = 2$ a také ne pro $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. Pro $\lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{\text{liché}}{\text{sudé}}\right)$ existuje bod ve druhém kvadrantu a je $x = -\sqrt[3]{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ a tedy $(-\sqrt[3]{2})^{-\sqrt[3]{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$. Rovnost absolutních hodnot snadno potvrdíme. Pro amplitudu máme

[5]) Viz poznámku ve Whittakerově: A Cours of Modern Analysis, str. 107 o funkci $y = x^x$.

$\varphi + 2\pi n = \sqrt[3]{2}\,(2l + 1)\pi = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\; 2m\pi$ a tedy musí být $-(2l + 1) = m$. Tak na př. $l = 0$, $m = -1$, $(-1)^{-\sqrt[3]{2}} = (+1)^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$.

Obdobně bychom nalezli pro bod ve čtvrtém kvadrantu při $\lambda = -2$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $y = -\sqrt[3]{2}$.

3. Pro přibližné řešení užijme diagramu. Volme na př. $x_1 = -1.2 = -\frac{6}{5}$. Dle diagramu je $y_1 \doteq 0.09$. Vodorovná vedená tímto bodem protne v prvém kvadrantu křivku v bodě $x_2 \doteq 0,71$ ($y_2 \doteq 0,09$) a přímku $y = x$ v bodě $x_3 = 0.09 = y_3$. Je tedy přibližně

$$(-1,2)^{-1\cdot 2} = (0.09)^{0\cdot 09} = (0.71)^{0\cdot 71}$$

jak se snadno přesvědčíme. Hodnoty z diagramu odečtené můžeme počtem dále zjemniti.

Vzdávám srdečný dík p. prof. dr. Jarníkovi za rady a pokyny, které mi poskytl při této práci. Některé úvahy jsou pak ještě podrobněji vyloženy a prohloubeny v následující jeho poznámce.

Plzeň 3. V. 1940.

Kreslil Em. Klier. Archiv JČMF.

Poznámka. Účelem této poznámky jest, doplniti některé úvahy, které v předešlém článku p. ing. Em. Kliera jsou spíše jen naznačeny. Křivka $y^y = x^x$ je tam definována jako množina oněch reálných bodů (x, y) $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, jež při vhodné volbě celých čísel k_1, k_2 splňují rovnici

$$e^{x(\log|x| + k_1\pi i)} = e^{y(\log|y| + k_2\pi i)}, \tag{20}$$

při čemž k_1, k_2 jsou libovolná celá čísla, splňující podmínku:

$$\text{(A)}\ \begin{cases}\text{je-li } x \text{ kladné (záporné), je } k_1 \text{ sudé (liché);}\\ \text{je-li } y \text{ kladné (záporné), je } k_2 \text{ sudé (liché).}\end{cases}$$

Tuto definici je zřejmě možno přepsati takto: Křivka $y^y = x^x$ je množina oněch reálných bodů (x, y) $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, jež při vhodné volbě celých čísel k_1, k_2, n, splňujících podmínku (A), vyhovují rovnicím

$$x \log|x| = y \log|y|, \tag{3}$$

$$k_1 x - k_2 y = 2n. \tag{3'}$$

Jedna část této křivky je triviální, totiž přímka $y = x$ (z níž je ovšem vyloučen bod $(0, 0)$); neboť rovnice (3), (3') jsou splněny pro $x = y \neq 0$, $k_1 = k_2$, $n = 0$. Řešení rovnice (3) provedl p. Klier takto (viz jeho rovnice (7), (8)): V 1. a 3. kvadrantu je řešení rovnice (3) dáno parametricky ve tvaru[1])

$$x = \pm \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad y = \lambda x = \pm \lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} \; (\lambda > 0, \; \lambda \neq 1). \tag{7'}$$

kde horní (dolní) znamení odpovídá 1. (3.) kvadrantu. V 2. a 4. kvadrantu je řešení rovnice (3) dáno parametricky ve tvaru (v Klierově rovnici (8)' píši $-\lambda$ místo λ)

$$x = \mp \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad y = -\lambda x = \pm \lambda^{\frac{1}{1+\lambda}} \; (\lambda > 0). \tag{8'}$$

kde horní (dolní) znamení odpovídá 2. (4.) kvadrantu.[2]) Jde ještě o to, které z bodu křivek (7'), (8') hoví též rovnici (3') při vhodné volbě čísel k_1, k_2, n.

I. V 1. kvadrantu (k_1, k_2 sudé) smíme voliti $k_1 = k_2 = n = 0$ a rovnice (3') je splněna. Tedy: *ona část křivky $y^y = x^x$, jež leží v 1. kvadrantu, je dána rovnicemi* (7')[3]) [4]).

II. V ostatních kvadrantech je aspoň jedno z čísel k_1, k_2 liché, tedy $\neq 0$ a rovnice (3') po dosazení z rovnic (7'), (8') zní[5])

$$\lambda^{\frac{\mp\lambda}{1-\lambda}} (k_1 + \lambda k_2) = 2n; \tag{21}$$

při každé přípustné volbě čísel k_1, k_2, n má tato rovnice (pro neznámou λ) nejvýše spočetně mnoho kořenů. *V 2., 3. a 4. kvadrantu obsahuje tedy křivka $y^y = x^x$ jen spočetnou množinu bodů.*[1]) *Tyto body leží však všude hustě na křivkách* (7'), (8')[3]), neboť rovnice (21) je splněna pro $n = 0$, zvolíme-li za λ libovolný kladný zlomek $\lambda = \pm k_1/k_2$, kde celá čísla k_1, k_2 jsou vázána jen podmínkou (A) a pro 3 kvadrant ještě podmínkou $\lambda \neq 1$ (viz Klierovy rovnice (18)) (Vysvětlení: každé kladné číslo λ lze vyjádřiti jako limitu vhodné posloupnosti hodnot λ právě popsaného tvaru $\lambda = \pm k_1/k_2$. Z toho ihned plyne: každý bod křivek (7'), (8')[3]) (odpovídající zcela *libovolné* přípustné hodnotě λ) je limitou vhodné posloupnosti bodu, odpovídajících hodnotám λ tvaru $\pm k_1/k_2$ a ležících tedy na křivce $y^y = x^x$. T. j. *každý bod křivek* (7'), (8')[3]) *je limitou posloupnosti bodů, ležících na křivce $y^y = x^x$.* To je obšírný výklad slov „všude hustě".)

III. Které jsou racionální body křivky $y^y = x^x$, t. j. body s oběma racionálními souřadnicemi? Jsou-li x, y racionální, je i $\lambda = \pm y/x$ v rovnicích (7'), (8') racionální. Buďiž tedy

[1]) Nehledíme-li k bodum přímky $y = x$.
[2]) Mocniny čísla λ beru kladně.
[3]) S příslušným znamením.
[4]) Poznamenejme, že při naší volbě $k_1 = k_2 = 0$ jsou obě strany rovnice (20) kladné.
[5]) Místo n píši po případě $-n$.

$$\lambda = p/q \quad (p, q \text{ celá, kladná, nesoudělná}) \tag{22}$$

a vyšetřeme především, kdy číslo y v rovnicích (7′) resp. (8′) je racionální (potom též $x = -y\lambda$ bude racionální). Začněme s 2. a 4. kvadrantem. Podle (22) a (8′) je

$$y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p+q}}$$

a toto číslo má býti racionální. Ježto čísla q, $p + q$ jsou nesoudělná, je k tomu nutno a stačí, aby bylo $p = m^{p+q}$, $q = r^{p+q}$ (m, r celá kladná).[6]) Kdyby bylo $m \neq 1$, t. j. $m \geqq 2$, bylo by $p \geqq (1 + 1)^{p+q} = 1 + \binom{p+q}{1} + \dots > p + q$, což není možno; tedy $m = 1$, $p = 1$ a podobně $q = 1$, tedy $\lambda = 1$ a podle (8′) $x = -1$, $y = 1$; mimo to však má býti splněna rovnice (3′), t. j. $(k_1 + k_2) = 2n$, což není možno, ježto jedno z čísel k_1, k_2 je sudé a jedno liché. *Křivka $y^y = x^x$ nemá tedy v 2. a 4. kvadrantu racionálních bodů.*

V 1. a 3. kvadrantu je $\lambda \neq 1$.[1]) Ježto křivka $y^y = x^x$ přejde sama v sebe, vyměním-li x s y a tedy λ s $1/\lambda$, stačí uvažovati $0 < \lambda < 1$ (ovšem do výsledku nutno pak vedle nalezených hodnot λ dáti i jejich převratné hodnoty). Budiž tedy $\lambda < 1$, t. j. $p < q$; podle (22), (7′) je

$$y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{q-p}} \tag{23}$$

a toto číslo má býti racionální; jako dříve plyne odtud $p = a^{q-p}$, $q = b^{q-p}$ (a, b celá kladná), a ovšem $b > a$, tedy $b \geqq a + 1$. Jest $q > p$, tedy $q \geqq p + 1$, t. j. buďto $q = p + 1$ nebo $q > p + 1$. Kdyby bylo $q > p + 1$, bylo by

$$q = b^{q-p} \geqq (a + 1)^{q-p} \geqq a^{q-p} + \binom{q-p}{1} a^{q-p-1} + \binom{q-p}{2} a^{q-p-2} >$$
$$> a^{q-p} + (q - p)\, a^{q-p-1} \geqq a^{q-p} + q - p = p + q - p = q,$$

t. j. $q > q$, což je nemožno; tedy $q = p + 1$ a v úvahu přicházejí pouze hodnoty $\lambda = \dfrac{p}{p+1}$ ($p = 1, 2, \dots$). Potom však vskutku (viz (23), (7′)) čísla

---

[6]) Užívám této věty: je-li a nesoudělné s b, p nesoudělné s q ($b > 0$, $p > 0$, $q > 0$), je číslo $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{b}}$ racionální tehdy a jen tehdy, je-li p i q b-tou mocninou celého kladného čísla.

$$y = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p+1}, \quad x = y\lambda = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \tag{24}$$

jsou racionální. Jde ještě o to, pro které z těchto hodnot λ lze vyhověti rovnici (3′). V 1. kvadrantu lze zvoliti $k_1 = k_2 = n = 0$ a rovnice (3′) je splněna. *Všechny racionální body křivky $y^y = x^x$ v 1. kvadrantu*[1]) *jsou dány rovnicemi* (7′)[3]) *pro hodnoty* $\lambda = \frac{p}{p-1}$, $\lambda = \frac{p+1}{p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Ve 3. kvadrantu je $k_1 = 2l + 1$, $k_2 = 2m + 1$ a rovnice (3′) má podle (24) tvar

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^{p}\left(2l + 1 - \frac{p}{p+1}(2m + 1)\right) = 2n$$

a jde o to, zda můžeme celá čísla l, m voliti tak, aby levá strana této rovnice byla celé číslo sudé. Tato levá strana jest

$$\frac{p^p\,[2\,(l\,(p + 1) - mp) + 1]}{(p + 1)^{p+1}}. \tag{25}$$

Je-li p liché, je zřejmě čitatel lichý, jmenovatel sudý a výraz (25) tedy nemůže býti celé číslo. Je-li však p sudé, smíme voliti

$$l = m = \tfrac{1}{2}\,((p + 1)^{p+1} - 1)$$

(neboť poslední výraz je celé číslo). Potom výraz v (25) v hranaté závorce bude roven $2l + 1 = (p + 1)^{p+1}$ a celý výraz (25) bude vskutku roven sudému číslu p^p. Tedy: *Racionální body křivky $y^y = x^x$ v 3. kvadrantu jsou dány*[1]) *rovnicemi* (7′)[3]) *pro hodnoty* $\lambda = \frac{2r}{2r+1}$, $\lambda = \frac{2r+1}{2r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$.[7])

IV. Levá (a rovněž pravá) strana rovnice (20) nemusí být reálná, i když x, y jsou reálná čísla. Označme písmenem M množinu oněch reálných bodů (x, y) $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, pro něž jest možno zvoliti čísla k_1, k_2, vyhovující podmínce (A) tak, aby nejenom rovnice (20) byla splněna, nýbrž aby nad to obě strany této rovnice byla reálná čísla; při tom body přímky $y = x$ (jež lze snadno diskutovati) nepočítejme do množiny M. K tomu, aby obě strany rovnice (20) byly reálné, je zřejmě nutno a stačí, aby bylo

$$k_1 x = a, \quad k_2 y = b \quad (a, b \text{ celá čísla}). \tag{26}$$

---

[7]) Poznamenejme, že při naší volbě $p = 2r$, $k_1 = k_2 = 2l + 1 = (p + 1)^{p+1}$ vyjdou obě strany rovnice (20) kladné, neboť podle (24) je $k_1 x = (p + 1) \cdot p^p$, a to je sudé číslo.

Podle [4]), [7]) *leží všechny body křivky* $y^y = x^x$ *v 1. kvadrantu a všechny racionální body této křivky v 3. kvadrantu v množině* M. *Naopak, všechny body množiny* M, *ležící v 3. kvadrantu, jsou racionální*; neboť v 3. kvadrantu je $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ a tedy z rovnic (26) plyne, že $x = a/k_1$, $y = a/k_2$ jsou racionální.

Vyšetřujme 2. kvadrant. Body množiny M, ležící v 2. kvadrantu, jsou body křivky (8′) (s horním znamením), hovící vedle toho při vhodné volbě čísel n, a, b, k_1, k_2 rovnicím (3′), (26). Při tom nemohou býti obě čísla k_1, k_2 ruzná od 0, neboť potom by podle (26) byla čísla $x = a/k_1$, $y = a/k_2$ racionální, ale podle III není žádný bod křivky $y^y = x^x$ v 2. kvadrantu racionální. Ježto v 2. kvadrantu je $k_1 = 2l - 1 \neq 0$, musí býti $k_2 = 0$ (což je dovolená volba)[8]); potom podmínky (3′), (26) se redukují na $k_1 x$ = celé, $k_1 x$ = sudé, což dává (ježto má býti $x < 0$) podmínku

$$x = -\frac{2n}{2l-1} \quad (n, l = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Mimo to má bod (x, y) ovšem ležeti na křivce (8′). Tedy: *Body množiny* M *v 2. kvadrantu jsou právě ony body* (x, y) *křivky* (8′) (*s horním znamením*), *pro jejichž úsečku* x *platí rovnice* (27). *Body ve 4. kvadrantu dostanu ovšem tak, že vyměním* x *s* y. Tím je množina M úplně popsána.[9])

V. Jarník.

[8]) Podmínka $k_2 = 0$ ukazuje, že pravá (a tedy i levá) strana rovnice (20) jsou kladné.

[9]) Podle poznámek [4]), [7]), [8]) lze v bodech množiny M voliti k_1, k_2 tak, aby v rovnici (20) byla levá i pravá strana nejen reálná, nýbrž dokonce *kladná*. Pro body přímky $y = x$ v 3. kvadrantu není však tento výsledek správný. Na př. pro $x = y = -\frac{1}{3}$ je

$$e^{x(\log|x| + k_1 \pi i)} = \sqrt[3]{3}\, e^{-\frac{1}{3}k_1 \pi i},$$

kterýžto výraz lze sice učiniti reálným (zvolím k_1 dělitelné třemi), ale nikoliv kladným (ježto k_1 musí býti liché).