Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

O křivkách konchoidálních

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D153--D181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121827

ČLÁNKY A REFERÁTY.

O křivkách konchoidálních.

Dr. **Jan Schuster**, Praha.

1. Předmět následující práce jest určení křivek, ve kterých tětivy vedené daným bodem (pólem) mají stálou délku, a pro některé udat i zobecnění afinní a projektivní.

Jako první příklad uvažujme křivku v Cartesiových souřadnicích tvaru

$$v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = 0, \tag{1}$$

kde v_k značí funkci stupně k, homogenní podle x a y.

Protněme křivku přímkou

$$y = tx, \tag{2}$$

čímž vznikne rovnice druhého stupně v x:

$$x^2 u_{n+2} + x u_{n+1} + u_n = 0,$$

kde

$$u_k = \frac{v_k}{x^k}. \tag{3}$$

Odtud

$$x_{1,2} = [- u_{n+1} \pm \sqrt{u^2_{n+1} - 4 u_n u_{n+2}}] : 2u_{n+2}. \tag{4}$$

Značíme-li b délku tětivy na této přímce a omezenou křivkou, dostaneme

$$b = (x_1 - x_2) \sqrt{1 + t^2} = \sqrt{1 + t^2} \,.\, \sqrt{u^2_{n+1} - 4 u_n u_{n+2}} : u_{n+2}.$$

Tato rovnice ukazuje, že jedna z funkcí u jest určena ostatními dvěma, je-li dáno b, na př.

$$u_n = \left(u^2_{n+1} - \frac{b^2}{1+t^2} u_{n+2}{}^2\right) : 4u_{n+2}.$$

Vyloučením u_n z rovnice (3) vznikne

$$(2x u_{n+2} + u_{n+1})^2 = \frac{b^2}{1+t^2} u_{n+2}{}^2$$

a odtud zpětným zavedením funkcí v_k obdržíme

$$(2v_{n+2} + v_{n+1})^2 (x^2 + y^2) = b^2 v_{n+2}^2.$$

Tato rovnice ukazuje, že v_{n+1} nemůže být obecně nulou. Kdyby vskutku vymizela, přešla by rovnice v pouhou $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}b^2$, což je případ kružnice jako konchoidy bodu.

Další nejnižší možný stupeň je čtvrtý. V něm se nabízejí dvě možnosti. Buď

$$v_{n+2} = \alpha (x^2 + y^2),$$

pak

$$[2\alpha (x^2 + y^2) + v_{n+1}]^2 = b^2\alpha^2 (x^2 + y^2).$$

Je-li

$$v_{n+1} = 2\alpha a x,$$

jde o Pascalovu závitnici

$$[x^2 + y^2 + ax]^2 = \tfrac{1}{4}b^2 (x^2 + y^2)$$

a pro $b=2a$ v kardioidu. Obecněji může být $v_{n+1}=\alpha (cx+dy)$.

Druhý případ by byl

$$v_{n+2} = \frac{x}{a} v_{n+1}, \text{ t. j. } \left(2\frac{x}{a} + 1\right)^2 (x^2 + y^2) = b^2 \frac{x^2}{a^2},$$

nebo

$$(2x + a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2,$$

což je konchoida přímky, čili Nikomédova konchoida.

Její obecná rovnice vyžaduje

$$v_{n+2} = \frac{mx + py}{a} v_{n+1},$$

tedy

$$(2mx + 2py + a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 (mx + ny)^2.$$

Že tomu tak je, zjistí se snadno, určíme-li geometrické místo středů stejných tětiv vedených z téhož bodu. Toto určeno rovnicemi

$$y = tx,\ x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{u_{n+1}}{2u_{n+2}} = -\frac{x}{2}\frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \text{ podle (4).}$$

Ale odtud máme rovnici

$$2v_{n+2} + v_{n+1} = 0.$$

Když sem zavedeme hodnoty z uvažovaných případů, vidíme, že v Pascalově závitnici je řídicí křivka

$$2\alpha (x^2 + y^2) + 2\alpha a x = 0,$$

obecněji

$$2\alpha (x^2 + y^2) + \alpha (cx + dy) = 0,$$

tedy kružnice procházející pólem.

Ve druhém případě, ježto se v_{n+1} zkrátí, je základem přímka $2x + a = 0$ resp. $2mx + 2py + a = 0$. Je-li základ parabola $y^2 = \frac{1}{2}ax$, je $v_{n+2} = y^2$, $v_{n+1} = ax$, a rovnice konchoidy $(2y^2 + ax)^2 (x^2 + y^2) = b^2y^4$, tedy jde již o rovnici stupně 6.

2. Nyní uvažujme úkol obecněji. Křivka řídicí měj rovnici

$$v_{n+k} + v_{n+k-1} + \ldots + v_n = 0 \tag{5}$$

a pól buď v počátku. Úkol se stane zcela aritmetickým, když zavedeme

$$u_k = v_{n+k} : x^{n+k},$$

takže

$$x^k u_k + x^{k-1} u_{k-1} + \ldots + u_0 = 0 \tag{6}$$

a když přidružíme k této rovnici novou stupně $2k$ s kořeny $x_k \pm \beta$, kde $\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + t^2}}$ a b je délka tětiv na paprscích $y = tx$ křivkou vyťatých.

Ukažme jednoduché případy. Buď $k = 2$ a značme U_i koeficienty přidružené rovnice. Pak bude

$$U_3 : U_4 = -2(x_1 + x_2) = 2u_1 : u_2,$$

$$U_2 : U_4 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 2\beta^2 = \frac{u_1^2}{u_2^2} + \frac{2u_0}{u_2} - 2\beta^2,$$

$$U_1 : U_4 = -[2x_1x_2(x_1 + x_2) - 2(x_1 + x_2)\beta^2] = \frac{2u_0u_1}{u_2^2} - \frac{2u_1\beta^2}{u_2^2},$$

$$U_0 : U_4 = \frac{u_0^2}{u_2^2} - \beta^2 \frac{u_1^2}{u_2^2} + 2\beta^2 \frac{u_0}{u_2} + \beta^4.$$

Hledaná rovnice je tedy

$$x^4 + \frac{2u_1}{u_2} x^3 + x^2 \left[\frac{u_1^2}{u_2^2} + \frac{2u_0}{u_2} - 2\beta^2\right] + x\left[\frac{2u_0u_1}{u_2^2} - \frac{2u_1\beta^2}{u_2^2}\right] + \\ + \frac{u_0^2}{u_2^2} - \beta^2 \left(\frac{u_1^2}{u_2^2} - 2\frac{u_0}{u_2}\right) + \beta^4 = 0$$

a po opětném zavedení funkcí v bude po uspořádání rovnice

$$x^4 (v_{n+2} + v_{n+1} + v_n)^2 - 2\beta^2 v_{n+2}(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) + \\ + \beta^4 v^2_{n+2} - \beta^2 x^2 (v_{n+1}^2 - 4v_{n+2}v_n) = 0.$$

Když nahradíme β hodnotou $bx : \sqrt{x^2 + y^2}$, bude

$$[(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n)(x^2 + y^2) - b^2 v_{n+2}]^2 + \\ b^2 (4v_nv_{n+2} - v_{n+1}^2)(x^2 + y^2) = 0.$$

Vidíme tedy, že k dané křivce stupně n přidružená konchoida je stupně $2(n + 2)$, který se sníží jen tehdy, obsahuje-li v_{n+2} faktor

$x^2 + y^2$, t. j. jde-li o křivky cirkulární. Na př. pro kissoidu

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0 \text{ je } v_{n+2} = 0,\ v_{n+1} = x(x^2 + y^2),$$
$$v_n = -ay^2,$$

a příslušná konchoida

$$[x(x^2 + y^2) - ay^2]^2 = b^2x^2(x^2 + y^2)$$

má stupeň 6 místo 10. Pól je v bodě úvratu kissoidy.

Bernoulliova lemniskata má

$$v_{n+2} = (x^2 + y^2)^2,\ v_{n+1} = 0,\ v_n = -2a^2(x^2 + y^2);$$

její přidružená konchoida je

$$[(x^2 + y)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) - b^2(x^2 + y^2)]^2 = 8a^2b^2(x^4 - y^4)$$

(její pól je ve dvojném bodě).

Pro případ $k = 3$ obdržíme pro koeficienty přidružené rovnice hodnoty:

$$U_5 : U_6 = -2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{2u_2}{u_3},$$

$$U_4 : U_6 = (\Sigma x_1)^2 + 2\Sigma x_1x_2 - 3\beta^2 = \frac{u_2^2}{u_3^2} + 2\frac{u_1}{u_3} - 3\beta^2,$$

$$U_3 : U_6 = -2\{\Sigma x_1^2(x_2 + x_3) + 4x_1x_2x_3 - 2\beta^2\Sigma x_1\} = \\ = 2\left\{\frac{u_2}{u_3}\frac{u_1}{u_3} - \frac{u_0}{u_3} + 2\beta^2\frac{u_2}{u_3}\right\},$$

$$U_2 : U_6 = (\Sigma x_1x_2)^2 + 2x_1x_2x_3\Sigma x_1 - 2\beta^2(\Sigma x_1)^2 + 4\beta^2\Sigma x_1x_2 - \\ - 4\beta^2\Sigma x_1x_2 + 4\beta^4 = \frac{u_1^2}{u_2^2} + 2\frac{u_0}{u_3}\frac{u_2}{u_3} - 2\beta^2\frac{u_2^2}{u_3^2} + 4\beta^4,$$

$$U_1 : U_6 = -2[x_1x_2x_3\Sigma x_1x_2 - \beta^2\Sigma(x_1^2 + x_2^2)x_3 + \beta^4\Sigma x_1] = \\ = 2\left[\frac{u_0}{u_3}\frac{u_1}{u_3} - \beta^2\left(\frac{u_2}{u_3}\frac{u_1}{u_3} - 3\frac{u_0}{u_3}\right) + \beta^4\frac{u_2}{u_3}\right],$$

$$U_0 : U_6 = \Pi(x_1^2 - \beta^2) = \frac{u_0^2}{u_3^2} - \beta^2\left[\frac{u_1^2}{u_3^2} - 2\frac{u_0u_2}{u_3^2}\right] + \\ + \beta^4\left[\frac{u_1^2}{u_3^2} - 2\frac{u_1}{u_3}\right] - \beta^6.$$

Zde značí Σ součet členů utvořených cyklicky z indexů 1, 2, 3, Π značí součin podle indexů 1, 2, 3. Hledaná rovnice konchoidy je tedy

$$x^2\left\{x^2\left(1 + \frac{v_{n+2} + v_{n+1} + v_n}{v_{n+3}}\right) - \beta^2\left(1 + \frac{v_{n+2}}{v_{n+3}}\right)\right\}^2 + \\ + x^4\beta^2\left[-1 - 2\frac{v_{n+2}\,v_{n+1}}{v_{n+3}^2} + 6\frac{v_n}{v_{n+3}} - \frac{v_{n+1}^2 - 2v_nv_{n+2}}{v_{n+3}^2} + \right.$$

$$+2\left(1+\frac{v_{n+2}}{v_{n+3}}\right)\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}+2\left(1+\frac{v_{n+2}}{v_{n+3}}\right)\frac{v_n}{v_{n+3}}\Bigg]+x^2\beta^4 2\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)-\beta^6=0.$$

Koeficient členu $x^4\beta^2$ dá se psát:

$$-1+8\frac{v_n}{v_{n+3}}-\frac{v_{n+1}^2}{v_{n+3}^2}+4\frac{v_n v_{n+2}}{v_{n+3}^2}+2\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}=$$

$$-\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)^2+4\frac{v_n}{v_{n+3}}\left(2+\frac{v_{n+2}}{v_{n+3}}\right).$$

Spojení posledních tří členů dá:

$$\beta^2\left[-x^4\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)^2+2\beta^2x^2\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)\right]+$$

$$+4\beta^2x^4\frac{v_n}{v_{n+3}}\left(2+\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)-\beta^6=-\beta^2\left[x^2\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_{n+3}}\right)-\beta^2\right]^2+$$

$$+4\beta^2x^4\frac{v_n}{v_{n+3}}\left(2+\frac{v_{n+2}}{v_{n+3}}\right).$$

Když nahradíme β jeho hodnotou, nabude rovnice tvaru:

$$[(v_{n+3}+v_{n+2}+v_{n+1}+v_n)(x^2+y^2)-b^2(v_{n+3}+v_{n+2})]^2(x^2+y^2)-$$

$$-b^2[(v_{n+3}-v_{n+1})(x^2+y^2)-b^2v_{n+3}]^2+$$

$$+4b^2(x^2+y^2)v_n(2v_{n+3}+v_{n+2})=0.$$

Případ $k=4$ vede k následujícím výrazům:

$$U_7:U_8=\frac{2u_3}{u_4},$$

$$U_6:U_8=\frac{2u_2}{u_4}+12\beta^2+\frac{u_3^2}{u_4^2}-16\beta^2=\frac{4u_2u_4+u_3^2}{u_4^2}-4\beta^2,$$

$$-U_5:U_8=-\frac{2u_1}{u_4}-6\beta^2\frac{u_3}{u_4}-\frac{u_3}{u_4}\left(2\frac{u_2}{u_4}+12\beta^2\right)+4\beta\,.\,6\beta\frac{u_3}{u_4}=$$

$$=-2\frac{u_1u_4+u_2u_3}{u_4^2}+6\beta^2\frac{u_3}{u_4},$$

$$U_4:U_8=\frac{2u_0u_4+u_2^2+2u_1u_3}{u_4^2}-\frac{2u_2u_4+3u_3^2}{u_4^2}\beta^2+6\beta^4;$$

$$-U_3:U_8=-\frac{2u_3u_0+2u_1u_2}{u_4^2}+4\frac{u_2u_3-u_1u_4}{u_4^2}\beta^2-6\frac{u_3}{u_4}\beta^4;$$

$$U_2:U_8=\frac{2u_0u_2+u_1^2}{u_4^2}+\frac{12u_0u_4-2u_2^2}{u_4^2}\beta^2+\frac{3u_3^2-2u_2u_4}{u_4^2}\beta^4-4\beta^6;$$

$$-U_1 : U_8 = -2\,\frac{u_0u_1}{u_4^2} - \frac{2u_2u_1 + 6u_0u_3}{u_4^2}\,\beta^2 - \frac{2u_1u_4 + 6u_2u_3}{u_4^2}\,\beta^4 -$$
$$- \frac{6u_3}{u_4}\,\beta^6 + \frac{4u_1u_2}{u_4^2}\,\beta^2 + \frac{4u_2u_3 + 8u_1u_4}{u_4^2}\,\beta^4 + \frac{8u_3}{u_4}\,\beta^6;$$
$$U_0 : U_8 = \frac{u_0^2}{u_4^2} - \beta^2\,\frac{u_1^2 - 2u_0u_3}{u_4^2} + \beta^4\left(\frac{u_2^2 - 2u_3u_1}{u_4^2} + \frac{8u_0 - 6u_0}{u_4}\right) -$$
$$- \beta^6\left(\frac{u_3^2}{u_4^2} - 2\,\frac{u_2}{u_4}\right) + \beta^8.$$

Rovnice pro úsečky je (po úpravě a zavedení funkcí v a dosazením za $\beta^2 = b^2x^2 : (x^2 + y^2)$):

$$[(v_{n+4} + v_{n+3} + v_{n+2} + v_{n+1} + v_n)\,(x^2 + y^2) - b^2\,(2v_{n+4} + v_{n+3} +$$
$$+ v_{n+2} - v_{n+1})^2]^2\,(x^2 + y^2)^2 + b^4\,[b^2v_{n+4} - (x^2 + y^2)\,(2v_{n+4} +$$
$$+ v_{n+3} - v_{n+2})]^2 - b^4\,[(v_{n+4} + v_{n+2} - v_{n+1})^2 - b^6v_{n+3}^2 -$$
$$- b^2\,(x^2 + y^2)\,[v_{n+3}^2 - 4v_{n+2}v_{n+4} - 6v_{n+1}v_{n+4} - 16v_nv_{n+4} +$$
$$+ 2v_{n+1}v_{n+2} - 8v_nv_{n+3} + 2v_{n+1}^2 - 4v_nv_{n+2} + v_{n+1}v_n] +$$
$$+ b^4\,(x^2 + y^2)^2\,[- v_{n+4}^2 - 2v_{n+3}v_{n+4} + v_{n+3}^2 + 2v_{n+2}v_{n+3} -$$
$$- 4v_{n+1}v_{n+4} + 2v_nv_{n+4}] = 0.$$

Takovým způsobem by se dalo pokračovat v tvoření rovnic konchoid křivek vyšších stupňů.

Naznačme však obecnou zákonitost těchto útvarů, kterou nám dá rovnice (6), když v ní nahradíme proměnnou x veličinou $x + \beta$ resp. $x - \beta$.

Tím přejde tato rovnice v

$$u_k\,(x + \beta)^k + u_{k-1}\,(x + \beta)^{k-1} + \ldots + u_0 = 0.$$

Když rozvineme podle binomické poučky tuto rovnici i rovnici platnou pro $-\beta$, obdržíme dvě rovnice jakožto kořenové útvary téže rovnice pro konchoidu. Proto hned oddělme část odpovídající sudým a lichým mocnitelům, takže po přeřadění podle stejných mocnin veličiny β bude

$$[u_kx^k + u_{k-1}x^{k-1} + u_{k-2}x^{k-2} + \ldots] + \beta^2\left[u_k\binom{k}{2}x^{k-2} +\right.$$
$$\left.+ u_{k-1}\binom{k-1}{2}x^{k-3} + u_{k-2}\binom{k-2}{2}x^{k-5} + \ldots\right]$$
$$+ \beta^4\left[u_k\binom{k}{4}x^{k-4} + u_{k-1}\binom{k-1}{4}x^{k-5} + \ldots\right] + \ldots$$
$$\pm \beta\left\{\left[u_k\binom{k}{1}x^{k-1} + u_{k-1}\binom{k-1}{1}x^{k-2} + \ldots\right] +\right.$$
$$\left.+ \beta^2\left[u_k\binom{k}{3}x^{k-3} + u_{k-1}\binom{k-1}{3}x^{k-5} + \ldots\right] + \ldots\right\} = 0.$$

Znásobíme-li obě rovnice a nahradíme-li β^2 hodnotou $\dfrac{b^2x^2}{x^2+y^2}$ i u_k funkcemi v_{n+k}, bude

$$\Big\{[v_{n+k}+v_{n+k-1}+\ldots+v_n]+\frac{b^2}{x^2+y^2}\Big[\binom{k}{2}v_{n+k}+ + \binom{k-1}{2}v_{n+k-1}+\ldots\Big] + \frac{b^4}{(x^2+y^2)^2}\Big[\binom{k}{4}v_{n+k}+\binom{k-1}{4}v_{n+k-1}+\ldots\Big]+\ldots\Big\}^2(x^2+y^2)$$

$$-b^2\Big\{\Big[\binom{k}{1}v_{n+k}+\binom{k-1}{1}v_{n+k-1}+\ldots\Big]+ + \frac{b^2}{x^2+y^2}\Big[\binom{k}{3}v_{n+k}+\binom{k-1}{3}v_{n+k-1}+\ldots\Big]+\ldots\Big\}^2=0.$$

Tím jsme přechod ke konchoidě od dané křivky provedli na cestě zcela racionální.

3. Rozšiřme pojem konchoid do oboru geometrie afinní a projektivní.

Jako ukázku možnosti takového postupu uvažujme kardioidu, kterou lze, jak víme, brát za konchoidu kružnice s pólem na kružnici a s průměrem kružnice jako konstantou.

Vyjdeme však od jiné definice kardioidy. Z pevného bodu kružnice, který zvolíme za počátek soustavy, veďme tětivu, jejím středem odpovídající průměr základní kružnice, a tento pošiňme po tětivě tak, aby průsečík s tětivou přešel v pól. Má-li tětiva směr α, rozdělí se průměr k ní kolmý (sdružený) na dva úseky $a \pm a \sin\alpha$, a po posunu do pólu jsou tyto úseky průvodiči nové křivky, při čemž je polární úhel $\varphi = \alpha + 90°$ resp. $\alpha + 270°$. Tedy platí $r = a\,(1 \pm \cos\varphi)$, což vskutku odpovídá kardioidě.

Tato definice umožňuje přejít ke kardioidě elipsy, a to nejen pro pól ležící ve vrcholu, ale i pro vrchol ležící v libovolném jejím bodě. Tento úkon lze provésti také pouhým rovnoběžným promítáním cirkulární kardioidy do jiné roviny, která s rovinou kardioidy není rovnoběžná; jde-li o hyperbolu, je nutný postup užívající sdružených průměrů.

Jiná konstrukce by byla tato: Z pólu na kuželosečce vedeme paprsek. Středem křivky vedeme k němu rovnoběžku, a v průsečíku této s kuželosečkou sestrojíme k této tečnu, jejíž průsečík s paprskem náleží hledané křivce.

Proveďme popsaný úkon na libovolné kuželosečce se středem na ose x-ové, jdoucí počátkem souřadnic:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\beta\frac{\delta}{\alpha}y = 0.$$

K určení úsečky středu uvažujme tětivy rovnoběžné s osou x. Pro ně je geometrické místo středů

$$\xi = -\frac{\beta y + \delta}{\alpha}.$$

Průsečík s osou úseček má souřadnice: $\xi = -\frac{\delta}{\alpha}$, $\eta = 0$ (střed křivky).

Libovolná sečna, vedená počátkem souřadnic, $y = tx$, dá pro průsečík

$$x = -2\delta \frac{\alpha + \beta t}{\alpha [\alpha + 2\beta t + \gamma t^2]},$$

takže její střed je:

$$x = -\delta \frac{\alpha + \beta t}{\alpha [\alpha + 2\beta t + \gamma t^2]}, \quad y = -\delta t \frac{\alpha + \beta t}{\alpha [\alpha + 2\beta t + \gamma t^2]}.$$

Průměr sdružený se sečnou je spojnice tohoto středu se středem křivky; dostaneme pro něj rovnici

$$y = -\frac{\alpha + \beta t}{\beta + \gamma t}\left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right).$$

Průsečíky tohoto průměru s křivkou se snadno určí, přepíšeme-li její rovnici na tvar:

$$\alpha\left(x^2 + \frac{2\delta}{\alpha}x\right) + 2\beta y\left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right) + \gamma y^2 = 0.$$

Pak je totiž

$$\left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2 \left(\alpha - 2\beta\frac{\alpha + \beta t}{\beta + \gamma t}\right) + \gamma\left(\frac{\alpha + \beta t}{\beta + \gamma t}\right)^2 \left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{\alpha}.$$

Levá strana bude mít ve faktoru čitatele, který lze psát:

$$-\alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma - 2\beta^3 t + 2\alpha\beta\gamma t + \alpha\gamma^2 t^2 - \gamma\beta^2 t^2,$$

takže lze vytknout diskriminant $\alpha\gamma - \beta^2$, a obdržíme:

$$\left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{(\alpha\gamma - \beta^2)(\alpha + 2\beta t + \gamma t^2)}{(\beta + \gamma t)^2} = \frac{\delta^2}{\alpha},$$

a průsečíky mají úsečky:

$$x_{1,2} = -\frac{\delta}{\alpha} \pm \delta \sqrt{\frac{(\beta + \gamma t)^2}{\alpha(\alpha\gamma - \beta)^2 (\alpha + 2\beta t + \gamma t^2)}}.$$

Tato délka je zároveň délka úsečky bodu hledané kardioidy. Týž bod leží na rovnoběžce s průměrem, vedené počátkem souřadnic:

$$y = -\frac{\alpha + \beta t}{\beta + \gamma t}\, x.$$

Když ve jmenovateli pod odmocninou nahradíme trojčlen výrazem $\alpha + \beta t + t\,(\beta + \gamma t)$, můžeme zaň psát

$$\left(-\frac{y}{x} + t\right)(\beta + \gamma t),$$

a stejně ve jmenovateli předcházejícího členu. Tedy obdržíme

$$x\,[\alpha\,(y - xt) - \delta t] = \delta \sqrt{\frac{-\alpha\,(y - \gamma t)\,(\beta + \gamma t)\,x}{\alpha\gamma - \beta^2}}.$$

Když sem dosadíme $t = -\dfrac{\alpha x + \beta y}{\beta x + \gamma y}$ z předposlední rovnice, lze zkrátit x, neboť $\beta + \gamma t = \dfrac{x\,(\beta^2 - \alpha\gamma)}{\beta x + \gamma y}$, a obdržíme

$$[\alpha\,(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) + \delta\,(\alpha x + \beta y)]^2 = \delta^2\alpha\,(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2).$$

Kdyby byla základní kuželosečka kružnice, bylo by $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$, tedy

$$[x^2 + y^2 + \delta x]^2 = \delta^2\,(x^2 + y^2)$$

ve shodě s rovnicí nahoře uvedenou.

Kdyby byla základní rovnice rovnicí rovnoosé hyperboly v osové poloze, tedy $\alpha = -\gamma = 1$, $\beta = 0$, byla by hledaná křivka

$$(x^2 - y^2 + \delta x)^2 = \delta^2\,(x^2 - y^2).$$

Při označení $x = \varrho \sec \alpha$, $y = \varrho \operatorname{tg} \alpha$ měli bychom $\varrho + \delta \sec \alpha = \pm\, \delta$.

Pro parabolu by tato definice selhala, protože by pošinutý sdružený průměr o polovici příslušné tětivy padl vždy do hlavní osy.

Ale výše zmíněný způsob vytvoření přidružené křivky dovoluje další výsledek tím, že oba úseky průměru pošineme do druhého koncového bodu tětivy, t. j. úsečka bodu křivky se bude rovnat průmětu celé tětivy do osy úseček, zvětšenému o průmět části sdruženého průměru, jež leží mezi tětivou a základní kuželosečkou. Tedy je

$$x = -\frac{\delta}{\alpha} + 2\frac{\delta}{\alpha}\frac{\alpha + \beta t}{\alpha + 2\beta t + \gamma t^2} + \delta \sqrt{\frac{(\beta + \gamma t^2)}{\alpha\,(\alpha\gamma - \beta^2)\,(\alpha + 2\beta t + \gamma t^2)}}.$$

Rovnoběžka ke sdruženému průměru koncem tětivy má rovnici

$$y = -\frac{\alpha + \beta t}{\beta + \gamma t}\left(x + \frac{\delta}{\alpha}\right).$$

Vyloučení parametru t z obou těchto rovnic provedeme zase postupně:

$$x = -\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha}\,\frac{y}{y - \left(\alpha + \frac{2\delta}{\alpha}\right)t} +$$

$$+ \delta \sqrt{\frac{(\beta + \gamma t)\left(x + \frac{2\delta}{\alpha}\right)}{\alpha\,(\alpha\gamma - \beta^2)\left[-y + t\left(\gamma + \frac{2\delta}{\alpha}\right)\right]}}.$$

Ježto nyní

$$t = -\frac{\alpha x + \beta y + 2\delta}{\beta x + \gamma y + \frac{2\beta\delta}{\alpha}},$$

obdržíme

$$y - t\left(x + \frac{2\delta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 4\delta x + \frac{4\beta\delta}{\alpha}\,y + \frac{4\delta^2}{\alpha}}{\beta x + \gamma y + \frac{2\beta\delta}{\alpha}},$$

$$\beta + \gamma t = \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma)\left(x + \frac{2\delta}{\alpha}\right)}{\beta x + \gamma y + \frac{2\beta\delta}{\alpha}}.$$

Po dosazení bude

$$x = -\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha}\,\frac{y\left(\beta x + \gamma y + \frac{2\beta\delta}{\alpha}\right)}{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 4\delta x + \frac{4\beta\delta}{\alpha}\,y + \frac{4\delta^2}{\alpha}} +$$

$$+ \delta \sqrt{\frac{\left(x + \frac{2\delta}{\alpha}\right)^2}{\alpha\left[\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 4\delta x + \frac{4\beta\delta y}{\alpha} + \frac{4\delta^2}{\alpha}\right]}}$$

nebo když na obou stranách přičteme $\frac{2\delta}{\alpha}$, bude čitatel racionální části vpravo:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 4\delta x + \frac{4\beta\delta}{\alpha}\,y + \frac{4\delta^2}{\alpha} - \beta xy - \frac{2\beta\delta}{\alpha}\,y =$$

$$= \left(x + \frac{2\delta}{\alpha}\right)(\alpha x + \beta y + 2\delta).$$

Tedy vidíme, že činitel $x + \frac{2\delta}{\alpha}$, který není částí křivce vlastní, odpadne, a obdržíme po menší úpravě

$$[(\alpha x + 2\delta)^2 + 2\beta y\,(\alpha x + 2\delta) + \alpha\gamma y^2 - \delta\,(\alpha x + \beta y + 2\delta)]^2 = \\ = \delta^2\,[(\alpha x + 2\delta)^2 + 2\beta y\,(\alpha x + 2\delta) + \gamma\alpha y^2].$$

Je-li základní křivka kružnice, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$, zní rovnice:

$$[(x + 2\delta)^2 + y^2 - \delta\,(x + 2\delta)]^2 = \delta^2\,[(x + 2\delta)^2 + y^2].$$

Pro rovnoosou hyperbolu mění se znamení jen u y^2.

Je-li základní křivka parabola, neztratí rovnice přidružené křivky smysl. Neboť pro tento případ jest $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$. Ale abychom získali její rovnici, položme nejprve $\beta = 0$ a limitujme pro $\alpha \to 0$. Tím obdržíme

$$4\delta^2\,(3\delta x + y^2) = \delta^2\,(4\delta x + y^2);$$

jde tedy o parabolu $3y^2 + 8\delta x = 0$.

Jako u předešlé kardioidy, můžeme i zde vztahovat přidruženou křivku na bod na ní ležící, pošineme-li soustavu, a zavedeme-li novou souřadnici

$$X = x + \frac{2\delta}{\alpha}.$$

Pak je

$$[\alpha^2 X^2 + 2\beta\alpha X y + \alpha\gamma y^2 - \delta\,(\alpha X + \beta y)]^2 = \\ = \delta^2\,[\alpha^2 X^2 + 2\alpha\beta X y + \alpha\gamma y^2].$$

Význam této křivky vynikne hned, když ji přepíšeme pro kružnici:

$$[X^2 + y^2 - \delta X]^2 = \delta^2\,(X^2 + y^2).$$

Je to zase kardioida, ale její kuspidální bod je na protějším konci základního průměru.

Vidíme tedy, že když vedeme pevným bodem středové kuželosečky tětivu a sestrojíme průměr s ní sdružený, vznikne posunutím tohoto do pevného bodu z koncových bodů průměru kardioida s bodem úvratu v pevném bodě; je-li kuželosečka parabolou, přejde křivka v přímku.

Když však pošineme průměr do druhého konce tětivy, vznikne kardioida, která má v pevném bodě obyčejný bod a úvrat je v protějším konci průměru jdoucího pevným bodem tětivy.

Jde-li v tomto případě o parabolu, probíhá oblouk kardioidy v okolí pevného bodu jako oblouk paraboly. Podrobněji o této vlastnosti poučí vyšetření okolí počátku.

Daná základní kuželosečka má v počátku tečnu $y\,\frac{\beta}{\alpha} + x = 0$, a pro studium sousedních bodů zvětšme úsečku o ε, takže jde o přímku $x = -\frac{\beta}{\alpha} y + \varepsilon$, kde ε je velmi malá veličina.

Dosadíme-li tento výraz do rovnice kuželosečky, psané ve tvaru

$$\alpha \left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) y^2 + 2\delta \left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right) = 0,$$

plyne hned

$$\alpha\varepsilon^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) y^2 + 2\delta\varepsilon = 0.$$

Když bereme ε za veličinu malou prvního řádu, lze $\alpha\varepsilon^2$ zanedbat, a vidíme, že sousední body odpovídají přibližně parabolickému tvaru

$$y^2 = -\frac{2\delta\varepsilon}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}}.$$

Přepíšeme-li podobně rovnici kardioidy na tvar

$$[(\alpha x + 2\delta + \beta y)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2) y^2 - \delta (\alpha x + \beta y + 2\delta)]^2 =$$
$$= \delta^2 [(\alpha x + 2\delta + \beta y)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2) y^2],$$

dá substituce $\alpha x + \beta y \doteq \alpha\varepsilon$ ihned:

$$[(2\delta + \alpha\varepsilon)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2) y^2 - \delta (2\delta + \alpha\varepsilon)]^2 =$$
$$= \delta^2 [(\alpha\varepsilon + 2\delta)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2) y^2].$$

Při umocňování zanedbejme hned ε^2 proti ε, takže

$$[2\delta^2 + y^2 (\alpha\gamma - \beta^2) + 3\alpha\delta\varepsilon]^2 = \delta^2 [4\delta^2 + (\alpha\gamma - \beta^2) y^2 + 4\alpha\delta\varepsilon].$$

Při další úpravě je také y^2 malé, a lze zanedbat y^4, jakož i $y^2\varepsilon$, takže bude

$$4\delta^2 y^2 (\alpha\gamma - \beta^2) + 12\alpha\delta^3\varepsilon = \delta^2 y^2 (\alpha\gamma - \beta^2) + 4\alpha\delta^3\varepsilon$$

nebo

$$3\delta^2 y^2 (\alpha\gamma - \beta^2) + 8\alpha\delta^3\varepsilon = 0,$$

což dá

$$y^2 = -\frac{8}{3} \varepsilon \frac{\delta y}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}}.$$

Tedy je zase dvojmoc y^2 úměrná veličině ε, ale pro kardioidu je koeficient úměrnosti v poměru $\frac{4}{3}$ větší, kterážto vlastnost se tedy zachová stejně při afinitě i kolineaci.

Vedle konstrukce vyložené při výpočtu, jež je založena na posouvání sdružených průměrů, můžeme ve speciálním případě kardioidy příslušné k rovnoosé hyperbole udati tyto způsoby:

Z výrazu výše uvedeného $\varrho = -\delta \sec \alpha \pm \delta$ vidíme, že sestrojíme-li na polární ose úsečku δ o koncovém bodě v počátku O a v jejím konci kolmici a protneme-li tuto libovolným paprskem z O, jehož odchylka od osy jest α, vznikne na paprsku úsečka $\delta \sec \alpha$. K ní přičteme a odečteme δ. [Vzniklé body A, B náležejí Nikomedově konchoidě, což ukazuje úzký vztah této křivky s kardioidou rovnoosé hyperboly.] Bodem A proložme kružnici o středu O, až protne v M polární osu a zároveň vztyčme v B kolmici k ose, až protne paprsek v N.

Kolmice v M k ose polární, a rovnoběžka k ní v N určují bod kardioidy rovnoosé hyperboly.

Jinou konstrukci obdržíme, když rovnici kardioidy rovnoosé hyperboly

$$(x^2 - y^2 + \delta x)^2 = \delta^2 (x^2 - y^2)$$

napíšeme v polárních souřadnicích r, φ; dostaneme

$$(r^2 \cos 2\varphi + r\delta \cos \varphi)^2 = \delta^2 r^2 \cos 2\varphi$$

nebo

$$r = -\frac{\delta \cos \varphi}{\cos 2\varphi} \pm \frac{\delta}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = -r_1 \pm r_2,$$

když zavedeme

$$r_1 = \frac{\delta \cos \varphi}{\cos 2\varphi}, \quad r_2 = \frac{\delta}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Tyto rovnice zní v pravoúhlých souřadnicích:

$$x^2 - y^2 = \delta x, \quad x^2 - y^2 = \delta^2.$$

Tedy kardioida rovnoosé hyperboly má průvodič rovný součtu nebo rozdílu průvodičů dvou rovnoosých hyperbol, které mají hlavní osu v téže přímce. První má poloosy rovné $\frac{1}{2}\delta$ a jeden vrchol v počátku soustavy, druhá má poloosy δ a střed v počátku soustavy. Tato konstrukce jest úplná kopie kardioidy, při níž se přičítá poloměr kruhu k průvodiči kruhu vztaženého na bod obvodu poloměru polovičního.

Nyní definujme kardioidu projektivně.

Dána kuželosečka k a na ní pevný bod O. Mimo to buď v rovině pevná přímka p. Veďme bodem O paprsek q, který protne přímku p v bodě M, a k bodu M přidružme poláru m vzhledem ke kuželosečce, která protne paprsek q v N, kuželosečku v bodech S_1 a T_1, a přímku p v bodě L. Spojme body S_1 a T_1 s bodem M, a obě tyto spojnice s a t protněme přímkou OL v bodech S a T. Otáčí-li se q kolem O, opisují S a T kardioidu s bodem kuspidálním v O.

Kdybychom však přímky s a t proťali spojnicí bodu L s druhým průsečíkem O paprsku q s kuželosečkou, obdržíme body S_2 a T_2, které naplní druhou kardioidu s kuspidálním bodem ve druhém průsečíku s kuželosečkou k spojnice bodu O s pólem přímky p.

Tuto konstrukci vyjádříme analyticky.

Kuželosečku k a poláru p zvolme tak, aby byla p stranou trojúhelníka souřadnic, spojující vrcholy *1, 2*, vrchol *3* buď pól téže strany vzhledem ke k, a pevným bodem O na k veďme stranu *32* trojúhelníka. Pak lze zvoliti vrchol *1* na p libovolně. Kuželosečka měj rovnici:

$$k \equiv \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 0,$$

a bod O má souřadnice $x : y : z = 0 : n : p$.

Na straně *12* zvolme bod M $(\mu, \nu, 0)$ a stanovme průsečíky jeho poláry $\frac{x\mu}{m^2} + \frac{y\nu}{n^2} = 0$ s křivkou k. Plyne tedy

$$x = -y\frac{\nu m^2}{\mu n^2},$$

což dosazeno do rovnice pro k dá:

$$x : y : z = \mp \nu m^2 : \pm \mu n^2 : p\sqrt{\nu^2 m^2 + \mu^2 n^2}.$$

Průsečík L poláry se stranou *12* nebo $z = 0$ je:

$$x : y : z = \frac{m^2}{\mu} : \frac{n^2}{\nu} : 0.$$

Jeho spojnice s O má rovnici:

$$\frac{x}{m}\frac{n}{\nu} + \frac{m}{\mu}\left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right) = 0.$$

Spojnice bodu M s jedním průsečíkem jeho poláry a kuželosečky má rovnici:

$$z\,(\mu^2 n^2 + \nu^2 m^2) - p\,(x\nu - y\mu)\sqrt{\nu^2 m^2 + \mu^2 n^2} = 0.$$

Průsečík obou posledních přímek patří hledanému geometrickému místu, které vznikne, když se pohybuje bod M po straně *12* základního trojúhelníka.

Dosadíme-li tedy

$$\mu = -\nu\frac{m}{\nu}\left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right) : \frac{x}{m}$$

z první rovnice do druhé, což dá:

$$\frac{z^2}{p^2}\left[\left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right)^2 + \frac{x^2}{m^2}\right]^2 = \left[\frac{x^2}{m^2} + \frac{y}{n}\left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right)\right]^2 \left[\frac{x^2}{m^2} + \left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right)^2\right],$$

nebo po zkrácení faktoru, který nepatří ke hledané křivce,

$$\frac{z^2}{p^2}\left[\left(\frac{y}{n}-\frac{z}{p}\right)^2+\frac{x^2}{m^2}\right]=\left[\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-\frac{yz}{np}\right]^2.$$

Jde tedy vskutku o křivku stupně čtvrtého, a na ní leží i bod odpovídající druhému průsečíku poláry bodu M s kuželosečkou.

Avšak mohli jsme vyjít od bodu O_1, který leží na spojnici vrcholů *2*, *3*, a na kuželosečce k. Pro něj platí $x : y : z = 0 : n : -p$ a jemu odpovídající kardioida se dá napsati:

$$\frac{z^2}{p^2}\left[\left(\frac{y}{n}+\frac{z}{p}\right)^2+\frac{x^2}{m^2}\right]=\left[\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{yz}{np}\right]^2.$$

Ovšem mohl být zvolen jiný způsob úvahy.

Buďte dány: kuželosečka k, přímka p a na k bod O. Určeme pól přímky p ke k a spojme jej s bodem O. Je-li T průsečík spojnice s přímkou p, zvolme pár paprsků, které jsou touto spojnicí a přímkou p odděleny harmonicky a jejich průsečíky *1*, *2* s kuželosečkou spojme. Tato strana základního trojúhelníka s protějším vrcholem $O \equiv 3$ dávají základní trojúhelník (*1*, *2*, *3*), pro který přímka p je harmonikálou pólu vzhledem na kuželosečku k.

Pak má kuželosečka rovnici

$$k \equiv \frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0,$$

a přímka je:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=0.$$

Na přímce p zvolme bod (λ, μ, ν), pro který tedy

$$\frac{\lambda}{m}+\frac{\mu}{n}+\frac{\nu}{p}=0.$$

Abychom ušetřili psaní, zaveďme nové znaky x, y, z na místo $\frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \frac{z}{p}$ resp. λ, μ, ν na místo $\frac{\lambda}{m}, \frac{\mu}{n}, \frac{\nu}{p}$, takže předchozí rovnice zní jednoduše:

$$k \equiv yz + zx + xy = 0,\ p \equiv x + y + z = 0,\ \lambda + \mu + \nu = 0.$$

Polára bodu (λ, μ, ν) vzhledem na k je:

$$x\lambda + y\mu + z\nu = 0.$$

Tato vytne na p bod L:

$$\frac{x}{\mu-\nu}=\frac{y}{\nu-\lambda}=\frac{z}{\lambda-\mu},$$

a protne k v bodech určených rovnicí

$$y^2\mu - 2yz\lambda + z^2\nu = 0,$$

z čehož

$$x : y : z = \frac{\mu - \sqrt{\lambda^2 - \mu\nu}}{\lambda} : \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu\nu}}{\mu} : 1.$$

Spojme bod odpovídající hornímu znamení s bodem (λ, μ, ν); bude:

$$\frac{1}{\lambda}(\mu - \sqrt{\lambda^2 - \mu\nu})(\mu z - \nu y) + \frac{1}{\mu}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu\nu})(\nu x - \lambda z) +$$
$$+ \lambda y - \mu x = 0.$$

Spojme bod L s vrcholem $O \equiv 3$, což dá

$$x(\nu - \lambda) - y(\mu - \nu) = 0.$$

Z obou těchto rovnic vylučme nyní parametry λ, μ, ν, pro které je $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Poslední dvě rovnice dají

$$\lambda : \mu : \nu = -(x + 2y) : (2x + y) : (-x + y).$$

Upravme nyní poslední rovnici, oddělíce nejprve členy racionální:

$$(\mu^3 - \lambda^3)z - \mu^2\nu y + \lambda^2\nu x +$$
$$+ \lambda^2\mu y - \mu^2\lambda x + \sqrt{\lambda^2 - \mu\nu}\,[\lambda\nu x + \mu\nu y - \lambda^2 z - \mu^2 z] = 0.$$

Zjistíme snadno, že lze rovnici zkrátit $\sqrt{\lambda^2 - \mu\nu}$; bude

$$[(\mu - \lambda)z + \mu y - \lambda x]\sqrt{\lambda^2 - \mu\nu} + \lambda\nu x + \mu\nu y - z(\nu^2 - 2\lambda\mu) = 0.$$

Odtud

$$[3(x + y)z + x^2 + y^2 + 4xy]\sqrt{3(x^2 + xy + y^2)} +$$
$$+ (x - y)(x^2 - y^2) - z(5x^2 + 5y^2 + 8xy) = 0.$$

Tuto rovnici racionalisujeme (je patrno, že bychom k téže rovnici dospěli pro dolní znamení hodnot kořenů pro $x : y : z$ nahoře napsaných) a srovnáme členy rovnice podle mocnin veličiny z; obdržíme:

$$z^2[27(x + y)^2(x^2 + xy + y^2) - (5x^2 + 5y^2 + 8xy)^2] + 2z[9(x + y)(x^2 + y^2 + 4xy)(x^2 + xy + y^2) + (5x^2 + 5y^2 + 8xy)(x - y)(x^2 - y^2)] + 3(x^2 + y^2 + 4xy)^2(x^2 + xy + y^2) - (x - y)^2 \cdot (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Rovnice křivky se dá zkrátit výrazem $2x^2 + 5xy + 2y^2$, který neznamená křivku, nýbrž pár přímek; potom zbude:

$$z^2(x - y)^2 + 14z(x + y)^3 + x^4 + 12x^3y + 10x^2y^2 + 12xy^3 + y^4 = 0;$$

tuto rovnici lze také psáti

$$[z(x - y) + 7(x + y)^2]^2 =$$
$$= 4\{12x^4 + 46x^3y + 71x^2y^2 + 46xy^3 + 12y^4 - 7yz(x + y)^2\}.$$

Jde tedy zase o rovnici 4. stupně; vidíme, že při opsané kuželosečce základnímu trojúhelníku zvláštní stavba rovnice, která dovoluje další úsudky o vlastnostech křivky, zaniká. Rovnici ovšem dlužno nyní uvést na tvar žádoucí tím, že zase nahradíme x, y, z veličinami $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{n}$, $\frac{z}{p}$ resp.

4. Kardioidu a Nikomedovu konchoidu můžeme obdržet jistými konstrukcemi kružítkovými, navzájem obdobnými, a zároveň získat tímto způsobem i další křivky.

Uvažujme kružnici procházející počátkem O, se středem na polární ose. Její rovnice je $r = a \cos \varphi$. Zvolme na ní bod M a z něho jako středu opišme kružnici k_1 poloměru MO, která protne polární osu v bodě N, takže $\overline{ON} = 2a \cos^2 \varphi$.

Opíšeme-li nyní poloměrem $\overline{ON}$ kružnici k_2 z O jako středu, protne tato kružnici k_1 ve druhém průsečíku L, který náleží hledanému geometrickému místu. Konstrukci lze provést pouhým kružítkem.

Ježto jest útvar souměrný podle osy OM, jest $\sphericalangle NOL = \sphericalangle MOL = \varphi$, tedy polární úhel ψ průvodiče $R = \overline{OL} = \overline{ON}$ roven dvojnásobku úhlu φ, t. j. $\psi = 2\varphi$, a rovnice křivky je

$$R = 2a \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi = a \cos \psi + a,$$

což je rovnice kardioidy.

Derivace podle ψ dává subnormálu

$$S_n = R' = - a \sin \psi = - 2a \sin \varphi \cos \varphi = - R \operatorname{tg} \varphi.$$

Odtud hned vidíme, ježto je $\sphericalangle MLO = \varphi$, že spojnice LM, t. j. poloměr pomocné kružnice k body křivky vedený, je normála. Prodloužení délky $\overline{LM}$ přes M o $\frac{1}{3}$ její hodnoty dává střed křivosti, neboť poloměr křivosti

$$\varrho = \tfrac{4}{3}\, a \cos \varphi = \tfrac{4}{3}\, r.$$

Stejně jsme mohli vyjít od kružnice pootočené o úhel β, $r = a \cos (\beta - \varphi)$, čímž by vzniklo geometrické místo

$$R = a \cos \beta \cos \psi + a \sin \beta \sin \psi + a \cos \beta = a \cos (\beta - \psi) + a \cos \beta.$$

Tato rovnice znamená Pascalovu závitnici.

Obálka kružnic o středu M na kruhu $r = a \cos \varphi$ a procházejících počátkem O je podle předchozího kardioida, neboť obě křivky mají společnou tečnu v průseku s kružnicí $R = \overline{OL}$.

Kdyby bod M ležel na Dioklově kissoidě

$$r = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

byla by vylíčenou metodou vytvořena křivka

$$R = 2a \sin^2 \varphi = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi = a - a \cos \psi,$$

tedy zase kardioida.

Kdyby však bod M opisoval kružnici otočenou o $90°$, $r = a \sin \varphi$, byla by rovnice přidružené křivky

$$R = 2a \sin \varphi \cos \varphi = a \sin \psi,$$

tedy táž kružnice, ale opsaná dvakrát, zatím co M opíše danou kružnici jednou.

Obálku vytvořujících kružnic

$$x^2 - y^2 - ay = ax \sin \psi - ay \cos \psi$$

dostaneme, vyloučíme-li ψ odtud a z rovnice derivované

$$0 = ax \cos \varphi + ay \sin \psi;$$

dostaneme

$$(x^2 + y^2 - ay)^2 = a^2 (x^2 + y^2),$$

t. j. kardioidu

$$r = a \sin \psi + a,$$

jak výše tvrzeno.

Zvolme za základní křivku rovnoosou hyperbolu

$$x^2 - y^2 = ax,$$

nebo v polární soustavě

$$r = a \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

Nyní je přidružená křivka

$$R = 2a \frac{\cos^2 \varphi}{\cos 2\varphi} = a \frac{1 + \cos \psi}{\cos \psi} = a \sec \psi + a,$$

což značí Nikomedovu konchoidu. K určení polární subnormály poslouží rovnice:

$$S_n = R' = \frac{a \sin \psi}{\cos^2 \psi} = R \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \psi} = R \frac{\operatorname{tg} \psi}{2 \cos \varphi}.$$

Ježto

$$\overline{OM} = \frac{R}{2 \cos \varphi}, \text{ je } S_n = \overline{OM} \operatorname{tg} \psi.$$

Sklopí se tedy $\overline{OM}$ na OL do $\overline{OL'}$, bodem L' se vztýčí kolmice k OL, až protne polární osu v bodě T. Délka $\overline{L'T}$ rovna subnormále a stačí ji pošinouti do bodu O.

Obálka kružnic, jež mají střed v bodě M a jdou počátkem O

$$(x^2 + y^2 - ax) \cos \psi - ay \sin \psi = ax,$$

plyne vyloučením ψ z této rovnice a z derivované:

$$(x^2 + y^2 - ax) \sin \psi + ay \cos \psi = 0.$$

Odtud

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax (x^2 + y^2) + a^2y^2 = 0.$$

Polární tvar

$$r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta = 0$$

dá

$$r = a \cos \vartheta \pm a \sqrt{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}$$

a značí křivku, která vznikne, když průvodič kružnice $r_1 = a \cos \vartheta$ zvětšíme nebo zmenšíme o průvodič Bernoulliovy lemniskaty $r_2 = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$, mající hlavní osu v polární ose, totiž

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Jinak lze vytvořit touž křivku kruhovou inversí paraboly $y^2 = 2a (x - \frac{1}{2}a)$, mající v ose pořadnic řídicí přímku, je-li střed inverse v počátku a mocnost inverse a^2.

Kdyby bod M ležel na hyperbolické kissoidě

$$x (x^2 - y^2) = ay^2 \equiv r = a \frac{\sin^2 \psi}{\cos 2\varphi \cos \varphi},$$

byla by přidružená křivka

$$R = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos 2\varphi} = a \frac{1 - \cos \psi}{\cos \psi} = a \sec \psi - a,$$

což je druhá větev Nikomedovy konchoidy.

Kdyby bod M opisoval hyperbolu rovnoosou, otočenou o 90°, t. j.

$$x^2 - y^2 = ay \equiv r = \frac{a \sin \varphi}{\cos 2\varphi},$$

obdrželi bychom

$$R = 2a \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos 2\varphi} = a \operatorname{tg} \psi,$$

což je křivka kapa.

Obálka kružnic o středu M a procházejících bodem O, tedy majících rovnici

$$(x^2 + y^2 + ay) \cos \psi - ax \sin \psi = ay,$$

je

$$(x^2 + y^2 + ay)^2 + a^2x^2 = a^2y^2,$$

což je rovnice téhož typu jako prve s vyměněnými směry souřadných os.

Je jistě pozoruhodná zcela obdobná účast kružnice a hyperboly s jedné strany, a kissoidy cirkulární a hyperbolické s druhé strany na výsledcích užité transforman, ale její důvod v jednoduché stavbě polárních rovnic těchto křivek je zřejmý hned z názoru.

Při tom kružnice a hyperbola jsou pro vytvoření kardioidy a Nikomedovy konchoidy s bodem kuspidálním případy jen výjimečné. Neboť kdybychom obecnou závitnici Pascalovu

$$R = 2a \cos \psi \pm 2b$$

podrobili zpětné transformaci, vznikne

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2) \pm b(x^2 + y^2),$$

jež odpovídá strofoidě, kissoidě nebo kružnici podle hodnoty a znamení veličiny b.

Podobně obecná Nikomedova konchoida $R = 2a \sec \psi \pm 2b$ vede zpětně na

$$x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2) \pm b(x^2 - y^2),$$

což je hyperbolický korelát strofoidy a podle hodnoty a znamení b dá různé základní křivky.

Metoda právě vyložená může dát i složitější křivky. Buď dána kružnice k se středem na polární ose ve vzdálenosti b od O. V k veďme průměr kolmý k polární ose, který má koncové body A a B. Libovolný paprsek p středem O vedený, o úhel φ od osy odchýlený, protne průměr AB v bodě C. Vztyčme v C kolmici k AB, jež protne kružnici k v bodech E, F, a sestrojme nad průměrem EF kružnici. Její průseky M_1 a M_2 s paprskem p náležejí hledané křivce základní.

Jednoduchá úvaha o mocnosti bodu C ke kružnici k ukazuje, že

$$\overline{CE}^2 = \overline{CA} \, . \, \overline{BC}.$$

Ale

$$\overline{CA} = a - b \operatorname{tg} \varphi, \quad \overline{BC} = a + b \operatorname{tg} \varphi,$$

a proto

$$CE = \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sec \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Má tedy geometrické místo bodů M_1 a M_2 rovnici:

$$r = a \sec \varphi \pm \sec \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi},$$

nebo

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Když z M_1 jako středu opíšeme kružnici poloměrem $\overline{M_1O}$, protne osu x-ovou v bodě N_1 a když pak sama proťata kružnicí poloměru ON_1 z bodu O, dá bod křivky L_1, pro který platí

$$R = \overline{ON_1} = 2r \cos \varphi = 2a \pm \sqrt{2(a^2 + b^2) + 2(a^2 + b^2) \cos \psi}.$$

To je rovnice jedné části konchoidy. Druhá část se obdrží sestrojením křivky souměrné k této podle počátku O.

Tím jsme obdrželi konchoidu křivky

$$R = \sqrt{2(a^2 - b^2) + 2(a^2 + b^2)\cos\psi}$$

nebo

$$(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 - 2(a^2 + b^2)]^2 = 4(a^2 + b^2)^2 x^2.$$

Uvažujme jiný případ, kdy kružnice k nahrazena párem přímek p_1, p_2, jež se protínají na ose x-ové v bodě A, vzdáleném od počátku o a, a odchýlených od osy o úhly $\pm(90 - \beta)$.

Vztyčme v A kolmici k k ose x-ové a protněme ji v bodě B přímkou q, jež svírá s osou x-ovou úhel φ a jde počátkem. V B k přímce k vztyčená kolmice protne p_1 a p_2 v bodech C a D resp. Nad průměrem CD opišme kružnici, jež protne přímku q v bodech M_1 a M_2, náležejících základní křivce. Tato má rovnici

$$r = a \sec\varphi \pm a \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\beta$$

nebo

$$r = \sec\varphi\,(a \pm b\sin\varphi),$$

položíme-li $b = a \operatorname{tg}\beta$. Tato křivka je bikvadratika

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2,$$

která se v případě $\beta = 45°$, t. j. $b = a$, rozpadá na osu $x = 0$ a na kubiku

$$y^2 = \frac{x(x - a)^2}{2x - a}.$$

Přidružená konchoida je tedy

$$R = 2(a \pm b \sin \tfrac{1}{2}\psi).$$

Celá konchoida se obdrží, když k této křivce sestrojíme souměrnou podle počátku. Křivka, z níž se konchoida nalezená odvodí přičítáním průvodiče, je sextika

$$R = \pm b \sin \tfrac{1}{2}\psi,$$

patřící mezi růžicové sextiky [viz G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente Kurven, 1902, str. 305, Tab. XI, obr. 76].

Zajímavé je při tom, že také tato sextika dá se sestrojit jednak metodou zde sledovanou, a nad to, že lze všecky její body určit pouhým kružítkem, takže spadá do oblasti konstrukcí Mascheroniových, neboť nezbytný bod N možno určit jako průsečík dvou kružnic z bodu M a z bodu k němu soumerného podle osy x. Při studiu samotné sextiky je pohodlnější vztahovat ji na výplňkový úhel $180 - \psi$ ve tvaru

$$R = 2b \cos \tfrac{1}{2}\psi.$$

Při kružnicové konstrukci vyjdeme od kružnice $x^2 + y^2 = b^2$. Na ní zvolíme bod M, jemuž náleží polární úhel φ. Z M opíšeme kružnici poloměru $\overline{MO}$, který protne osu x-ovou v N, takže $\overline{ON} = 2b \cos \varphi$. Kružnice opsaná z O poloměrem $\overline{ON}$ protne předešlou v bodě, pro který

$$R = 2b \cos \varphi = 2b \cos \tfrac{1}{2}\psi.$$

Druhá konstrukce je tato: Úsečka stálé délky $c = 2b$ posouvej se svými konci A a B po souřadnicových osách. K ní sestrojíme podle osy y souměrnou a na prodloužení této promítněme bod A do H; pak je H bod křivky.

Svírá-li c s osou x-ovou úhel φ, svírá AB s BH úhel 2φ a H má souřadnice:

$$x = c \cos 2\varphi \cos \varphi,\quad y = c \sin \varphi + c \cos 2\varphi \sin \varphi = c \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

Odtud sečtením čtverců a vyloučením φ dostaneme

$$(2x^2 + 2y^2 - c^2)^2 (x^2 + y^2) = c^4x^2.$$

Polární rovnici můžeme nalézt z horní konstrukce. Čtyřúhelník $AOBH$ má při O a při H pravé úhly, proto je tětivový, tedy úhly ABH a AOH nad společnou tětivou AB jsou stejné, rovné 2φ. Rovněž nad tětivou $\overline{OA}$ jsou stejné úhly OBA a OHA, rovné $90 - \varphi$. Známe tedy v trojúhelníku AOH úhly při O a H, rovné 2φ a $90 - \varphi$ resp., tedy zbývá na třetí úhel také $90 - \varphi$, a proto je trojúhelník AOH rovnoramenný, $\overline{OA} = \overline{OH} = R$, tudíž

$$R = c \cos \varphi = 2b \cos \tfrac{1}{2}\psi,$$

jak tvrzeno.

Ale křivku by bylo lze získat užitím naší kružítkové konstrukce na křivku kapa, $r = a \operatorname{tg} \varphi$, jako základní křivku, jež by také dala

$$R = 2r \cos \varphi = 2a \sin \varphi = 2a \sin \tfrac{1}{2}\psi,$$

ale tato konstrukce je příliš složitá.

Normálu lze velmi snadno získat tím, že trojúhelník pravoúhlý, sestrojený z průvodiče a dvojnásobné polární subnormály jako odvěsen má stálou přeponu, rovnou konstantě křivky $2b$.

Touž konchoidu uvažované sextiky získáme touto konstrukcí:

Na ose x-ové zvolme $\overline{OA} = a$, z bodu A jako středu opišme poloměrem b kružnici k_1. Podobně nad průměrem $\overline{OA}$ sestrojme kružnici k_2. V k_1 veďme libovolný poloměr $\overline{AP}$, který vytne na k_2 bod Q. Spojnici $\overline{OQ}$ protněme v bodě M kolmicí PS, spuštěnou na OA s bodu P. Bod M je geometrické místo řídicí křivky, jejíž rovnice se dá psát:

$$r = (a - b \sin \varphi) \sec \varphi,$$

je-li $\varphi = \sphericalangle MOA$.

Přidružená křivka tedy je

$$R = 2\,(a - b \sin \tfrac{1}{2}\psi),$$

jak bylo tvrzeno.

Podobně se obdrží stejný výsledek, když na ose odměříme úsek $OA = a$, v A vztyčíme kolmici jako geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají v A osy úseček. Zvolme takový střed S, veďme kružnici poloměrem SA a protněme ji přímkou, jež obsahuje body S a O, v bodech M_1 a M_2. Tyto zvolme za základní body konstrukce. Pak je

$$r = \overline{OM_1} = a \sec \varphi \pm a \operatorname{tg} \varphi,$$

z čehož hned máme

$$R = 2a \pm 2a \sin \tfrac{1}{2}\psi.$$

Geometrické místo bodů M_1 a M_2 je strofoida, neboť když v před-poslední rovnici znásobíme obě strany číslem $\cos \varphi$, bude

$$x - a = \pm\, a \sin \varphi.$$

Nahradíme-li $\sin \varphi$ poměrem $\frac{y}{r}$ a umocníme-li, bude

$$(x - a)^2\,(x^2 + y^2) = a^2 y^2.$$

Po vyčíslení zruší se pravá strana a rovnici lze zkrátit veličinou x. Pak bude

$$x\,(x - a)^2 + (x - 2a)\,y^2 = 0.$$

Přeneseme-li počátek do bodu A, kladouce $x = a + \xi$, máme

$$\xi^2\,(a + \xi) = (a - \xi)\,y^2,$$

tedy jest A dvojný bod o směrnicích ± 1.

Další konstrukci obdržíme takto: Na kružnici K_1 průměru $\overline{OA}$ zvolme bod B, pro který úhel BOA sluj φ. Z B poloměrem $\overline{BA}$ opišme kružnici k_2, jež protne průměr $\overline{OA}$ v bodě C. Z O jako středu poloměrem OC opsaná kružnice k_3 protne k_2 v bodě L, pro který jest úhel $COL = \psi = 2\varphi$. Dále je $\overline{OC} = \overline{OL} = R = a\,(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi)$, neboť v rovnoramenném trojúhelníku CAB jsou úhly při základně $90 - \frac{1}{2}\varphi$, tedy úhel při B je φ.

Proto máme

$$R = a\,(1 - 2 + 2 \cos \varphi) = 2a \cos \tfrac{1}{2}\psi - a.$$

Jak vidno, lze celou tuto konstrukci zase provést pouhým kružítkem.

Mimochodem poznamenejme, že průsečík kružnice k_3 s paprskem OB dá

$$r = a\,(1 - 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) = a\,(1 - 2 + 2 \cos \varphi) = 2a \cos \varphi - a,$$

tedy Pascalovu závitnici.

Zdálo by se, že pro naši konstrukci se ukáže přímka útvarem jednoduchým. Ale nikoli.

Vyjděme od rovnice $r = a \sec (\alpha - \varphi)$. Bod M na ní ležící dá přidružený bod

$$R = 2a \frac{\cos \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)} = 2a \frac{\cos \frac{1}{2}\psi}{\cos (\alpha - \frac{1}{2}\psi)}.$$

Zaveďme novou konstantu rovnicí $a = b \cos \alpha$. Tím obdržíme

$$R = b \frac{2 \cos \alpha \cos \frac{1}{2}\psi}{\cos (\alpha - \frac{1}{2}\psi)} = b + b \frac{\cos (\alpha + \frac{1}{2}\psi)}{\cos (\alpha - \frac{1}{2}\psi)}.$$

V tomto tvaru se nalezená křivka ukazuje konchoidou sextiky

$$R = b \frac{\cos (\alpha + \frac{1}{2}\psi)}{\cos (\alpha - \frac{1}{2}\psi)}.$$

Její rovnice v pravoúhlých souřadnicích je:

$$(x^2 + y^2) [x^2 + y^2 + b^2 - 2bx]^2 \cos^2 2\alpha = [(x^2 + y^2) (2b - x) - b^2 x]^2.$$

Ale tuto sextiku samu můžeme odvodit naší transformací z hyperboly. Vskutku zpětným postupem od R k poloměru $\overline{OM} = r$ budeme mít:

$$r = \tfrac{1}{2}b \frac{\cos (\alpha + \varphi)}{\cos (\alpha - \varphi)} \sec \varphi.$$

Zaveďme pravoúhlé souřadnice a položme $\frac{1}{2}b = c$. Bude

$$\frac{x}{c} = \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} \quad \text{nebo} \quad x^2 + xy \operatorname{tg} \alpha = cx - cy \operatorname{tg} \alpha.$$

Tato hyperbola má asymptoty

$$x + y \operatorname{tg} \alpha = 2c = b = a \sec \alpha, \; x = -c = -\tfrac{1}{2}a \sec \alpha.$$

Porovnáme-li s danou přímkou $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$, vidíme, že jedna asymptota je daná přímka. Polární subnormála konchoidy i sextiky právě studované, jsou stejně dlouhé. Tato úsečka se snadno sestrojí. Vskutku

$$\frac{R'}{R} = -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\cos (\alpha + \frac{1}{2}\psi) \cos (\alpha - \frac{1}{2}\psi)}.$$

Odtud

$$S_n = R' = -\frac{a \sec \alpha}{2} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 (\alpha - \frac{1}{2}\psi)}.$$

Zaveďme ještě průvodič r základní přímky. Tím obdržíme

$$S_n = -\sin \alpha \frac{r^2}{a},$$

což je vskutku snadno sestrojitelný výraz. Je dobře všimnout si zvláštních případů, kdy $\alpha = 0°$ nebo $\alpha = 90°$. V prvním případě je přímka kolmá k polární ose, přidružená křivka je kružnice poloměru rovného dvojnásobné vzdálenosti přímky od počátku. Ve druhém případě je přímka rovnoběžná s polární osou, $r = a \operatorname{cosec} \varphi$, výsledná křivka je

$$R = 2a \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = 2a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi = 2a \frac{\sin \psi}{1 - \cos \psi}$$

nebo

$$R^2 - R \cos \psi = 2aR \sin \psi,$$

z čehož

$$(x^2 + y^2 - 2ay)^2 = x^2 (x^2 + y^2).$$

Tato křivka se rozpadne na osu $y = 0$ a na křivku

$$(x^2 + y^2)\, y = 4a\, (x^2 + y^2) - 4a^2 y,$$

což je strofoida, jak ukazuje převedení os na počátek $(0, 2a)$, takže

$$y = 2a + \eta.$$

Pro snazší převod spořádejme členy takto:

$$x^2 (y - 4a) + y\, (y^2 - 4ay + 4a^2) = 0,$$

z čehož

$$x^2 (\eta - 2a) + (\eta + 2a)\, \eta^2 = 0.$$

Ale mimo to můžeme napodobit i předešlou konstrukci. Na ose y odměřme stálou úsečkou $\overline{OB} = 2a$, veďme bodem B spojnici k bodu A na ose x, jež svírá s osou x úhel φ. Nad AOB opišme kružnici a protněme ji znovu v bodě H přímkou BH, souměrnou k AB podle osy y. Bod H opisuje hledanou křivku, neboť podle vlastností tětivového čtyrúhelníka výše vyložených jest

$$R = \overline{OA} = 2a \operatorname{cotg} \varphi = 2a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi.$$

Polární subnormála se sestrojí jako výše, jenže nyní je $\sin \alpha = 1$.

Vyšetřme konečně konchoidu přiřaděnou naší transformací kuželosečce:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

nebo

$$r = \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi - q \cos^2 \varphi}.$$

Teď bude

$$R = 4p \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi - q \cos^2 \varphi} = -\frac{4p}{q} + \frac{4p}{q} \frac{1 - \cos \psi}{1 - q - (1 + q) \cos \psi}.$$

Zde $\dfrac{4p}{q}$ rovno $4a$, má-li kuželosečka poloosy a, b. Nalezená konchoida náleží křivce

$$R_1 = 4a \frac{1 - \cos\psi}{1 - q - (1 + q)\cos\psi}$$

nebo

$$[(x^2 + y^2)(1 - q) + 4ax]^2 = (x^2 + y^2)[x(1 + q) + a]^2$$

a lze ji psáti

$$(x^2 + y^2)[y^2 - qx^2]^2 = 16p^2x^4.$$

Jiná úprava téže rovnice by dala:

$$R = 4p \frac{\cos^2\varphi}{1 - (1 + q)\cos^2\varphi} = -\frac{4p}{1 + q} + \frac{4p}{1 + q}\frac{1}{1 - (1 + q)\cos^2\varphi},$$

a značí konchoidu křivky

$$R_2 = \frac{8p}{1 + q}\frac{1}{1 - q - (1 + q)\cos\psi},$$

což však není než kuželosečka vztažená na ohnisko, mající parametr $\frac{8p}{1 - q^2}$ a číselnou výstřednost $\frac{1 + q}{1 - q}$. Pro $q = 0$ je to parabola. Kdyby byla základní křivka kuželosečka otočená o 90° proti předchozí, t. j.

$$x^2 = 2py + qy^2 \text{ nebo } r = \frac{2p\sin\varphi}{\cos^2\varphi - q\sin^2\varphi},$$

byla by přidružená křivka

$$R = 4p \frac{\sin\psi}{1 - q + (1 + q)\cos\psi},$$

nebo

$$[(x^2 + y^2)(1 - q) - 4py]^2 = (x^2 + y^2)x^2(1 + q)^2.$$

V případě paraboly ($q = 0$) přešla by rovnice v

$$(x^2 + y^2 - 4py)^2 = (x^2 + y^2)x^2,$$

jež po zjednodušení se rozpadne v přímku $y = 0$ a strofoidu

$$(x^2 + y^2)y - 8p(x^2 + y^2) + 16p^2y = 0,$$

totožnou s hořejší pro $a = 2p$.

Naše transformace dává také zajímavou pomůcku pro studium strofoidy:

$$(x^2 + y^2)x = a(x^2 - y^2) \text{ nebo } r = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Přidružená křivka je

$$R = 2r\cos\varphi = 2a\cos 2\varphi = 2a\cos\psi,$$

tedy kružnice poloměru rovného tětivě mezi vrcholem a dvojným bodem křivky (v ose souměrnosti). Znova se ukazuje, že je přidružená křivka zdánlivě nižšího stupně. Ale vysvětlení je velmi snadné v tom, že zatím co průvodič strofoidy opíše úhel 360° (argument φ), opíše průvodič kružnice 720° (argument $\psi = 2\varphi$). Z toho plyne, že témuž bodu přidružené kružnice odpovídají dvě kružnice o středech M_1, M_2, jež přísluší k úhlu φ a k úhlu $\varphi + 90°$.

Souřadnice přidruženého bodu jsou

$$x = 2a \cos^2 2\varphi, \quad y = 2a \sin 2\varphi \cos 2\varphi,$$

a musí splnit rovnici kružnice o středu M, ležícím na strofoidě:

$$x^2 + y^2 = 2xa \cos 2\omega + 2ya \cos 2\omega \operatorname{tg} \omega.$$

Dosazení dá

$$4a^2 \cos^2 2\varphi = 4a^2 \cos 2\omega \cos 2\varphi (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \operatorname{tg} \omega),$$

a po zkrácení možná psát

$$2 \cos 2\varphi \cos \omega = 2 \cos 2\omega \cos (2\varphi - \omega).$$

Nahraďme součiny součty! Bude:

$$\cos (2\varphi + \omega) + \cos (2\varphi - \omega) = \cos (2\varphi + \omega) + \cos (2\varphi - 3\omega).$$

Aby se druhé členy obou stran sobě rovnaly, musí být mezi úhly splněny podmínky:

$$2\varphi - \omega = 2\varphi - 3\omega \pm k\, 360°,$$

nebo

$$2\varphi - \omega + 2\varphi - 3\omega = \pm k\, 360°.$$

První rovnice vyžaduje

$$2\omega = \pm k\, 360°,$$

druhá

$$4\omega = 4\varphi \pm k\, 360°.$$

První výsledek by vyžadoval, aby středy obou kružnic vytvořujících byla na paprsku jdoucím dvojným bodem, což při kubické rovnici vyloučeno, tedy neodpovídá tento výsledek úloze.

Druhý výsledek dává

$$\omega = \varphi \pm k\, 90°,$$

z čehož plyne, že je možné dvojí řešení, pro $k = 0$ nebo $k = 1$, t. j. jedna kružnice má střed na průvodiči, který půlí polární úhel bodu, kde se mají obě vytvořující kružnice protínat, druhá kružnice má střed na ose úhlu vedlejšího.

Odtud plyne: Když ze dvou bodů strofoidy, které mají středy na dvou průvodičích vedených ze dvojného bodu navzájem kolmo, opíšeme kružnice procházející dvojným bodem, leží druhý průsečík obou kružnic na nové kružnici, jež prochází také dvojným bodem a má střed ve vrcholu křivky, ležícím v její ose souměrnosti.

Spojnice bodů strofoidy, patřících polárním úhlům φ, $\varphi + 90°$, stojí kolmo k tětivě přidružené kružnice a půlí ji. Proto prochází tato spojnice vrcholem křivky.

Když sestrojíme v kružnici s pevným průměrem obvodový úhel nad tímto průměrem, a když oba vedlejší úhly, určené jedním ramenem úhlu, rozpůlíme, náležejí stopy těchto os na druhém rameni strofoidě, jejíž dvojný bod je ve vrcholu půlených úhlů: neboť je-li průměr kruhu a, φ odchylka jedné osy od něho, jest odchylka protějšího ramene obvodového úhlu od téhož průměru $90 - 2\varphi$, a sinová věta dá

$$r : a = \sin(90° - 2\varphi) : \sin(90 - 2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi : \cos\varphi.$$

Přes to, že jsou tyto vlastnosti známy, není snad zbytečné ukázat, jak je transformace zde uvažovaná osvětluje v jiné souvislosti.

Poznámka. Kdyby byl v této úvaze vzat za základ místo pravého úhlu obvodový úhel α, měli bychom rovnici

$$r : a = \sin(\alpha + 2\varphi) : \sin(\alpha + \varphi),$$

nebo

$$(x \sin\alpha + y\cos\alpha)(x^2 + y^2) = a[\sin\alpha(x^2 - y^2) + 2xy\cos\alpha],$$

což je zobecněná strofoida.

Obecně je transformace zde uvažovaná dána rovnicemi Cartesiovými:

$$x^2 + y^2 = 2xx_1 + 2yy_1, \quad x^2 + y^2 = 4x_1^2,$$

je-li (x_1, y_1) bod křivky dané, (x, y) bod křivky přidružené. Řešení těchto rovnic dává

$$y = \frac{4x^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad x = 2x_1 - \frac{4x_1y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Je to spojení cirkulární inverse o proměnné mocnosti $2x_1y_1 = k^2$ se sklápěním kol osy rovnoběžné s osou y-ovou, jež jde bodem hledané křivky.

Zpětná transformace má rovnice

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{1}{2y}\sqrt{x^2 + y^2}\,(\sqrt{x^2 + y^2} - x).$$

Na nejjednodušším příkladě kružnice $x_1^2 + y_1^2 = ax_1$ můžeme vidět, jak metoda pravoúhlých souřadnic je nepoměrně obtížnější proti polární soustavě. Dosazením dostaneme

$$\frac{x^2 + y^2}{4}\left[1 + \frac{2x^2 + y^2 - 2x\sqrt{x^2 + y^2}}{y^2}\right] = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

a po úpravě máme

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Podobně jako kardioidu můžeme zobecňovati i Nikomedovu konchoidu. K tomu stačí poněkud obměnit způsob vytvoření. Místo přidružení pólu O k přímce p a odměřování stejných úseček b na paprsku q, vedeném bodem O, na obě strany od průsečíku (p, q), přidružíme k přímce p pól O a kružnici opsanou poloměrem b kolem paty S kolmice k, spuštěné z O na p. Středem $S \equiv (kp)$ vedeme průměr d, který pošineme tak, aby jeho střed zůstal na p a pól O ležel na jeho prodloužení.

Když nahradíme kružnici jinou kuželosečkou a posouváme její průměr, obdržíme konchoidu přímky, přidruženou k této kuželosečce.

Buď na př. kuželosečka hyperbolou, jež má přímku p a spojnici pólu O se středem S za asymptoty; její rovnice tedy je $xy = m^2$. Má-li proměnlivý paprsek q vedený pólem O $(-a; 0)$, rovnici $y = t(x + a)$, určuje průměr $y = tx$ na hyperbole bod s úsečkou $x = \frac{m}{\sqrt{t}}$ resp. $-\frac{m}{\sqrt{t}}$, takže posunutím do paprsku q, t. j. vyloučením parametru t, vznikne kubická křivka

$$yx^2 = m^2(x + a).$$

Její tečna utíná na ose x úsek $f = \frac{x(2x + 3a)}{x + 2a}$, pro který platí jednoduchý vztah

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{2x - f} - \frac{1}{a},$$

t. j. střed hyperboly a průmět dotykového bodu jsou odděleny harmonicky pólem O a bodem s úsečkou $2x - f$ (který se tedy snadno sestrojí a z něho plyne hned f).

Obraťme se k projektivní obdobě Nikomedovy konchoidy.

Základní body trimetrických souřadnic buďte vrcholy *1, 2, 3* trojúhelníka. Kuželosečka měj jej za polární trojúhelník, takže její rovnice je

$$-\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 0.$$

Vrcholem *1* vedený paprsek $y = tz$ protne kuželosečku v bodech A, B, pro které

$$x : y : z = \pm m\sqrt{\frac{t^2}{n^2} + \frac{1}{p^2}} : t : 1,$$

a stranu (*23*) v bodě C, pro který

$$x : y : z = 0 : t : 1.$$

Spojnice CO pólu O $[x : y : z = k : 1 : 0]$ s bodem C má rovnici

$$x - yk - zkt = 0.$$

Spojme bod A s vrcholem *3*, čímž obdržíme přímku

$$xt = my\sqrt{\frac{t^2}{n^2} + \frac{1}{p^2}}.$$

Vyloučením proměnného parametru z obou posledních rovnic dostaneme hledanou rovnici konchoidy

$$\left(\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2}\right)\left(\frac{x}{k} - y\right)^2 = \frac{y^2z^2}{p^2}.$$