Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Otakar Divišek

Kostrukce obecné isofony serpentiny pro osvětlení paralelní

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D1--D5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121822

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Konstrukce obecné isofoty serpentiny pro osvětlení paralelní.

Prof. Otakar Divíšek, Mladá Boleslav.

Serpentina S jest jak známo obalová plocha koulí o stálém poloměru ϱ, jejichž středy opisují šroubovici $\mathfrak{s}$ na rotační ploše válcové ležící. Šroubovice $\mathfrak{s}$ jest řídící křivkou plochy S a koule jí vepsané zovou se tvořící. Každá tvořící koule K dotýká se plochy S podél hlavní kružnice k t. zv. karakteristiky, jejíž rovina σ je kolmá k tečně šroubovice $\mathfrak{s}$ středem koule K procházející. Tečná rovina tvořící koule K v kterémkoliv bodě karakteristiky k sestrojená, dotýká se v témž bodě i plochy S.

O konstrukci meze stínu vlastního m plochy S bylo již pojednáno a dokázáno, že její půdorys m_1 (za předpokladu, že osa o šroubovice je kolmá k π), lze sestrojiti jako cissoidu elipsy a kružnice pro světelný pól P, příslušný řídící šroubovici $\mathfrak{s}$ vzhledem k světelnému paprsku.[1]) Taktéž známo, že průměry p tvořících koulí protínající křivku m vytvořují konoid, jehož řídícími útvary jsou šroubovice $\mathfrak{s}$, rovina φ kolmá k směru světelných paprsků a přímka $w \perp \pi$ jdoucí pólem P.[2]) Proto půdorysy průměrů p tvoří svazek o středu P.

Úkolem tohoto pojednání jest podati konstrukci obecné isofoty c intensity i plochy S. Předpokládejme kolmé promítání na π, jakož i, že řídící šroubovice $\mathfrak{s}$ má osu $o \perp \pi$.

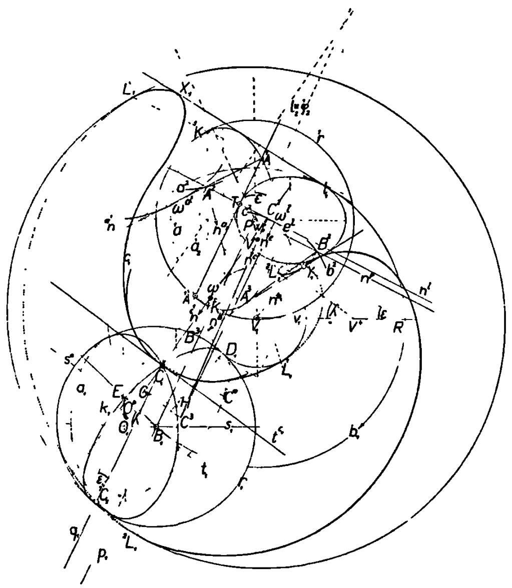
Budiž (obr. 1) kružnice b_1 v π o středu V_1 a poloměru $r = \overline{V_1R}$ podstavou řídícího kužele rotačního tečen šroubovice $\mathfrak{s}$ a $v = \overline{V_1V^0}$ jeho výškou. Nechť $v_1 \equiv \overline{V_1R}$ jest půdorys vrcholového paprsku světelného v a bod V^* jeho půdorysný stopník. Učiníme-li $\overline{V_1P} \perp\!\!\!= \overline{V_1V^+}$, jest P světelným pólem příslušným šroubovici $\mathfrak{s}$, jejíž klesání vyznačeno šipkou na kružnici b_1. Tečny šroubovice $\mathfrak{s}$ tvoří tudíž s π úhel $\varepsilon = \sphericalangle V^0RV_1$ a paprsek v úhel $\lambda = \sphericalangle V^0V^+V_1$.

---

[1]) Dr. Jos. Klíma: O půdorysu meze vlastního stínu na serpentině. Časopis čes. mat. a fys. Roč. 58 (1929) str. 17.

[2]) Tamtéž str. 16, pozn. 2.

1. Abychom sestrojili libovolný bod C isofoty c, zvolme na šroubovici $\check{s}$ střed B tvořící koule K a sestrojme na ní karakteristiku k a kružnici a, jakožto isofotu koule K o intensitě i. Průsečíky C resp. C' karakteristiky k a kružnice a jsou body hledané isofoty c.



Obr. 1.

Nechť bod B_1 kružnice b_1 jest půdorys středu B a kružnice r_1 o poloměru $\varrho = \overline{B_1D}$ obrysem půdorysu tvořící koule K. Pudorys a_1 kružnice a budiž elipsa o středu O_1 ($\overline{O_1B_1} \parallel v_1$, $\overline{O_1O^0} \perp \overline{O_1B_1}$, $\sphericalangle O^0B_1O_1 = \lambda$) a elipsa k_1 o poloosách $\overline{B_1D} = \varrho$ a $\overline{B_1E} = \varrho \sin \varepsilon$ ($\overline{B_1E} \perp \overline{B_1V_1}$) půdorysem karakteristiky k. Průsečíky C_1 resp. C'_1

elips a_1 a k_1 jsou pudorysy bodu C resp. C' isofoty c. — Uvážíme-li však, že přímka $q \equiv \overline{CC'}$ jest prusečnice roviny φ kružnice a s rovinou σ karakteristiky k a že pruměr p koule K spojující prusečíky karakteristiky k s mezí stínu vlastního m plochy S jest prusečnicí roviny $\psi \parallel \varphi$ středem B procházející s rovinou σ, musí nutně býti $q \parallel p$ a ježto $p_1 \equiv \overline{B_1P}$, jest $q_1 \parallel \overline{B_1P}$.

Představme si nyní, že kouli K posuneme do polohy ${}^1K$ tak, až $B \equiv P$. Rovina φ kružnice a posune se do roviny $\varphi^1 \perp v$, jež bude pro všechny posunuté koule tvořící stálá. Rovina σ zaujme polohu $\sigma^1 \parallel \sigma$ procházející pólem P. Přímka q posune se do polohy q^1, jež bude tudíž prusečnicí rovin φ^1 a σ^1 a proto $q^1 \parallel q$. Je zřejmo, že roviny $\sigma^1 \ldots$ obalí rotační kužel o vrcholu P a ose $w \perp \pi$, jehož povrchové přímky tvoří s osou w úhel ε. Z toho důvodu jest přímka q^1 tečnou kuželosečky l, v níž pevná rovina φ^1 seče jmenovaný kužel a proto její pudorys $q_1{}^1$ bude tečnou kuželosečky l_1 půdorysu to kuželosečky l. Ježto $q^1 \parallel q \parallel p$ jest i $q_1{}^1 \parallel q_1{}^1 \parallel p_1$ a proto $q_1{}^1 \equiv q_1$, neboť pudorys přímky q posouvá se sám v sobě. Tím dokázána tato věta:

„Pudorysy přímek spojujících prusečíky kterékoliv karakteristiky plochy S s libovolnou ale vždy touž její isofotou obalují kuželosečku l_1 mající ohnisko ve světelném pólu a osu rovnoběžnou s pudorysem světelného paprsku.“

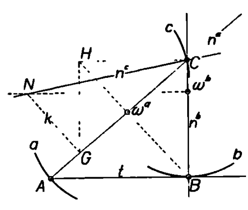
Při uvedené translaci přejde elipsa a_1 do polohy $a^1 \simeq a_1$ a kružnice r_1 do kružnice $r^1 \cong r_1$, při čemž a^1 a r^1 mají společnou tětivu $\overline{K^1K^2}$. Elipsa l_1 sestrojena pomocí nárysu a za nárysnu zvolena půdorysně promítací rovina paprsku světelného jdoucího pólem P. Z konstrukce patrno, že kuželosečka l je elipsa, je-li $\lambda > \varepsilon$, parabola je-li $\lambda = \varepsilon$ a hyperbola, je-li $\lambda < \varepsilon$.

Uvážívše, že body C_1 resp. C'_1 přejdou po translaci do bodu A^1 resp. $A^{1\prime}$ elipsy a^1, při čemž se posunou o úsečku $\overline{B_1P}$ co do směru a velikosti, můžeme opírajíce se o vyslovenou větu sestrojovati křivku c_1 takto:

Zvolíce na kružnici b_1 bod B_1 a protnouce elipsu a^1 tečnou $q_1 \parallel \overline{B_1P}$ kuželosečky l_1 v bodech A^1 resp. $A^{1\prime}$, učiňme ${}^1\overline{AC}_1 \# \# \overline{A^{1\prime}C'}_1 \# \overline{PB_1}$ co do směru i velikosti. Zvláštní body křivky c_1 jsou X_1 a Y_1 ležící na společných tečnách kuželoseček a^1 a l_1. Jsou to půdorysy těch bodů isofoty c, v nichž se jí charakteristiky plochy S dotýkají. Křivka c_1 dotýká se též obrysových kružnic pudorysu plochy S a to v bodech $L_1{}^1$, $L^{1\prime}$, L^2, $L^{2\prime}$ ležících na tečnách kuželosečky l_1 s bodu K^1 resp. K^2 sestrojených. Mimo to dotýká se křivka c_1 též kuželosečky l_1.

Ve zvláštním případě, kdy kuželosečka l_1 redukuje se na pól P a elipsa a^1 na půdorys m^1 meze stínu vlastního koule K^1, přejde křivka c_1 v pudorys m_1 meze stínu vlastního plochy S a m_1 bude cissoidou elipsy m^1 a kružnice b_1 jak bylo již řečeno.

2. Sestrojujíce tečnu $t_1^{c_1}$ v bodě C_1 křivky c_1 použijme geometrie kinematické. Uvažme, že přímka q_1 pohybujíc se, dotýká se kuželosečky l_1 v bodě T a že její bod A^1 opisuje křivku a^1. Je proto prusečík A^2 normály n^{a^1} křivky a^1 v bodě A^1 s normálou n^l křivky l_1 v bodu T okamžitým středem otáčení přímky q_1. Vykonává tudíž bod C_1 dvojí pohyb. Jednak otáčí se s přímkou q_1 kolem bodu A^2, jednak se v ní určitou rychlostí pohybuje, totiž mění se jeho vzdálenost od bodu A^1. Nechť úsečka ${}^1k = \overline{C_1A^2}$ jest kolmá rychlost, s jakou se bod C_1 otáčí kolem bodu A^2 (přísluší mu tedy jednotková úhlová rychlost otáčení).[3]) Stanovme ještě jeho kolmou rychlost ${}^2k$, s jakou se v přímce q_1 pohybuje. Ježto vždy $\overline{A^1C_1} = \overline{PB_1}$, rovná se tato rychlost kolmé rychlosti, s jakou se bod B_1 pohybuje v přímce p_1 při jejím pohybu. Tento pohyb je konchoidální, neboť p_1 prochází stále bodem P a její bod B_1 opisuje trajektorii b_1.[4]) Je proto průsečík B_2 normály n^{b_1} kružnice b_1 v bodě B_1 s přímkou $n^p \perp p_1$ v bodě P okamžitým středem otáčení přímky p_1. Protože stále je $p_1 \parallel q_1$ otáčí se přímka p_1 kolem bodu B^2 touž jednotkovou úhlovou rychlostí jako q_1 a proto jest úsečka $\overline{B_1B^2}$ kolmou rychlostí, s jakou se bod B_1 kolem bodu B^2 otáčí a úsečka $\overline{BB_2}$ jest kolmá rychlost, s jakou se bod B^2 v přímce p_1 pohybuje. Proto ${}^2k = \overline{PB^2}$. Učiňme tudíž $\overline{C_1C^0} \# \overline{PB^2}$ co do směru i velikosti a pak výslednice kolmých rychlostí ${}^1k = \overline{C_1A^2}$ a ${}^2k = \overline{C_1C^0}$ je kolmou rychlostí bodu C_1 čili normálou n^{c_1} bodu C_1 křivky c_1. Proto sestrojíme-li $\overline{A^2C^2} \# \overline{PB^2}$ jest spojnice $\overline{C_1C^2} \equiv n_1^{c_1}$ a kolmice $t_1^{c_1}$ vztyčená v bodě C_1 k $n_1^{c_1}$ tečnou křivky c_1 v bodě C_1.



Obr. 2.

3. Než přistoupíme k sestrojení středu ω kružnice křivosti křivky c_1 v bodě C_1, pojednáme dříve o křivce c vytvořené tímto způsobem.

Buďtež dány základní křivky a a b a (obr. 2) sestrojme křivku c takto: Zvolme na křivce a bod A a z něho sestrojme tečnu t ke křivce b. Normála n^b

[3]) Bedř. Procházka: Vybrané statě z deskript. geom., IV. sv., str. 6, odst. 237, posled. 3 ř.

[4]) Vinc. Jarolímek-B. Procházka: Deskr. geom. pro vys. šk. techn.; str. 343, odst. 186b.

křivky b v dotykovém bodě B tečny t seče normálu n^a bodu A křivky a v bodě C křivky c.

O křivce takto vytvořené pojednal prof. dr. J. Sobotka[5]) a podal konstrukci normály n^c křivky c v bodě C, jsou-li známy středy ω^a resp. ω^b kružnic křivosti křivek základních a resp. b v bodech A resp. B. Příslušná konstrukce je zřejmá z téhož obr. Opačným postupem můžeme, známe-li normálu n^c, sestrojiti střed ω^a kružnice křivosti křivky a.

Z obr. 1 je zřejmo, že křivka c^2, jíž vytvořuje bod C^2, je vytvořena ze základních křivek c_1 a l_1 právě tak, jako křivka c v úvaze předešlé. Dovedeme-li tudíž sestrojiti normálu n^{c_2} křivky c_2 v bodě C^2, můžeme sestrojiti střed ω kružnice křivosti základní křivky c_1. Z konstrukce bodu C^2 je však zřejmo, že křivka c^2 byla vytvořena podle téhož zákona jako křivka c_1 ze základních křivek b_1, a^1 a l_1. V tomto případě zastupují tyto křivky: b^2, a^2 a e^l jakožto evoluta kuželosečky l_1. Dotykový bod T' je zastoupen středem křivosti ω^l kuželosečky l_1 pro bod T a normála n^l normálou n^e evoluty e^l v bodě ω^l. Proto můžeme normálu n^{c^2} křivky c^2 sestrojiti právě tak, jako jsme sestrojili normálu n^{c^1} křivky c_1. Sestrojme nejprve normálu n^{a^2} křivky a^2 v bodě A^2. Ježto výtvarný zákon křivky a^2 je totožný se zákonem křivky $c \equiv (a, b)$, je $a^2 \equiv (a^1, l_1)$ a můžeme sestrojiti normálu n^{a_2} konstrukcí Sobotkovou, znajíce středy křivosti ω^{a^1} a ω^l křivek základních. (Konstrukce pomocných bodů v obr. 1 provedena, ale body nepopisovány.) Křivka b^2 je t. zv. polární diferenciální křivka kružnice b_1 pro pól P.[6]) Jinak její konstrukce je pouze zvláštním případem konstrukce křivky c pro případ, že křivka b se redukovala na bod P. Tedy $b^2 \equiv (b_1, P)$. Konstrukce normály n^{b^2} křivky b^2 zůstává však v platnosti, pouze bude jednodušší, neboť $\omega^a \equiv V_1$ a $\omega^b \equiv P$. (I tato konstrukce nepopsána.) Protněme tedy normálu n^e normálou n^{a^2} v bodě A^3 a normálu n^{b^2} přímkou p_1 v bodě B^3 a učiňme $\overline{A^3C^3} \# \overline{PB^3}$ co do směru a velikosti. Spojnice $\overline{C^3C^2}$ jest normálou n^{c^2} křivky c^2 v bodě C^2. Nyní můžeme sestrojiti střed ω kružnice křivosti v bodě C_1 křivky c_1 uživše obráceného postupu Sobotkovy konstrukce takto: S bodu C^3 spustíme kolmici na normálu n^{c_1} do bodu G, $\overline{GH} \parallel n^l$ seče $\overline{C^2H} \parallel \overline{C_1T}$ v bodě H. Spojnice $\overline{HT}$ seče n^{c^1} v bodě ω.

Kreslil prof. Divíšek. Archiv JČMF.

---

[5]) Dr. Jan Sobotka: Differenciální geom. Část I., str. 414, odst. 240.
[6]) Dr. Jan Sobotka: Differenciální geom. Část I., str. 462, odst. 271.