Jiří Hořejší

O některých plochách translačních

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D239--D246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121817

Phil. Mag. z února 1906 podotýká jen: „Že rozptyl paprsků α roste, když jejich rychlost klesá.“

Teprve v práci, která vyšla v srpnu 1906 (Phil. Mag., 12 (1906), 134) hodnotí Rutherford rozptyl (zatím jen v malých úhlech) paprsků alfa se stanoviska atomického, ačkoliv ani zde se ještě jeho závislostí na atomové váze nezabývá. Kučerova práce byla však předložena Akademii o dva měsíce dříve. Opravil v ní chybné názory dvou badatelů, kteří jsou zakladateli radiologie, a našel správnou cestu; při tom pracoval s prostými prostředky, jako je lístkový elektrometr, ježto fysikální ústav neměl ani baterii akumulátorů na vyšší napětí pro kvadrantní elektrometr, o elektromagnetu se širokým polem, jakého už tehdy používal Rutherford na montrealské universitě, ani nemluvě.

Z obsáhlého životního díla profesora Kučery uvedli jsme v této stručné vzpomínce jen dva doklady jeho kromobyčejného nadání, které však již samy mu zajistily trvalé jméno mezi nejpřednějšími fysiky.

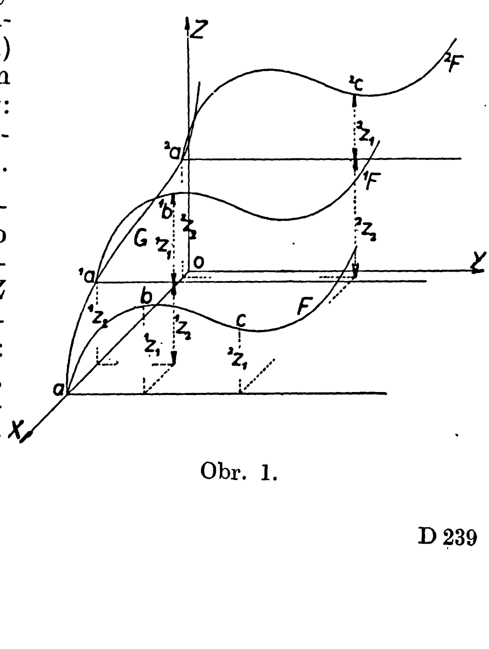
J. Heyrovský a *F. Běhounek.*

O některých plochách translačních.

Ing. C. **Jiří Hořejší**, České Budějovice.

V tomto článku nás budou zajímat t. zv. plochy translační. Vznikají pohybem jedné křivky F po křivce druhé G a to tak (předpokládáme křivky rovinné), že všechny body křivky F opisují dráhy, jichž roviny jsou rovnoběžné s rovinou křivky G a při tom jednotlivé polohy křivky tvořící jsou rovnoběžné s původní polohou (rovinou) křivky F. Tímto způsobem lze vytvořiti různé plochy: na př. plochu kruho-kruhovou, nebo vlno-vlnovou a j.

Všimněme si jedné vlastnosti, jíž se vyznačují tyto plochy: V pravoúhlém systému souřadnic X, Y, Z (obr. 1) vytkněme si v základní poloze dvě křivky: Křivku G v rovině (XZ), křivku F v rovině rovnoběžné s (YZ) tak, aby protínala křivku G (v obr. 1



Obr. 1.

je společný bod označen a). Plocha, která vznikne, pohybuje-li se bod a křivky F po křivce G a to tak, že roviny jednotlivých poloh křivky (${}^1F$, ${}^2F$, ...) jsou vzájemně rovnoběžné, se jmenuje plocha translační. Vzdálenosti jednotlivých bodů základní křivky F od roviny (XY) značme z_1, vzdálenosti bodů základní křivky G od téže roviny z_2. Vyjádříme-li tyto souřadnice jako funkce proměnných y a x:

$$z_1 = f(y), \ z_2 = g(x),$$

dostaneme explicitní rovnice křivek F a G. Dále si všimněme libovolného bodu ${}^1b$ vytvořené plochy translační: Vidíme, že jeho vzdálenost ${}^1z$ od roviny (XY) se rovná součtu vzdáleností ${}^1z_2$ bodu ${}^1a$ křivky G od roviny (XY) a ${}^1z_1$ bodu b křivky F od téže roviny (XY). Pro bod ${}^1b$ můžeme tedy psát

$${}^1z = {}^1z_1 + {}^1z_2 = f({}^1y) + g({}^1x).$$

Jest patrno, že tyto vztahy můžeme psát pro všechny body vzniklé plochy. Rovnice, jíž takto získáme, jest tedy rovnicí translační plochy a zní

$$z = g(x) + f(y), \tag{1}$$

kde $f(y) = z_1$; $g(x) = z_2$.

Z geometrického vytvoření jest zřejmo, že tutéž plochu dostaneme na základě předešlého, jestliže základními křivkami F, resp. G, proložíme válcové plochy o povrchových přímkách rovnoběžných s X, resp. s Y, a pak v rovině (XY) zvolíme body o souřadnicích $(x_k; y_k)$ a v nich vztyčíme kolmice k (XY), jež vedeme k průseku s oběma válcovými plochami. Takto získané úsečky pak sečteme, ponechávajíce jeden bod nové úsečky v rovině (XY) a přihlížejíce přirozeně též ke smyslu úseček sčítaných. Koncové body těchto nových úseček vyplňují plochu, jež se nazývá též plochou součtovou. Totéž plyne z rovnice (1), neboť $f(y)$, resp. $g(x)$ jsou rovnice válcových ploch o povrchových přímkách rovnoběžných s X, resp. s Y.

Obraťme se nyní k některým specielním plochám, které můžeme tímto způsobem vyšetřovat.

Vytkněme si (obr. 2) v rovině (XZ) kružnici A o středu v počátku soustavy souřadnic a o poloměru a. Tato kružnice nechť jest drahou, jíž bude opisovat střed kružnice B, jejíž ortogonální průmět na rovinu (YZ) jest kružnice mající střed v počátku o a jež má poloměr b [a leží při pohybu stále v rovině rovnoběžné s (YZ)]. Pohybem kružnice B získáme plochu translační, jež se nazývá kruho-kruhovou. Chtějíce vyšetřiti její rovnici, uvědomme si, že tutéž plochu obdržíme jako součtovou plochu dvou ploch válcových V_1, V_2, jichž řídící křivky jsou kružnice A, B a jejichž povrchové přímky jsou rovnoběžné s Y, resp. s X. Tyto válcové plochy mají rovnice:

$$V_1 \ldots x^2 + z^2 = a^2; \quad V_2 \ldots y^2 + z^2 = b^2.$$

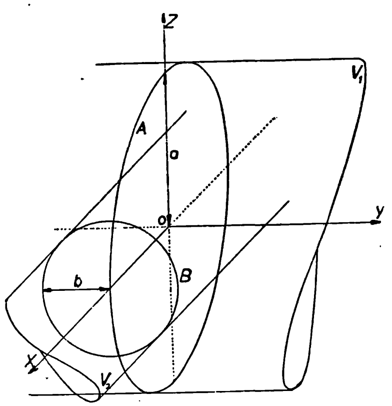
Vyjádříme explicitně proměnou z:

$$V_1 \ldots z_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - x^2}; \quad V_2 \ldots z_{1,2} = \pm \sqrt{b^2 - y^2},$$

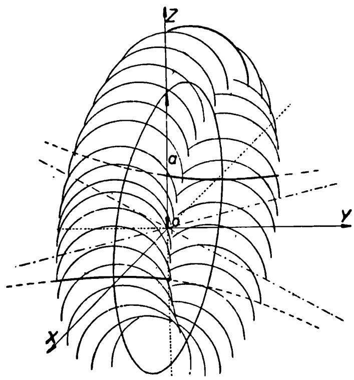
takže rovnice kruhokruhové plochy podle dřívějších obecných úvah zní

$$z = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \pm \sqrt{b^2 - y^2}, \tag{2}$$

při čemž bereme v úvahu všechny čtyři případy, pokud se týče znamének před odmocninami ($++$; $+-$; $-+$; $--$). Geometricky to znamená, že rovnoběžka s osou Z protíná plochu ve čtyřech bodech — jedná se tudíž o plochu alespoň čtvrtého stupně. Pro další úpravu rovnice (2) stačí však uvažovat pouze znaménka kladná,



Obr. 2.



Obr. 3.

neboť ostatní případy budou v upravené rovnici obsaženy. (Prvním umocněním bychom získali u součinu znamení $\pm$, jež při dalším umocnění dává $+$.)

Úpravou rovnice (2) dostaneme rovnici plochy kruho-kruhové ve tvaru

$$[x^2 - y^2 + z^2 - (a^2 - b^2)]^2 = 4z^2\,(b^2 - y^2). \tag{3}$$

Odtud jest patrno, že plocha kruho-kruhová jest čtvrtého stupně. Vyšetřme také průsečné křivky plochy kruho-kruhové s rovinami (XY), (XZ), (YZ). Nejprve průsek s rovinou (XY). V tomto případě $z = 0$; pak z rovnice (3) plyne

$$[(x^2 - y^2) - (a^2 - b^2)]^2 = 0. \tag{4}$$

To znamená, že plocha kruho-kruhová jest proťata rovinou (XY) v křivce (obr. 3), jež se rozpadá ve dvojnásobnou rovnoosou hyperbolu, se středem v počátku souřadnic a o poloosách co do velikosti $|\sqrt{a^2 - b^2}|$. Z rovnice (4) též plyne, že průsek s rovinou (XY) jest hyperbola s hlavní osou v X, je-li $a > b$, t. j. je-li poloměr kružnice řídící větší než poloměr kružnice tvořící; průsek se rozpadá v reálné přímky $x \pm y = 0$, t. j. v asymptoty dříve uvedené hyperboly, je-li $a = b$, t. j. mají-li obě kružnice stejný poloměr; je-li $a < b$ (poloměr kružnice tvořící jest větší než poloměr kružnice řídící), jest průsek s rovinou (XY) opět hyperbola rovnoosá, jejíž hlavní osa však splývá s osou Y.

Průsek s rovinou (XZ) pro $y = 0$ jsou dvě kružnice, jak patrno z rovnice (3), jichž rovnice jsou:

$$x^2 + (z \pm b)^2 = a^2.$$

Jsou to kružnice o poloměru a, jichž středy leží na ose Z ve vzdálenosti b od počátku.

Podobně dostaneme po úpravě rovnice průseku s rovinou (YZ), což jsou opět dvě kružnice o rovnicích

$$y^2 + (z \pm a)^2 = b^2.$$

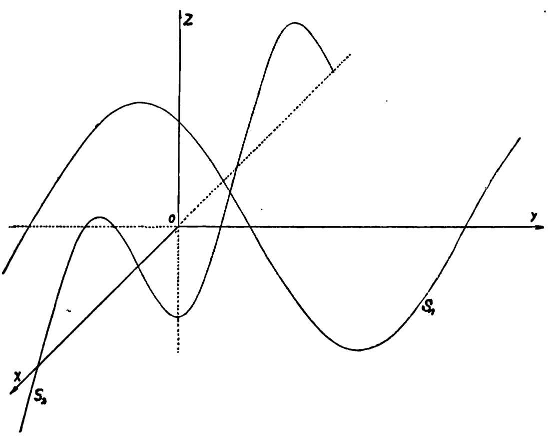
Mají poloměr b a jejich středy leží na ose Z ve vzdálenosti a od počátku.

Tyto poslední dva průseky s rovinami (XZ), (YZ) jsou též velmi snadno patrny z geometrického názoru. Obě dvojice kružnic se svými společnými tečnami pak tvoří obrys průmětu plochy kruho-kruhové na rov. (XZ) a (YZ). Obrys průmětu na (XY) jest obdélník o stranách $2a$, $2b$.

Podobně jako plocha kruho-kruhová vzniká také plocha vlnovlnová.

Zvolme si opět v základní poloze (obr. 4) [v rovinách (XZ) a (YZ)] dvě základní sinusoidy o rovnicích:

$$z_2 = a \sin(b + cx), \quad (S_2)$$
$$z_1 = d \sin(e + fy). \quad (S_1)$$



Obr. 4.

Obě sinusoidy mají různé amplitudy a jsou různě posunuty vzhledem k počátku. Obě upravujeme volbou a, d; resp. b, e. Plochy válcové procházející těmito křivkami, mají povrchové přímky rovnoběžné s osou Y, resp. s osou X, a mají tytéž rovnice. Rovnice plochy součtové pak zní:

$$z = a \sin (b + cx) + d \sin (e + fy). \qquad (5)$$

Geometricky vytvoříme tuto plochu posouváním jedné sinusoidy po sinusoidě druhé. Z rovnice (5) vyplývá, že tato plocha jest plochou transcendentní. Průseky se základními rovinami souřadnic jsou:

s rovinou $\quad y = 0$

$$z = a \sin (b + cx) + k,$$

kde $k = d \sin e$.

Jest patrno, že to jest křivka shodná s křivkou základní $z = a \sin (b + cx)$, jejíž osa však jest o k vzdálena od osy X.

Podobně průsek s rovinou $x = 0$ je

$$z = d \sin (e + fy) + m.$$

Opět sinusoida o ose vzdálené o m od osy Y.

Průsečná křivka s rovinou (XY) má rovnici:

$$a \sin (b + cx) + d \sin (e + fy) = 0.$$

Jest to tedy křivka transcendentní.

Kdybychom oběma základním křivkám přisoudili stejné amplitudy, pak by $a = d \neq 0$ a průsečné křivky s rovinou (XY) by přešly v přímky, jak plyne z následujícího:

Rovnici $\quad \sin (b + cx) + \sin (e + fy) = 0$

možno upraviti na:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(b + cx + e + fy) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(b + cx - e - fy) = 0;$$

pak ovšem

buďto $\sin \frac{1}{2}(b + cx + e + fy) = 0$ nebo $\cos \frac{1}{2}(b + cx - e - fy) = 0.$

Z první rovnice:

$$cx + fy + b + e = 0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi;\ \ldots \qquad (6)$$

To jest jedna soustava přímek, v rovině (XY) obecně položených, avšak vzájemně rovnoběžných.

Přímky druhé soustavy mají pak rovnice:

$$cx - fy + b - e = \pi;\ 3\pi;\ 5\pi;\ 7\pi;\ \ldots \qquad (7)$$

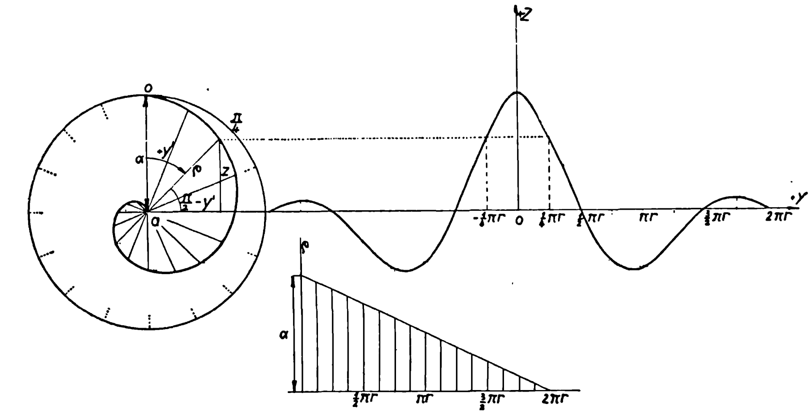
Tak lze různými způsoby kombinovati rozličné křivky a získati rozmanité plochy translační (součtové). Odvoďme si ještě rovnici plochy translační, jejíž základní křivky jsou trochu složitější:

V rovině (YZ) mějme Archimedovu spirálu (obr. 5.)

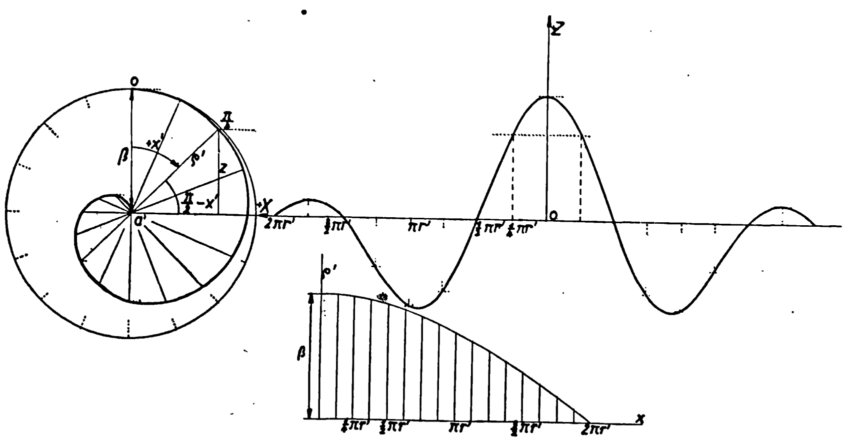
$$\varrho = \alpha \left(1 - \frac{y}{2\pi r}\right),$$

kde $y : r$ vyjadřuje úhel y' vyznačený v obrázku, r, α jsou dané délky.

Na této nové ose Y si vytkněme úsečky 0; $\frac{1}{8}\pi r$; $\frac{1}{4}\pi r$; $\frac{3}{8}\pi r$; $\frac{1}{2}\pi r$; atd. a jednotlivými body veďme rovnoběžky s osou Z.



Obr. 5.



Obr. 6.

Pak na př. bod spirály příslušný k $y' = \frac{1}{4}\pi$ promítněme rovnoběžně s osou Y na kolmici stanovenou v bodě o úsečce $\pm \frac{1}{4}\pi r$; podobně promítněme i ostatní body spirály. Spojením takto stanovených bodů získáme jednu základní křivku — „tlumenou dle přímky“. Její rovnice je

$$z = \varrho \cos y';$$

po dosazení za ϱ a y' z hořejšího dostaneme

$$z = \alpha \,.\left(1 - \frac{y}{2\pi r}\right)\cos\frac{y}{r}. \tag{8}$$

V rovině (XZ) sestrojme jinou křivku — „tlumenou dle sinusoidy“ — (viz obrázek 6).

Sestrojme opět nejprve křivku, jejíž polární rovnice je

$$\varrho' = \beta \cos\frac{x}{4r'},$$

kde β, r', jsou daná čísla.

Pomocí ní sestrojme křivku, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích je

$$z = \varrho' \cos x',$$
$$(x' = x : r').$$

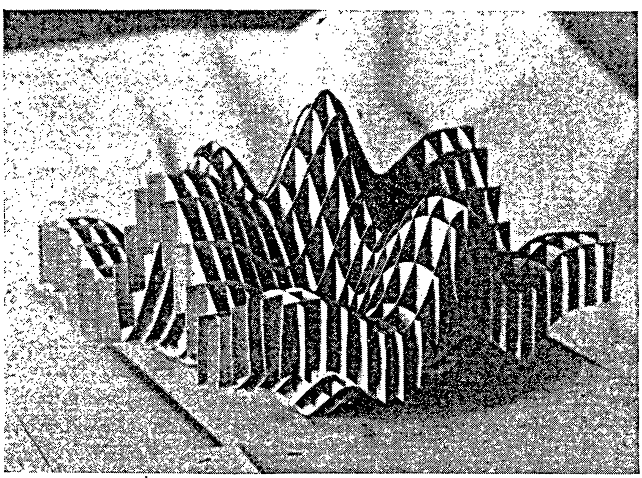
Dosadíme-li sem za ϱ', dostaneme

$$z = \beta \cos\frac{x}{4r'}\cos\frac{x}{r'}. \tag{9}$$

Obě základní křivky mají tedy rovnice:

$$z = \alpha\left(1 - \frac{y}{2\pi r}\right)\cos\frac{y}{r},$$

$$z = \beta \cos\frac{x}{4r'}\cos\frac{x}{r'}.$$



Obr. 7.

Z obou rovnic jest patrno, že obě křivky jsou souměrné podle osy Z. Válcové plochy proložené jmenovanými křivkami (s povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou X, resp. Y) mají tytéž rovnice. Plocha součtová (obr. 7), vzniklá sečtením těchto dvou válcových ploch, má rovnici

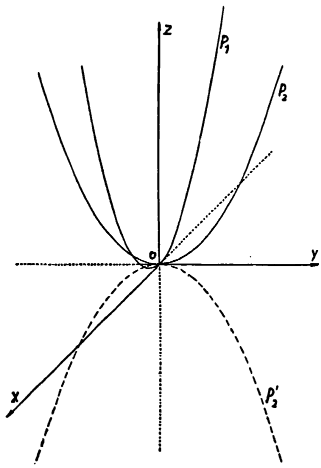
$$z = \alpha \left(1 - \frac{y}{2\pi r}\right) \cos \frac{y}{r} + \beta \cos \frac{x}{4r'} \cos \frac{x}{r'}. \tag{10}$$

Průseky této plochy s rovinami souřadnic (XZ), (YZ) jsou opět shodné křivky s křivkami základními, posunuté pouze vzhledem k ose X, resp. Y. Průsečná křivka s rovinou (XY) má rovnici:

$$\alpha \left(1 - \frac{y}{2\pi r}\right) \cos \frac{y}{r} + \beta \cos \frac{x}{4r'} \cos \frac{x}{r'} = 0.$$

Jest to křivka transcendentní.

Zajímá nás také, jaká plocha vznikne posouváním paraboly po druhé parabole. Uvažujme současně oba možné případy: paraboly mají buď týž kladný směr os nebo opačný.



Obr. 8.

V rovině (XZ) (obr. 8) nechť leží parabola P_1 o parametru p, v rovině (YZ) pak parabola P_2 (P'_2) o parametru $\pm q$. Rovnice těchto parabol budou:

$$z = \frac{x^2}{2p}, \quad \text{resp.} \quad z = \pm \frac{y^2}{2q}.$$

Plocha vzniklá posouváním jedné paraboly po parabole druhé má (jako plocha součtová dvou ploch válcových) rovnici

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{11}$$

Rovnice (11) je rovnicí paraboloidu (a to eliptického při $p \cdot q > 0$, hyperbolického při $p \cdot q < 0$). Můžeme tedy o eliptickém i hyperbolickém paraboloidu prohlásiti, že jsou plochami translačními.

Obrázky Ing. C. J. Hořejší. Archiv JČMF.