Václav Skalický
Metodika matematiky zjevů kolektivních

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D186--D209

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121805

VYUČOVÁNÍ.

Metodika matematiky zjevů kolektivních.

Václav Skalický, RG Pardubice.

Tento článek má být pokusem o detailní metodiku jedné partie matematického učiva. Jak upozorňuji ve svém článku „Detailní metodika matematiky", je každá práce tohoto druhu nutně zabarvena podle osobního autorova pojetí příslušné partie. Jsem přesvědčen o nutném a přirozeném odklonu počtu pravděpodobnosti na střední škole od pojetí kombinatorického k takovému, jež se opírá o statistiku. Důvody toho naznačil jsem v práci samé jen stručně. Obšírnější odůvodnění by vyplnilo článek zvláštní.

1. Úvod. Obecné poznámky.

1,1. Formulace úkolu. Pod název „matematika zjevů kolektivních" zahrnujeme základy počtu pravděpodobnosti (v dalším jen *PP*) a teorie pojišťování. Předmětem jejím jsou některé zákonitosti zjevů zvaných náhodné, to jest závislých na velikém počtu příčin. Zákonitosti tyto se však projevují jen při hromadném (kolektivním) výskytu zjevů. Jejich systém a jeho matematickou teorii nazýváme počtem pravděpodobnosti. K němu pak se připojuje ve škole aritmetika životního pojišťování jako jedna z praktických aplikací matematiky zjevů kolektivních.

1,2. Základní stanovisko a vůdčí motiv metodický. Náš postoj ke kterémukoliv ze stručných hesel osnov bude vždy určován obojím úkolem matematického vyučování: materiálním i formálním. Tak bude též formována naše cesta k dosažení cíle, vyučovací metoda.

Výklady mají být založeny na statistice, nemají vycházet z pouhé definice pravděpodobnosti. Jediným důvodem, proč lze počtu pravděpodobnosti v praksi vůbec užít, je mlčky uznávaná platnost zákona velkých čísel. Proto má tento zákon, jenž je potvrzován zkušeností, státi v čele výkladů. Již tím je zaručen jistý zřetel k požadavku, aby matematické vyučování bylo v náležité spojitosti s běžným životem, aby dosahovalo u žáků jistých vědomostí matematických, a současně jim dávalo (vhodným výběrem materiálu) poučení o různých věcech důležitých pro výchovu budoucího občana. Povaha takto pojatého úkolu přímo vede k úlohám občansky výchovného rázu.

Mezi úkoly matematického vyučování patří ovšem též úkol působiti k rozvoji duševních schopností, zvláště schopnosti správně a obratně usuzovati. To ovšem vede k druhému možnému stanovisku: klasickému, jež vychází z definice pravděpodobnosti. Málokterá partie klade na žákovu soudnost tolik požadavků jako *PP* ve svých kombinatorických úlohách, ačkoli skutečné početní operace jsou tu minimální. Úlohy, k nimž toto stanovisko vede, nelze zanedbat. Volme je však tak, aby co nejvíce odpovídaly praksi a byly výchovné. Tedy méně osudí, koulí a karet, a více pojmů z národního hospodářství, přírodních věd, psychotechniky a pod.! Výběr vhodných úloh je dnes ještě chudý, může však být obohacen spoluprací všech na věci interesovaných. V žádném případě však nezapomínejme, že základním rysem zákonů *PP* je kolektivnost, hromadná platnost v systému velikého počtu situací téhož druhu. Úloha, jež nepřipouští svým rázem představu hromadného výskytu, početného opakování situace v ní obsažené, nebo ji připouští jen s jistým násilím, není vhodnou úlohou.

Určujeme tudíž svůj základní postoj a *vůdčí metodický motiv*: *PP učíme se stálým zřetelem k jeho kolektivnosti*. V aritmetice pojišťovací je kolektivní, statistický základ určen již její podstatou.

1,3. Poměr k jiným partiím matematického učiva. *PP* je z učiva vyššího stupně jedinou partií, jež se opírá téměř jen o elementární výkony početní. Některé úlohy vedou k aritmetickým řadám; ojedinělé též k nerovnostem (úlohy o dělitelnosti čísel). Veliký počet úloh souvisí s kombinatorikou. Také geometrie může být podkladem mnohých úloh. Pojišťování je ve spojitosti s jednoduchými úlohami složeného úrokování.

Kolektivisticky pojatý *PP* opírá se ještě o tyto matematické pojmy: grafické znázornění a funkční závislost. Už v kvartě můžeme uplatniti grafické znázornění kvantitativního náhodného znaku v kolektivu (výška těla a pod.) nebo v úmrtnosti a j. Pojem limity a limitního procesu je kolektivistickými úlohami vhodně procvičován.

Vnitřní spojitost s ostatní matematikou je hlubší povahy. Není nahodilé, že v systému středoškolské matematiky tvoří právě *PP* závěr aritmetického učiva. Logická soudnost, přesnost v myšlení, jednoznačnost vyjadřování a schopnost pořádati věci v systém má v *PP* velikou důležitost. Z tohoto hlediska můžeme prohlásit, že *PP* čerpá z celého předchozího učiva, neboť vše, co bylo jmenováno, je přínosem matematiky do formálního výcviku ducha žákova. V tomto smyslu je *PP* jejím vyvrcholením, třebas zdánlivě tvořil v jejím systému část zcela speciálního charakteru.

1,4. Několik poznámek k praksi vyučovací. *PP* je partií, v níž je zdánlivě málo obecných návodů k řešení úloh; příklady se tu nedají řešiti šablonou. V tom je též jedna z příčin, proč je *PP* poměrně málo oblíben u žáků, zvláště u slabších. Proto věnujeme volbě úloh řešených společně ve škole zvýšenou pozornost, a snažíme se vybrati úlohy skutečně typické. Také formální stránka řešení má své speciální požadavky: zápis na tabuli nebudiž v těchto úlohách příliš stručný. Ježto počítání tu bývá velmi málo, žádejme, aby žáci v přehledné formě zapsali ve zkratkách i hlavní logické soudy. Totéž pak žádáme též v domácích cvičeních a při písemných zkouškách školních.

Formulace textu úlohy musí být jednoznačná. I jediné chybějící slůvko může způsobiti, že dvojí různý výklad textu vede k zcela různým výsledkům. Velmi cenné jsou též úlohy, v nichž tak zvaný „zdravý rozum" vede k chybnému řešení; mají i historickou cenu. [Na př. Galileův problém hráčů v kostky, paradoxon pana de Meré; viz *Schoenbaum* a *Friedrich*, lit. (1), (2).]

Získané poznatky mohou být prohloubeny v souborném opakování závěrečné třídy. Zvláště geometrické pravděpodobnosti mohou býti postaveny do pravého světla, v němž vynikne zvláště důležitost míry počtu případů možných a příznivých. [Pěkný je na př. rozbor Bertrandova paradoxa; *Kaucký*, lit. (3).] Také provedení experimentů o pravděpodobnosti empirické a její souvislosti s matematickou hodí se na toto místo. [Buffonova úloha. Jiné experimentální určení čísla π viz *Hrazdil*, lit. (4). Pokus s kostkami: *Čech*, lit. (5).]

V aritmetice pojišťovací klademe důraz i na zručnost v numerickém počítání. Výpočet provádějme podle pravidel o počítání s čísly neúplnými, nepočítejme však s přesností vyšší, než jaká má v praksi význam. Jednou z podmínek zdaru numerického počítání je řádné rozvržení výpočtu v pracovní ploše.

Význam historických poznámek bývá někdy přeceňován. Naše učebnice je vesměs obsahují v míře přiměřené. Nezapomínejme však zmíniti se též o historii pojišťování. Pěkný článek poučující o tabulkách úmrtnosti viz *Rotrekl*, lit. (6).

2. Metodické rozčlenění učiva a postup ve vyučování PP.

2,1. Přehled metodického postupu. Majíce stále na zřeteli kolektivní význam výsledků *PP*, rozčleníme si učivo asi takto: I. Úvodní poučení o základních pojmech: kolektivu, náhodných zjevech, statistice a jejím zpracování. Na praktickém příkladě (z empirie) ukážeme základní zákonitost zjevů náhodných, jevící se v t. zv. křivce Gaussově. II. Definujeme relativní četnost zjevu, t. j. poměr absolutní četnosti výskytu zjevu k počtu všech členů v kolektivu. Jádro zákonitosti náhodných zjevů: relativní četnost limituje k určitému číslu, roste-li početnost kolektiva. Pravděpodobnost induktivní (empirická, statistická, a posteriori). III. Tuto limitu můžeme velmi často předvídati, to jest vypočítati ji ze známých vlastností kolektiva a z povahy studovaného zjevu. Pravděpodobnost matematická (deduktivní, a priori). IV. Pravděpodobnosti složitějších zjevů a v složitějších kolektivech je možno jistými pravidly počítati z pravděpodobností zjevů jednodušších. Pravděpodobnost opačná, úhrnná a složená. Náhodné hry. V. Teorií pokusů opakovaných navážeme znovu na zákonitost náhodných zjevů. VI. Statistika lidského života (tabulka úmrtnosti). VII. Teorie základních typů životního pojištění a zmínka o významu pojištění vůbec.

V čele každé partie budou vždy pečlivě volené typické úlohy, jejichž rozbor v společné práci třídy přinese obecně platné výsledky.

2,2. Příklad detailního postupu v PP.

2,21. Základní pojmy.

1. 100 000 dospělých mužů bylo měřeno. Každému přísluší určitá výška těla, vyjádřená jistým číslem ve zvolené měrné jednotce. Toto číslo nazýváme znakem (zjevem). Proč asi mluvíme o výšce jako znaku kvantitativním?

2. Bylo provedeno 1000 vrhů třemi kostkami současně. Každý vrh je nositelem jistého znaku (zjevu), t. j. padnutí nějakého součtu na všech kostkách. Které součty mohou padnout? [Tři až osmnáct.] Je zjev „výsledek vrhu" kvantitativním? [ano].

3. Souhrn většího množství prvků (členů) nazýváme kolektivem. Co jest kolektivem v příkladech 1 a 2? [Souhrn všech měřených, souhrn všech vrhů.] Čím je určena výška určitého muže v kolektivu, pád na př. součtu 10 v určitém vrhu? [Dědičností, výživou, podmínkami životními atd., způsobem, jakým jsme kostky uchopili, jak byly vymrštěny, pružností kostek i místa dopadu, pohybem vzduchu a pod.] Můžeme s určitostí očekávat, že třeba v pátém vrhu padnou tři šestky? Čím je způsobena naše nejistota? [Velikým počtem příčin, jež nám zčásti nebo zcela unikají.]

2,211. Výsledky: Zjevy, jichž nositeli jsou členové kolektiva, mají často svou míru určenu velikým počtem příčin zčásti nebo zcela neznámých; v tom případě je nazýváme zjevy náhodnými. Relativnost této definice: Náhodnost závisí na stupni našich vědomostí o zjevu. Různé osoby mohou posuzovati náhodnost různě; táž osoba může během doby změniti svůj názor na náhodnost určitého zjevu. [Počasí. Smrt určité osoby.]

2,22. Paradox: Zjevy náhodné řídí se zákonem.

1. Vybereme-li z kolektiva všech žáků ústavu toho, který je v abecedním pořádku všech na př. 59., nemůžeme, neznáme-li ho, předem říci, jak je vysoký. Můžeme však (po jisté zkušenosti) říci,

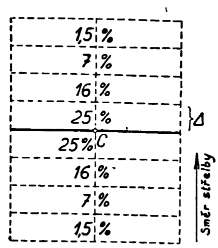
kolik asi žáků z celého ústavu má výšku větší než 1,60 m. Oč asi opřeme svůj odhad? [Statistika žákovských měření.]

2. O člověku, o němž není známo nic víc, než že je 35letý, nemůžeme říci, jak dlouho bude živ; může se dožíti sta let, může však zemříti třeba i dřív, než odhad provedeme. S určitostí však můžeme očekávat, že ze 100 000 třicetipětiletých mužů se dožije osmdesátky jen asi 18 900. Odkud čerpáme toto očekávání? [Ze statistiky.] Můžeme podle toho očekávati, že ze 100 třicetipětiletých se dožije osmdesátky asi 19 osob? V kterém případě je náš odhad spolehlivější, a proč?

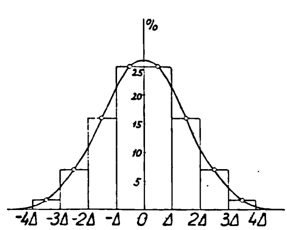
3. Můžeme o jediném vrhu kostkou říci, zda povede k výskytu sudé? Provedeme-li však 100 vrhů, kolikrát asi očekáváme výskyt sudé? Kolikrát asi výskyt šestky? Jaký by byl náš soud v případě, že by šestka padala příliš často? Kdy bude náš odhad poměrně správnější, při 100 nebo při 1000 vrhů? [Při větším počtu vrhů.]

2,221. Výsledky. Výskyt náhodného znaku se řídí zákonem, který se však objeví jen v početných kolektivech. Pomůckou k zjištění zákonitosti je statistika zjevu, t. j. soupis číselných údajů o výskytu zjevu. Zákonitost zjištěná zpracováním těchto údajů statistickými metodami, je zákonitost statistická (induktivní, empirická, a posteriori). V některých případech zákonitost uhodneme předem podle toho, co víme o kolektivu, a co ze svých vědomostí odvodíme logicky správným usuzováním; takto stanovená zákonitost je matematická (deduktivní, a priori). Příklady: 1. Byly sestaveny tabulky úmrtnosti. Že jsou spolehlivé, dosvědčují pojišťovny, jež podle nich bezpečně provozují svoje obchody. 2. Při pokusech s kostkou nemáme důvodu očekávat, že některé z čísel bude padati častěji než ostatní. Soudíme proto, že šestka padne při velikém počtu pokusů asi v $^1/_6$ všech pokusů. Zkušenost, statistika provedených vrhů, náš předpokládaný zákon potvrdí.

2,23. Povaha zákonitosti náhodných zjevů. 1. Rozptyl střelby. [Příklad *Gebauerův*, lit. (7).] Baterie dobře zastřílená střílí na cíl C (obr. 1). Vlivem nahodilých rozdílů v podmínkách při



Obr. 1.

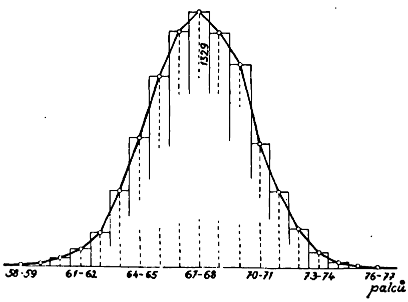


Obr. 2.

výstřelu budou zasažena různá místa kolem C ve větší i menší vzdálenosti. Zkušenost učí, že při velikém počtu ran jest asi polovina ran „krátká", polovina „dlouhá". Veďme cílem C kolmici na směr střelby; tím se rozpadnou zásahy ve dvě skupiny po 50%. Oddělme v každé části rovnoběžkou polovinu zásahů této části (tedy 25% všech zásahů). Šířka každého z těchto pásů ($\varDelta$) nazývá se pravděpodobná úchylka dálková. Zkušenost ukazuje, že (při velikém počtu ran) jsou zásahy rozděleny přibližně podle schematu do pásů o šířce $\varDelta$ v počtu 1,5%, 7%, 16%, 25%, 25%, 16%, 7%, 1,5%. Zbývající 1% je rozptýleno mimo náš obrazec. Znázorněme graficky! (Obr. 2.)

Kdybychom rozdělili plochu obrazce v pásy užší a zvýšili přiměřeně počet ran, byl by počet proužků v diagramu větší, charakter jejich průběhu by se však neměnil. Nejvíce zásahů je kolem cíle. Úchylky větší jsou méně četné.[1])

2. Výška těla dospělých mužů. [Příklad *Yuleův*, lit. (8).] V kolektivu 8585 mužů byla měřena tělesná výška. Výsledky byly zařazeny do skupin příslušných výškám 57—58 palců, 58—59 palců atd., až 77—78 palců (tedy asi od 145 cm do 198 cm). Počet případů v jednotlivých skupinách: 2, 4, 14, 41, 83, 169, 394, 669, 990, 1223, 1329, 1230, 1063, 646, 392, 202, 79, 32, 16, 5, 2.[2]) Z grafického znázornění (obr. 3) shledáváme, že rozložení znaku „výška těla" v kolektivu má týž charakter jako v příkladě 1. Největší počet přísluší střední výšce, odchylky v obou směrech jsou méně časté.



Obr. 3.

Proč není ve statistice výšky případ menší než 145 cm a větší než 198 cm, ačkoli existují muži s těmito výškami?

V kolektivu méně početném není ovšem průběh grafu tak pravidelný. Charakteristický znak průběhu předešlých grafů se však projeví i zde. [Abychom jej odkryli, provádíme t. zv. vyrovnání nahodilých výkyvů. Toto vyrovnání hledí zachovati plochu omezenou grafem a vodorovnou osou.][3])

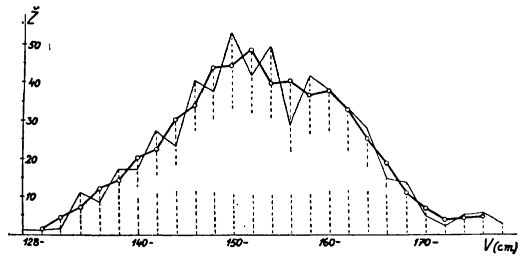
---

[1]) Poznámka: 1. Čtyřnásobek $\varDelta$ se nazývá „vidlice"; bývá 3—4% vzdálenosti cíle. 2. Stejně je možno rozděliti zásahy ve směru šířkovém; rozptyl je tu menší, pásy jsou užší. Střelba je přesnější směrově než dálkově.

[2]) Případy na hranicích intervalů byly počítány polovinou do obou sousedních intervalů.

[3]) Malá početnost kolektiva je právě překážkou postupu didakticky nejcennějšího: použíti měření žáků ústavu (viz obr. 4 s příslušným textem). — Vyrovnání provádíme na př. tak, že vždy ze tří sousedních hodnot tvoříme průměr (metoda těžišť).

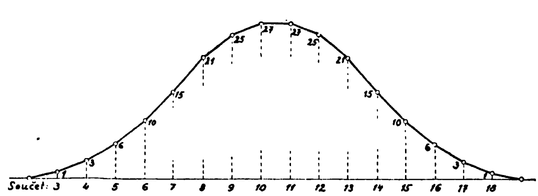
3. Vrh několika kostkami. Statistika pokusů, při níž by se počítalo, kolikrát padly určité součty, by ukázala, že i tu je závislost téhož druhu jako v případech předešlých, je-li ovšem kolektiv všech provedených vrhů dosti početný. U tří kostek na př. bude



Obr. 4.

Výška tělesná v kolektivu 540 žáků a žákyň první až čtvrté třídy (RG Pardubice 1934/35). Graf původní rýsován slabě, graf vyrovnaný silněji.

se nejčastěji vyskytovat součet 10 a 11, součty větší nebo menší méně často; nejřidší budou výskyty součtů krajních (3, 18). Na rozdíl od předešlých příkladů můžeme však v tomto případě tvar grafu logicky odůvodniti ze svých vědomostí o studovaném zjevu. U tří kostek může padnouti součet 3 jen jako 1 + 1 + 1, součet 4 však již třemi způsoby (permutace sčítanců 2 + 1 + 1), atd., až nejvyšší součet 18 opět jen jedním způsobem. Sestrojme graf pro počet způsobů u jednotlivých součtů (obr. 5)! Ježto nemáme dů-



Obr. 5.

vodu, pro který bychom výskyt některé možnosti očekávali častěji, soudíme, že průběh statistického grafu bude míti týž charakter, bude-li početnost kolektiva dosti veliká.

2,231. Výsledky. Statistiku výskytu náhodného znaku v početném kolektivu provádíme tak, že celkové rozpětí hodnoty znaku rozdělíme v stejné intervaly (třídy). Každý člen kolektiva zařadíme do některé z tříd podle hodnoty znaku. Rozborem této statistiky zjistíme, že se výskyt řídí těmito zákony:

Největší četnost (počet členů) přísluší třídě střední; třídy ostatní mají četnosti menší. Graf četnosti v jednotlivých třídách je přibližně souměrný podle střední pořadnice a má charakteristický průběh.

Kdybychom počet tříd zvětšili a zvýšili současně početnost kolektiva, blížil by se graf křivce tvaru v obr. 5. Křivka tato bývá nazývána Gaussovou, *křivkou chyb*, *frekvenční* a pod. podle toho, který z jejích významů máme právě na zřeteli. Jméno první nese po matematikovi, jenž se jí hojně zabýval a odvodil též její matematickou rovnici.

Nyní můžeme též udati, jak zjistíme, že hodnota nějakého znaku (na př. velikost tělesné výšky) je náhodným zjevem. Zařadíme všecky hodnoty, jež se v kolektivu vyskytly, podle jejich velikostí do dosti velikého počtu tříd, a sestrojíme graf četnosti v jednotlivých třídách. Zjistíme-li, že průběh grafu při dostatečně velikém počtu členů v kolektivu má charakter Gaussovy křivky, je hodnota znaku zjevem náhodným.

Velmi důležitým náhodným zjevem je výskyt chyb při opakovaném měření téže veličiny. Zařadíme-li všecky chyby, jež se při měřeních vyskytly, popsaným způsobem do tříd, pak četnosti v jednotlivých třídách řídí se při velikém počtu měření Gaussovým zákonem (odtud název *křivka chyb*). Objeví-li se jiné rozdělení, soudíme, že vedle chyb náhodných existují při měření též chyby systematické, zaviněné na př. vadou přístroje nebo neschopností pozorovatele.

Zákon rozdělení chyb umožňuje odvoditi řadu formulí a předpisů, podle nichž je třeba zpracovati výsledky měření ve fysice, geodesii a pod. (jež jsou vždy jen přibližné), má-li být konečný výsledek co možná nejbližší přesné hodnotě. [Počet vyrovnávací.]

2,24. Pravděpodobnost statistická a matematická.

1. Hodíme-li mincí n-krát, padne v a případech znak, v $n - a$ případech číslo. a je četnost výskytu znaku; $\frac{a}{n}$ pak nazýváme *relativní četností* výskytu znaku. Statistika podala na př. tento výsledek:

Počet vrhů n	50	100	1000	10 000	100 000
Četnost znaku a	35	46	512	5 101	49 915

Jaké jsou relativní četnosti? Jaká je jejich přibližná hodnota? [0,7; 0,46; 0,512; 0,5101; 0,49912; 0,5.]

2. Statistika ukazuje, že v kolektivu dětí 5—14letých je asi 10,3% způsobilých k studiu na střední škole (jejich kvocient inteligence je aspoň 115). Kolik asi dětí k studiu schopných je v osadě

(městě, zemi), kde je 128 (4694, 564 915) 5—14letých? $\left[10{,}3 \cdot \frac{n}{100}\right]$.
Čemu je rovna relativní četnost schopných? [0,103]. Ve skutečnosti jsou počty schopných rovny jiným číslům. V kterých případech jsou odchylky relativně menší?

3. Vrh třemi kostkami. Kolik je všech možností, jež mohou padnout? Kolik je způsobů, jimiž může padnouti součet 11, 12? Kterým číslům budou se blížiti relativní četnosti součtu 11, 12? [$6^3 = 216$; 27, 25; $\frac{27}{216}$, $\frac{25}{216}$.] Uvažujme nyní, jak rozřešil Galilei problém hráčů v kostky! (Proč se vyhrává častěji vrhem 11 než 12?) Jakého omylu se dopouštěli hráči, kteří soudili, že 11 a 12 má padati stejně často? [Soudili, že 11 může padnouti šesti způsoby $6 + 4 + 1$, $6 + 3 + 2$, $5 + 5 + 1$, $5 + 4 + 2$, $5 + 3 + 3$, $4 + 4 + 3$ (a rovněž 12 šesti způsoby), zapomněli však, že se tyto součty dají permutovati.]

2,241. Výsledky. Relativní četnost výskytu náhodného zjevu blíží se s rostoucí početností kolektiva k limitě, jež se nazývá *pravděpodobnost induktivní* (*statistická, empirická, a posteriori*) onoho zjevu

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{n} = p.$$

V mnohých případech jsme odkázáni jen na statistiku zjevu, abychom mohli odhadnouti přibližnou hodnotu oné limity.

V některých případech však můžeme odvoditi předem přesnou hodnotu této limity, a to na základě svých znalostí o povaze zjevu a kolektiva. Pravděpodobnost vypočítaná tímto způsobem z těchto znalostí je *pravděpodobnost matematická* (*deduktivní, a priori*).

Obě pravděpodobnosti jsou stejné; potvrzuje to zkušenost. Co bychom usoudili, kdyby relativní četnost limitovala k jinému číslu, než jsme vypočítali logicko-matematicky? [Naše vědomosti o povaze zjevu jsou neúplné; na př. „falešnost" kostky.]

Matematické vyjádření zákonů pravděpodobnosti je předmětem *PP*.

2,25. Základní vzorec pro pravděpodobnost matematickou. Pravděpodobnost opačná.

1. Ve třídě je 25 chlapců a 17 děvčat. Losem byl určen 1 člen třídy jako delegát. Jak veliká je pravděpodobnost, že to byla dívka? Kolik možností mohlo při losování nastat a kolik z nich bylo příznivých dívkám? Kdyby byla opakována volba n-krát (n dosti veliké), kolikrát asi by bylo vylosováno děvče?

2. Bylo napsáno číslo trojciferné. Jak veliká je pravděpodobnost, že je dělitelno sedmi? Kolik je všech trojciferných čísel? Které je nejmenší trojciferné číslo dělitelné sedmi? Napišme obecný tvar

čísla aspoň trojciferného, dělitelného sedmi! [$105 + 7x$, x číslo celé $\geqq 0$.] Užitím nerovností vypočítejme, kolik je trojciferných čísel sedmi dělitelných, a určeme poměr jejich počtu k počtu všech čísel trojciferných; určili jsme tak hledanou pravděpodobnost.

3. Počítejme podobně pravděpodobnost, že nejvýš dvojciferné číslo (tedy číslo $\leqq 99$) je prvočíslem! Podobně pro číslo nejvýš trojciferné! Pro číslo $\leqq 5309$! [Užijme tabulky prvočísel v „Tabulkách" *Valouchových,* lit. (9).] Jak se mění pravděpodobnost prvočísla s rostoucí mezí, a jak veliká je asi pravděpodobnost, že libovolné číslo celé je prvočíslem? [0; co je vám známo o rozložení prvočísel v řadě číselné?]

4. Zákop délky l je obsazen v části o délce d. Jaká je pravděpodobnost, že granátový náraz, jenž zákop zasáhl, byl účinný? [*Pírko,* lit. (10).] Co můžeme pokládati za míru všech bodů zákopu? Co je měrou obsazených bodů? [Příslušné délky.]

5. Podobně počítejme pravděpodobnost, že letecká bomba, jež dopadla na město, zasáhla některý dům, je-li ve městě $p\%$ zastavěné plochy! [Měrou všech zásahů je 100% plochy, měrou účinných zásahů procento plochy zastavěné.][4])

6. Vypočítejme ve všech předešlých případech také pravděpodobnosti opačné, t. j. pravděpodobnosti, že zjev nenastane! Přirovnejme je k pravděpodobnostem dříve vypočítaným a vyslovme pravidlo!

2,251. Výsledky. Matematická pravděpodobnost nějakého zjevu je poměr počtu případů zjevu příznivých (a) k počtu všech případů možných (m); při tom předpokládáme, že všechny případy mohou nastati s možností téhož řádu, to jest, že není důvodu, pro který by některý měl nastati spíše než jiný

$$p = \frac{a}{m}.$$

Tuto definici však musíme doplniti pro ty úlohy, v nichž je počet možných případů nekonečně veliký. Tu je třeba rozlišovat dva případy: Je-li množství případů sice nekonečně veliké, avšak spočetné (t. j., dají-li se jeho členové očíslovati čísly přirozené řady číselné), pokládáme za hledanou pravděpodobnost limitu, k níž se blíží pravděpodobnost téhož zjevu v kolektivu prvních n členů množství, vzrůstá-li n neomezeně. (Příklad 3.) Je-li však počet případů možných nekonečně veliký a nespočetný, definujeme pravděpodobnost poměrem vhodně zvolených měr množství všech případů příznivých a všech případů možných. (Příklady 4 a 5.) Geometrické pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost, že zjev nenastane, nazýváme pravděpodobností opačnou k pravděpodobnosti zjevu. Je-li p pravdě-

[4]) Viz též *Klimeš,* lit. (11).

podobnost, že zjev nastane, je příslušná pravděpodobnost opačná

$$q = 1 - p.$$

Důkaz: Počet případů příznivých tomu, že zjev nenastane, je $m - a$, počet případů možných m

$$q = \frac{m-a}{m} = 1 - \frac{a}{m} = 1 - p.$$

Se stanoviska kolektivního: Jestliže v n pokusech nastal zjev x-krát, tedy $(n - x)$-krát nenastal. Podle definice je

$$q = \lim_{n=\infty} \frac{n-x}{n} = 1 - \lim_{n=\infty} \frac{x}{n} = 1 - p.$$

Pravděpodobnost je číslo, pro jehož velikost platí

$$0 \leqq p \leqq 1.$$

Krajní možnost $p = 0$, z níž plyne $a = 0$, značí nemožnost zjevu (není příznivých případů). Krajní možnost $p = 1$, z níž plyne $a = m$, značí jistotu zjevu (všecky případy jsou příznivé). Pro pravděpodobnosti s nekonečným počtem případů možných však tyto úvahy neplatí. [Ukažme si na příkladě!]

Větu o pravděpodobnosti opačné můžeme zobecniti takto: Součet pravděpodobností zjevů navzájem se vylučujících a vyčerpávajících všecky možnosti je roven jedné. (Na př. součet pravděpodobností, že karta vytažená ze hry 32 karet je eso nebo figura nebo číslo (7—10).) Důkaz: Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ počty případů příznivých prvému, druhému, třetímu, ..., n-tému zjevu, jest podle předpokladu $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = m$.

Je tedy

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{m} = 1,$$

neboli

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1.$$

(Pravděpodobnosti doplňkové, komplementární.)

2,26. Pravděpodobnost úhrnná a složená.

1. V dílně je zaměstnáno 20 dělníků, 15 dělnic a 10 učňů. Při neštěstí byla zabita jedna osoba; jak veliká je pravděpodobnost, že to nebyl učeň, tedy že to byl *buď* dělník *nebo* dělnice. Počítejme tuto pravděpodobnost podle definice! Vypočítejme též pravděpodobnost, že byl zabit dělník, a pravděpodobnost, že byla zabita dělnice! Co pozorujeme? Jak obecně odůvodníme svůj poznatek?

2. Vypočítejme pravděpodobnost, že číslo menší než 100 je dělitelno šesti! [$p_1 = \frac{4}{25}$.] Obdobně pravděpodobnost, že je takové číslo dělitelno osmi! [$p_2 = \frac{3}{25}$.] Jak veliká je pravděpodobnost, že

číslo menší než 100 je dělitelno šesti *nebo* osmi? Je rovna součtu $p_1 + p_2$? Čím je způsoben nesouhlas?

3. Mezi 10 granáty jsou 3 vadné. Jak veliká je pravděpodobnost, že první 2 rány budou slepé? Jaká, že první rána bude slepá, druhá ostrá? [Počítejme počet všech možných dvojic z 10 granátů a počet dvojic příznivých zjevu. Pokládejme studovaný zjev za složený ze dvou jednodušších: prvé rány a druhé rány. Nesmíme však zapomenouti, že druhá rána je vypálena už jen z devíti zbývajících granátů!]

4. Z 32 karet se vyjme jedna a vrátí se; potom se tah opakuje. Jak veliká je pravděpodobnost, že bylo dvakrát taženo eso? [Kolik je možností složeného zjevu, totiž dvojice obou tahů? Kolik je možností příznivých vytažení dvou es? Počítejme též pravděpodobnosti dílčí, t. j. pravděpodobnost, že bude eso taženo v prvém tahu, a pravděpodobnost, že bude taženo v druhém tahu! Hledejme souvislost těchto dílčích pravděpodobností s pravděpodobností zjevu složeného!]

5. Tutéž úvahu a výpočet proveďme za předpokladu, že se vytažená karta nevrací!

2,261. Výsledky. Jsou-li p_1 a p_2 pravděpodobnosti dvou zjevů vzájemně se vylučujících, je pravděpodobnost, že nastane *buď* prvý *nebo* druhý z nich, rovna součtu $p_1 + p_2$ (*pravděpodobnost úhrnná*).

Důkaz: Je-li z m možných případů a_1 příznivých zjevu prvnímu a a_2 příznivých zjevu druhému, je $a_1 + a_2$ počet případů příznivých prvnímu nebo druhému. Hledaná pravděpodobnost je proto

$$p = \frac{a_1 + a_2}{m} = p_1 + p_2.$$

Se stanoviska kolektivního: Jestliže v kolektivu n pokusů nastal x-krát zjev prvý a y-krát zjev druhý, je $x + y$ úhrnná četnost zjevu prvého nebo druhého. Pak jest

$$p = \lim_{n=\infty} \frac{x + y}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n} + \lim_{n=\infty} \frac{y}{n} = p_1 + p_2.$$

Jsou-li p_1 a p_2 pravděpodobnosti dvou zjevů navzájem nezávislých, pak pravděpodobnost, že nastanou oba zjevy, je rovna součinu $p_1 p_2$ (*pravděpodobnost složená*).

Důkaz: Je-li m_1 počet případů možných pro zjev první, m_2 počet případů možných pro zjev druhý, je $m_1 m_2$ počet možností zjevu složeného, to jest takového, při němž mohou nastati oba zjevy. Podobně je $a_1 a_2$ počet možností příznivých zjevu složenému, jsou-li a_1, a_2 počty příznivé zjevu prvnímu a zjevu druhému. Podle definice jest pak

$$p = \frac{a_1 a_2}{m_1 m_2} = \frac{a_1}{m_1} \cdot \frac{a_2}{m_2} = p_1 \cdot p_2.$$

Se stanoviska kolektivního: Mějme dva kolektivy n_1 a n_2 pokusů, z nichž prvý může vésti k zjevu prvnímu, druhý k druhému. Předpokládejme, že v prvním kolektivu se zjev objevil x_1-krát, v druhém x_2-krát. Utvořme kolektiv všech možných dvojic po jednom členu z obou kolektivů; jejich počet je $n_1 n_2$. Některé z takových dvojic budou míti tu vlastnost, že u onoho členu páru, který patřil do kolektiva prvního, nastal zjev prvý, a současně u druhého nastal zjev druhý. Počet takových dvojic je $x_1 x_2$. Pak jest

$$p = \lim_{n_{1,2}=\infty} \frac{x_1 x_2}{n_1 n_2} = \lim_{n_1=\infty} \frac{x_1}{n_1} \cdot \lim_{n_2=\infty} \frac{x_2}{n_2} = p_1 p_2.$$

Obě poučky mají povahu elementárních zákonů, z nichž lze odvoditi další pro pravděpodobnosti složitějších zjevů. Tak na př. pro dva zjevy (navzájem nezávislé) s pravděpodobnostmi p_1 a p_2 jest pravděpodobnost,

že nastanou oba $p_3 = p_1 p_2$,
že nenastane žádný $p_4 = q_1 q_2 = (1 - p_1)(1 - p_2)$,
že nastane jen jeden $p_5 = p_1 q_2 + q_1 p_2 = p_1 (1 - p_2) + + p_2 (1 - p_1)$,
že nastane nejvýš jeden $p_6 = p_1 q_2 + p_2 q_1 + q_1 q_2$,
že nastane aspoň jeden $p_7 = p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_1 p_2$.

Které z těchto pravděpodobností jsou doplňkové? [$p_3 + p_4 + + p_5$; $p_6 + p_3$; $p_4 + p_7$.]

2,27. Náhodné hry. Matematická naděje a problematická hodnota.

1. Dva hráči si smluví tuto hru: Hází se dvěma kostkami. Padnou-li dvě stejná čísla, vyhraje A, padnou-li různá čísla, vyhraje B. V kterém poměru mají sázeti, má-li být hra spravedlivá? Co si představujeme pod slovy „spravedlivá hra"! Formulujme tuto definici co nejpřesněji!

2. V loterii uspořádané při dobročinné slavnosti má být vylosována jediná výhra v ceně 500 K. Předpokládá-li se, že bude prodáno 200 losů, jaká může býti nejnižší cena losu, má-li být loterie aktivní? Pokládáme loterii za hru mezi pořadatelstvím loterie a majitelem losu. Při které podmínce je tato hra spravedlivá? Jakou pravděpodobnost výhry má majitel jednoho losu? Přirovnejme součin této pravděpodobnosti a výhry k ceně losu!

2,271. Výsledky. Hrají-li 2 hráči náhodnou hru, není možno výsledek jediné hry předvídat. Sehrají-li však veliký kolektiv partií, je možno odhadnout, kolik asi partií vyhraje A, kolik B, a to (relativně) tím přesněji, čím početnější je kolektiv partií.

Náhodnou hru nazýváme spravedlivou, blíží-li se průměrný zisk hráče z jedné hry nule, roste-li počet her neomezeně. [Záporný zisk = ztráta hráče.] Odvoďme podmínku spravedlivé hry: Sází-li A s_1 korun, B s_2 korun, pak přijme hráč při výhře $(s_1 + s_2)$ korun. Vyhraje-li A x partií z celkového počtu n, je jeho průměrný zisk z jedné hry

$$\frac{x(s_1 + s_2) - ns_1}{n}.$$

Hra je spravedlivá, je-li

$$\lim_{n=\infty} \frac{x(s_1 + s_2) - ns_1}{n} = 0.$$

Odtud plyne

$$p(s_1 + s_2) - s_1 = 0,$$

z čehož

$$s_1 : s_2 = p : (1 - p).$$

Pravá strana je však poměr pravděpodobností výhry pro oba hráče; je tudíž

$$s_1 : s_2 = p_A : p_B.$$

Sázky obou hráčů musí být v poměru pravděpodobností výhry obou hráčů.

Uvážíme-li, že sázka jednoho je výhrou druhého ($s_1 = v_2$, $s_2 = v_1$), můžeme psáti

$$p_1 : p_2 = v_2 : v_1,$$

nebo jinak

$$p_1 v_1 = p_2 v_2.$$

Z poslední rovnice vidíme, že oba hráči spravedlivé hry mají týž součin výhry a pravděpodobnosti této výhry. Nazýváme jej **matematickou nadějí hráče.**

Matematická naděje je číslo vyjádřené touž měrou jako výhra. Je-li výhra udána v K, je i matematická naděje jistá částka v K. Z toho důvodu nazýváme matematickou naději též **problematickou hodnotou výhry.** Význam tohoto pojmu je obecnější. Má-li nějaký zjev hodnotu n jednotek, může se však uskutečniti jen s pravděpodobností p, jest jeho problematická hodnota pn jednotek.

Náhodnou hrou je též každá loterie. V loterii o n losech a jediné výhře v má být cena losu x taková, aby oba „hráči“ měli stejně velikou matematickou naději. Pravděpodobnost výhry pro majitele losu je $p_1 = \frac{1}{n}$. „Výhrou“ správy loterie je cena losu přijatá od hráče, pravděpodobnost její rovná se jistotě. Z toho vyplývá, že

$$x = \frac{v}{n}.$$

K ceně x je třeba ještě připočísti jistou částku na režii a účel loterie. Poslední přirážka ovšem odnímá loterii charakter hry spravedlivé.

Zobecnění výpočtu ceny losu na loterii o větším počtu výher je snadné. [Proveďme!]

S hlediska národohospodářského má zvláštní význam loterie třídní. [Prostudujme její plán a sestavme několik úloh k ní se vztahujících!]

2,28. Pravděpodobnosti v kolektivu opakovaných pokusů.

1. Baterie ostřelující jistý cíl je zastřílena tak, že je táž pravděpodobnost rány krátké (—) i dlouhé (+). Jak veliká je pravděpodobnost, že ze šesti ran budou 2 rány (—) a 4 (+)? Jak veliká, že 1 (—) a 5 (+)? [Počítejme nejprve, kolik je možných pořadí 2 ran (—) a 4 (+)! Jak veliká je pravděpodobnost každého z těchto pořadí? Jak veliká je tudíž hledaná pravděpodobnost?]

2. Určeme obecně pravděpodobnost, že z vypálených n ran bude k (—) a zbytek (+)!

3. (Příklad Pólyův.) Jaká je pravděpodobnost, že v kolektivu n namátkou zvolených novorozeňat je k chlapců? Počítejme nejdříve za předpokladu, že poměr chlapců a děvčat je 1 : 1, potom za předpokladu, že poměr je 51 : 49!

4. Uvažujme, na čem závisí průběh hodnoty pravděpodobnosti k ran (—) v celkovém počtu n ran a znázorněme závislost pravděpodobnosti na k graficky! [Průběh je kvalitativně týž jako u výrazu $\binom{n}{k}$].

5. Kterému k přísluší při daném n největší pravděpodobnost?

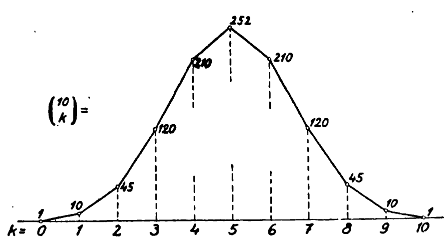
2,281. Výsledky. Pravděpodobnost, že v kolektivu n pokusů, jež mohou způsobiti zjev s pravděpodobností p, nastane zjev právě k-krát, je

$$P_n^{(k)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Jedná-li se o zjev s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$, je

$$P_n^{(k)} = \binom{n}{k} \cdot (\tfrac{1}{2})^n.$$

Průběh této pravděpodobnosti je kvalitativně týž jako průběh $\binom{n}{k}$. Viz obr. 6!



Obr. 6.

Pravděpodobnost $P_n^{(k)}$ stoupá pro $k < np + p - 1$ a klesá pro $k > np + p - 1$. [Dokážeme tak, že odvodíme podmínky, za kterých je $\frac{P_n^{(k+1)}}{P_n^{(k)}} \gtreqqless 1$! Ukážeme, že rovnost může platit jen tehdy, je-li $np + p - 1$ číslo celé!] Je-li $np + p - 1$ číslo celé, pak $P_n^{(k)} = P_n^{(k+1)}$.

Pravděpodobnost $P_n^{(k)}$ je největší pro k rovnající se největšímu číslu celému menšímu než k. Důkaz: Podmínka maxima

$$P_n^{(k-1)} < P_n^{(k)} \geqq P_n^{(k+1)}$$

vede k nerovnostem

$$np + p - 1 \leqq k < np + p.$$

[Rovnost platí opět jen za předpokladu, že $np + p - 1$ je číslo celé. Maximální pravděpodobnost patří pak dvěma hodnotám k, lišícím se o jednotku.]

Hodnota k, jíž přísluší největší pravděpodobnost $P_n^{(k)}$, má tu vlastnost, že platí

$$\lim_{n=\infty} \frac{k}{n} = p.$$

[Dokážeme z hořejších nerovností!]

Dokázané věty jsou matematickým podkladem t. zv. zákona velikých čísel. Ježto očekáváme, že četnost skutečného výskytu zjevu v početném kolektivu pokusů bude přibližně rovna četnosti, jíž přísluší maximální pravděpodobnost, můžeme vysloviti zákon velikých čísel takto:

Relativní četnost výskytu zjevu, jehož matematická pravděpodobnost je p, blíží se s rostoucím n (celkovou početností kolektiva) k této pravděpodobnosti. Pro n velmi veliké je absolutní četnost výskytu zjevu $x \doteq pn$. Zjev nenastane zpravidla právě pn-krát, nýbrž s jistou odchylkou, tedy $pn\left(1 \pm \frac{\alpha}{100}\right)$-krát (s odchylkou α%), avšak α klesá s rostoucím n k nule.

Zákon velikých čísel je potvrzován zkušeností. Je tudíž zákonem induktivním, empirickým. Praktické použití PP je možné jen za předpokladu jeho platnosti.

2,29. Tabulky úmrtnosti a jejich použití.

1. Sestrojme statistický graf vyjadřující, jak závisí počet osob dožívajících se x let z původního počtu 100 000 novorozenců! Uvažujme o významu některých partií grafu! [Velká úmrtnost v prvém roce života a v pokročilém věku, relativně malá úmrtnost starců.]

2. Kolik mužů se dožívá v tomto kolektivu třiceti let? Kolik jich žije ještě v 65. roce? Jaká je relativní četnost (a tudíž i pravděpodobnost) případů, v nichž se 30letý muž dožívá 65 let? Kolik z třicetiletých mužů zemřelo před dosažením věku 65 let? Jaká je

pravděpodobnost, že se 30letý nedožije 65 let? Kolik mužů umírá mezi 65. a 66. rokem? Jaká je pravděpodobnost, že 30letý zemře právě ve věku 65 let? Jiné otázky!

3. Někteří ze 100 000 novorozenců prožijí jen 1 rok, jiní 2 roky, atd.; kolik let prožije průměrně jeden z nich? Musíme vzít v počet i to, že umírají během každého roku (a to přibližně rovnoměrně). Kdybychom počítali tak, jakoby všecky osoby umíraly vždy počátkem roku, pak bychom všem ve výpočtu ubrali jistý zlomek roku. Obráceně bychom všem přidali, kdybychom se domnívali, že umírají až na konci roku. Lze míti za to, že skutečnost je průměrem těchto krajních možností. [Také lze předpokládati, že všecky příslušné osoby umírají vždy v polovině roku.]

4. Kolik let průměrně ještě prožije osoba 30letá?

2,291. Výsledky. Statistická pravděpodobnost, že osoba x-letá se dožije $x + n$ let je $p = \frac{l_{x+n}}{l_x}$. Pravděpodobnost, že se toho věku nedožije, jest $q = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - p$. Pravděpodobnost, že x-letá osoba zemře ve věku $x + n$ let je

$$p_{x,n} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}.$$

Pohlížíme-li na úlohy tohoto druhu se stanoviska pravděpodobnosti matematické, není odvození těchto vzorců tak jednoduché. Počítejme na př. pravděpodobnost prvou podle vzorce $p = \frac{a}{m}$, kdež a, m mají známý význam. Z l_x osob dožije se věku $x + n$ celkem l_{x+n} osob, ovšem neznámo kterých l_{x+n}. Takových skupin lze z původních l_x osob utvořiti $\binom{l_x}{l_{x+n}}$. Z tohoto počtu jsou osobě „příznivé" ty skupiny, jež ji obsahují. Těch je $\binom{l_x - 1}{l_{x+n} - 1}$. Odtud $p = \frac{l_{x+n}}{l_x}$.

Pravděpodobnost, že osoba zemře právě ve věku $x + n$, počítáme jako pravděpodobnost složenou, že se osoba dožije $x + n$ let, avšak nedožije $x + n + 1$ roku:

$$p_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}}\right) = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}.$$

[Pozor na jmenovatele v druhém faktoru! Nesmíme jej zaměniti za l_x, neboť při výpočtu pravděpodobnosti složené (že nastanou dva zjevy) jest třeba druhou pravděpodobnost dílčí počítat za předpokladu, že první zjev nastal.]

Střední délkou života osoby x-leté ($\overset{\circ}{e}_x$) nazýváme počet let, který taková osoba průměrně ještě prožije do konce života. Je to

$$\overset{\circ}{e} = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{105}}{l_x}.$$

Důkaz: Z osob x-letých zemře průběhem prvního roku $l_x - l_{x+1}$ osob, průběhem dalšího roku $l_{x+1} - l_{x+2}$ osob, atd. Kdyby všecky příslušné osoby umíraly vždy počátkem roku, prožily by všecky x-leté osoby do konce života ještě celkem $l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{105}$ let. Kdyby umíraly jen koncem roku, prožily by $l_x + l_{x+1} + \ldots + l_{105}$. Skutečný počet let bude průměr z těchto dvou krajních možností; střední délka života x-leté osoby je pak l_x-tý díl tohoto průměru:

$$\overset{\circ}{e} = \frac{1}{l_x}\left(\frac{l_x}{2} + l_{x+1} + \ldots + l_{105}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sum\limits_{x+1}^{105} l_{x+1}}{l_x}.$$

Můžeme také předpokládat, že skutečný počet prožitých let bude takový, jakoby osoby umíraly vždy uprostřed roku. Bude tedy žíti do poloviny prvního roku l_x osob, odtud do poloviny druhého roku l_{x+1} osob, atd., a jejich celkový počet prožitých let bude $\frac{1}{2}l + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$ Odtud odvodíme $\overset{\circ}{e}_x$ jako dříve.

Některé úlohy mluví též o t. zv. věku pravděpodobném; je to ten věk, jehož dožití přísluší pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ (a nedožití rovněž $\frac{1}{2}$). Jeho výpočet je značně jednodušší, význam jeho však značně menší než význam věku středního.

3. Metodika aritmetiky pojišťovací.

3,1. Všeobecné poznámky metodické. Vyniká-li *PP* množstvím rozmanitých cest, jimiž lze dospěti k cíli stanovenému učebními osnovami, není tomu tak v aritmetice pojišťovací. Úlohy pojišťovací nejsou tak rozmanité povahy jako úlohy *PP*; můžeme je seskupit v snadno přehledný systém několika základních typů. I tyto různé typy mají v řešení mnoho společných prvků. Proto není pojišťovací aritmetika tak vážným metodickým problémem jako *PP*. Také vyučovací výsledky bývají na tomto poli zpravidla příznivější, a obliba této partie proti *PP* zvláště u slabších žáků zřetelně větší.

Úvodem do vlastního učiva vyložíme podstatu pojistných smluv. Jsou to smlouvy sjednané mezi dvěma účastníky: pojištěncem a pojišťovnou; v nich se obě strany zavazují k určitým platům, nastanou-li okolnosti, jejichž pravděpodobnosti jsou známy. V životním pojišťování jsou těmito okolnostmi dožití určitého věku, úmrtí v určitém období a pod. Příslušné pravděpodobnosti zjišťujeme a posteriori ze statistiky trvání lidského života (tabulek úmrtnosti).

Souvislost s počtem pravděpodobnosti ukážeme tímto výkladem: Pojišťování je vlastně náhodná hra mezi pojištěncem a pojišťovnou. Pojišťovna nemůže vědět, bude-li míti zisk z jedné určité pojistky, ví to však o velikém kolektivu pojistek téhož druhu. Velikost platů, k nimž se zaváže pojištěnec a jež nazýváme prémiemi, určujeme na základě představy spravedlivé hry. To však vede k předpokladu rovnosti přijatých prémií a vyplacených pojistek, ovšem vždy náležitě diskontovaných. Tento předpoklad může být splněn ovšem jen tehdy, uzavře-li pojišťovna veliký kolektiv pojistek. Výpočet prémií proto založíme na fiktivním předpokladu, že se stejným způsobem současně pojišťuje kolektiv l_x osob téhož věku. Sestavíme pak rovnici, jejíž levá strana je součet diskontovaných prémií, jež tento kolektiv zaplatil, pravá strana pak součet diskontovaných pojistek, jež byly tomuto kolektivu pojišťovnou vyplaceny. K vypočítané prémii se v praksi připočítává jisté procento na režii, zisk a reservy pojišťovny.

Některým úlohám dobře přiléhá postup poněkud jiný. „Hra" (pojištění) je spravedlivá, jsou-li matematické naděje obou „hráčů" stejné. Základní rovnici můžeme proto sestaviti též tak, že na levou stranu položíme součet diskontovaných problematických hodnot prémií zaplacených pojištěncem, na pravou stranu pak podobný součet platů pojišťovny pojištěnci. Postup ten lze však doporučiti jen v úlohách rázu vysloveně individuálního (převzetí výměnku při převodu nemovitosti, kapitalisace renty a pod.). Můžeme tak ovšem řešiti všecky úlohy, našemu pojetí *PP* však lépe přiléhá postup kolektivní. Také úprava sestavené rovnice je poněkud jednodušší při postupu kolektivním. Stačí proto, řešíme-li některý příklad oběma způsoby; ukážeme též, že se oba liší jen formálně.

Zásadně však neužívejme hotových vzorců. Propočítejme též některé úlohy, jejichž povaha použití hotových vzorců vylučuje; na př. pojištění, v němž se pojištěný zaváže platit prémii jen několik let, nebo si pojistí jen dočasnou rentu místo doživotní. Pěstujeme tím zručnost v sestavování příslušných rovnic; také jejich úprava je dobrým cvičením matematické obratnosti.

3,2. Jednoduché úkoly pojišťovací.

3,21. Pojištění kapitálu a renty. Sem patří pojištění kapitálu na dožití určitého věku a pojištění doživotní renty od určitého věku. Prémie může být jediná, ihned splatná, nebo roční. Kombinováním těchto způsobů obdržíme čtyři základní úlohy. Jejich řešení založíme na rovnici, sestavené podle zásady výše vyložené.

Úpravu sestavené rovnice začneme dělením vhodnou mocninou úročitele r^x; x je věk, v němž se pojistka uzavírá. Zavedeme znaky $\frac{l_x}{r^x} = D_x$, $N_x = \sum_x^{105} D_x$, a s jejich pomocí provedeme potřebná zjednodušení.

Nové tabulky [lit. (9)] obsahují též čísla $S_x = \sum_x^{105} N_x$. Tím je umožněno zařaditi též úlohy, v nichž je pojištěna renta progresivní podle řady aritmetické, nebo takové, v nichž se platí roční prémie stejným způsobem klesající. Viz *Skalický*, lit. (12), kde jsou oba příklady podrobněji propočteny.

V úlohách, jimž lépe přiléhá použití pravděpodobnosti, užíváme, jak bylo řečeno, problematických hodnot kapitálů. Je-li částka K splatna po uplynutí n let, nastanou-li okolnosti, jejichž pravděpodobnost je p, jest její problematická hodnota $p \cdot \frac{K}{r^n}$. S touto částkou ihned vyplacenou (tudíž jistou) spokojila by se osoba, mající nárok na částku K za uvedených podmínek.

Ve výpočtech numerických používáme tabulek úmrtnosti, při čemž nezapomeneme upozornit, že jejich platnost jest omezena na kolektiv, jehož statistickým zpracováním byly pořízeny.

3,22. Pojištění na úmrtí a na úmrtí a dožití. Tyto úlohy tvoří druhou skupinu obsahující rovněž čtyři základní typy.

Při pojištění na úmrtí vyplácí pojišťovna koncem roku dědicům všech pojištěnců v tomto roce zemřelých pojištěnou částku K. V s-tém roce po uzavření pojistky je těchto zemřelých $l_{x+s-1} - l_{x+s}$. Vyplacené pojistky diskontované ke dni, v němž se pojistka uzavírá, jsou $\frac{K\,(l_{x+s-1} - l_{x+1})}{r}$. Pravá strana rovnice bude proto součtem těchto výrazů pro $s = 1, 2, \ldots$ Levá strana obsahuje buď jediný člen Pl_x (při pojištění jedinou prémií) nebo součet $pl_x + p\frac{l_{x+1}}{r} + \ldots$ (při pojištění roční prémií). Dělením r^x připravíme obě strany k úpravě. Levá strana neposkytuje nic nového; úprava pravé strany je však zdlouhavější. Z upraveného vzorce je zřejmé, že je výhodné zavésti nový znak $a_x = \frac{N_x}{D_x}$; hodnota a_x je tabelována.

Hotový vzorec obsahuje též konstantu $\frac{r-1}{r}$, kterou je dobře vypočítat předem a poznamenati. Pro základové procento tabulek ($p = 4\%$) je $\frac{r-1}{r} = \frac{0{,}04}{1{,}04} = \frac{1}{26}$.

Při pojištění prémií roční není třeba odvozovati namáhavě znovu pravou stranu. Jest třeba jen určiti poměr mezi jedinou prémií P a prémií roční p, jejíž doživotní placení by bylo prémii P ekvivalentní. Učiňme předpoklad, že celý kolektiv l_x změní své jednorázové pojistky v pojistky roční. Ježto povinnost pojišťovny zůstává nezměněna, je

$$Pl_x = pl_x + \frac{p}{r} l_{x+1} + \frac{p}{r^2} l_{x+2} + \ldots,$$

z čehož snadnou úpravou dostaneme

$$P = pa_x = K\left[1 - \frac{r-1}{r} a_x\right].$$

Ježto výpočet $\frac{r-1}{r} a_x = \frac{a_x}{26}$ je snadný, není výhodné uváděti vzorec na tvar

$$p = K\left[\frac{1}{a_x} - \frac{r-1}{r}\right].$$

Je možno počítati nejdříve přímo $1 - \frac{r-1}{r} a_x$, pak logaritmicky

$$p = \frac{K\left[1 - \frac{r-1}{r} a_x\right]}{a_x}.$$

Při pojištění na úmrtí a dožití určitého věku vyplatí pojišťovna pojištěnou částku pojištěnci, dožije-li se předepsaného věku, nebo dědicům, zemře-li pojištěnec dříve, koncem roku, v němž pojištěnec zemřel. Výpočet se liší od předešlého na straně pravé, při pojištění prémií roční i na straně levé. Na pravé straně se skončí součet výrazů $\frac{K\,(l_{x+s-1} - l_{x+1})}{r^s}$ u $s = n$ a přistoupí další člen $\frac{Kl_{x+n}}{r^n}$ representující výplatu pojistek pojištěncům, kteří se dožili splatnosti pojistky. Úpravu pravé strany provedeme zcela obdobně jako v případě předešlém. Také výsledný vzorec při pojištění jedinou prémií má týž tvar, až na to, že místo $\frac{N_x}{D_x}$ se objeví výraz $\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$, pro který se zavádívá zkratka $a_{x,n}$. Tento výraz však není tabelován, neboť je závislý na dvou indexech; proto může míti zavedení této zkratky význam jen formální: pro přehlednost a též jako pomůcka paměti, neboť uvádí vzorce pro pojištění na úmrtí a pojištění na úmrtí a dožití formálně na týž tvar.[5])

---

[5]) *Ondrák* [lit. (13)] zavádí ještě $a_x^{(n)} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$. Doporučuje odvoditi

Při pojištění prémií roční skončí se součet levé strany členem $p \cdot \frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}}$. Také tu není nutno znovu odvozovati pravou stranu. Prémii roční vypočítáme opět s pomocí fiktivního předpokladu, že kolektiv l_x změnil své jednorázové pojistky v pojistky roční. Jest pak

$$Pl_x = pl_x + \frac{p}{r} l_{x+1} + \frac{p}{r^2} l_{x+2} + \ldots + \frac{p}{r^{n-1}} l_{x+n-1}.$$

Snadnou úpravou obdržíme

$$P = pa_{x,n}.$$

I zde lze doporučiti stejný postup jako při pojištění na úmrtí, neboť konečný vzorec ve formě

$$p = K\left[\frac{1}{a_{x,n}} - \frac{r-1}{r}\right]$$

není pro výpočty nijak výhodný.

V závěru učiva aritmetiky pojišťovací budiž upozorněno i na jiné druhy pojištění a na sociální význam pojišťování.

4. Doslov; poznámky literární.

4,1. Metodická literatura PP a pojišťování. Metodická literatura matematiky zjevů kolektivních je celkem chudá. U nás hojně rozšířená velká metodika *Lietzmannova* [lit. (14)] obsahuje ve svém druhém díle povšechnou stať, jež je pozoruhodná upozorněním na klesající význam *PP*, založeného na kombinatorice, a požadavkem přiblížiti vyučování této partii životu a jeho situacím. Podle správného autorova soudu může tak učiniti Gaussova křivka chyb. Týž autor ve třetím díle této knihy pojednává o statistice a pojišťování. Soudí, že je podivné, že přes svoji důležitost vnikla statistika jen málo do matematického vyučování. O mravních hodnotách statistiky a jejich významu ve výchově pojednal u nás *Kollar* [lit. (15)].

Rozhodneme-li kladně otázku přiklonění *PP* na střední škole k statistickému stanovisku, zbývá ještě rozhodnouti, jak daleko je možno na tomto poli jíti. Gaussova křivka se rozhodně mlčky přejíti nemá. Nelze ovšem jít až k jejímu teoretickému zdůvodnění. Ani z pozoruhodné práce *Pólyovy* [lit. (16)] nelze vytěžiti přímý zisk pro vyučování.

---

napřed výrazy a_x, $a_x^{(n)}$, $a_{x,n}$ jako pravděpodobné dnešní hodnoty jistých důchodů jednokorunových; k tomu připojuje vzorec $P = K\frac{D_{x+n}}{D_x}$. Tím je umožněno napsati hned vhodnou rovnici pro jednoduché úlohy pojišťovací.

Autor tohoto článku žádal již před lety novou kolektivistickou orientaci vyučování *PP* [lit. (17)]. Jistým kamenem úrazu je nedostatek vhodných příkladů. Mají být brány z biometriky, přírodních věd, technických nauk a pod. Něco nalezne učitel v citované již literatuře (7, 10, 11).

Poměrně dobře je na tom *PP* založený na kombinatorice. Náš Časopis a jeho středoškolská příloha přinesly řadu článků, z nichž je možno vytěžiti mnoho zajímavých úloh. Mimo citované už autory [lit. (1, 2, 3)] patří sem dále práce *Vorovkovy* [lit. (18)], *Kauckého* [lit. (19)] a *Konečného* [lit. (20)]. Můžeme sem zařaditi též dvě přednášky matem.-přírodovědeckých kursů v Brně 1931 [*Kaucký* (3), *Hostinský* (21)]. Dobré (řešené) příklady obvyklých typů najdeme v známé maturitní sbírce *Dvořákově* [lit. (22)].

K prohloubení znalostí *PP* je možno doporučiti české spisy: *Láska* [lit. (23)], *Hostinský* [lit. (24)], *Kaucký* [lit. (25)], *Rychlík* [lit. (26)]. Seznam cizí literatury se stručnými charakterisujícími poznámkami najde čtenář na př. v knize *Kauckého* (25). Teorii statistiky lze studovati z obšírného, do češtiny přeloženého díla *Yuleova* [lit. (8)]. Také v tomto díle nalezne čtenář obsažný seznam další literatury.

4,2. Neřešené a nedořešené problémy metodiky PP. Z nezpracovaných nebo aspoň pro středoškolské vyučování dostatečně nezpracovaných otázek uvádím aspoň některé. Je to především velmi naléhavá potřeba experimentálního ověření zákona velikých čísel. V odst. 1,4 byla již řeč o pracích tohoto druhu [lit. (4)]. Zajímavý návrh kolektivního experimentu podal *Čech* [lit. (5)]; pokus, zdá se, nebyl dosud v praksi vyzkoušen. Jeho úspěšné provedení by jistě žákům vrhlo pravé světlo na *PP* a jeho praktický význam. Autor správně podotýká, že pokus nesmí být příliš složitý a pracný, má-li se potkati se zdarem. Jeho návrh této podmínce vyhovuje.

Také otázka použití grafických metod v *PP* není dosud rozřešena, ačkoli grafické metody jsou velmi cenné po stránce výchovné i didaktické, a jejich použití plně odpovídá výsledkům pedagogické psychologie. Patří sem jen stručný článek autorův [lit. (27)].

Nevyužity zůstávají pro matematické vyučování různé aplikace *PP*, na př. na zákony dědičnosti, na kontrolu výroby, na telefonní problém a na moderní fysiku. Jsou to vesměs věci zásadní důležitosti pro moderní vědu i životní praksi; jejich zpřístupnění by přineslo jistě mnoho kladů pro vyučování již pro nespornou zajímavost tohoto materiálu. Rozřešiti uspokojivě tyto otázky se ovšem podaří jen obětavou spoluprací všech, kdož pracují v metodice středoškolské matematiky.

Také hlavní principy t. zv. vyrovnání chyb by měly být aspoň naznačeny. Snad by to šlo v úvodních hodinách fysikálních praktických cvičení, kde se může výkladům dostat i praktického příkladu na př. měřením dotykovým měřítkem. Důležitý statistický pojem korelace neměl by též zůstat žákům cizí. Také tu není zatím známa vhodná cesta k řešení. Rozhodně jí není ta, jež podává prostě hotové výsledky bez jakéhokoli zdůvodnění, cesta, kterou podstoupily některé středoškolské učebnice cizí.

4,3. Seznam citované literatury. (1) *Schoenbaum*, Přirozený lidský rozum a matematika, ČMF **40**. — (2) *Friedrich*, Z pout klamného úsudku k poznání (část), RMP *V*. — (3) *Kaucký*, Několik kapitol z počtu pravděpodobnosti, Sborník mat.-přírod. kursů, Brno 1931. — (4) *Hrazdil*, Experimentální určení čísla π, ČMF **50**. — (5) *Čech*, Kombinatorika a počet pravděpodobnosti na středních školách, ČMF **68**. — (6) *Rotrekl*, O konstrukci tabulek úmrtnosti, RMP **13**. — (7) *Gebauer*, Aplikovaná matematika pro vojsko, Praha 1931. — (8) *Yule*, Úvod do teorie statistiky, český překlad, Praha 1926. — (9) *M. Valouch-M. A. Valouch*, Tabulky logaritmické, 10. vyd., Praha 1937. — (10) *Pírko*, Úlohy z počtu pravděpodobnosti, ČMF **67**. — (11) *Klimeš*, Pravděpodobnost zásahu při leteckém bombardování, RMP **15**. — (12) *Skalický*, Nové tabulky úmrtnosti, ČMF **68**. — (13) *Ondrák*, Poznámka k složitému úrokování a aritmetice pojišťovací, ČMF **56**. — (14) *Lietzmann*, Methodik d. math. Unterrichts, Leipzig. — (15) *Kollar*, Mravní hodnoty statistiky a jejich význam ve výchově, Střední škola XVII. — (16) *Pólya*, Anschaulich-experimentelle Herleitung der Gaussschen Fehlerkurve, Zeitschrifts f. math. u. naturwiss. Unterricht **52**. — (17) *Skalický*, Počet pravděpodobnosti na strednej škole, Výroční zpráva RG Nové Zámky 1930-31. — (18) *Vorovka*, O pravděpodobnosti příčin, ČMF **43**. — (19) *Kaucký*, Z počtu pravděpodobnosti, RMP *III*. — (20) *Konečný*, Několik úloh z elementárního počtu pravděpodobnosti, RMP **17**. — (21) *Hostinský*, O některých aplikacích počtu pravděpodobnosti, Sborník mat.-přírod. kursů, Brno 1931. — (22) *Dvořák*, Maturitní otázky z matematiky, II. vyd., Praha 1932. — (23) *Láska*, Počet pravděpodobnosti, Praha 1921. — (24) *Hostinský*, Geometrické pravděpodobnosti, Praha 1926. — (25) *Kaucký*, Úvod do počtu pravděpodobnosti a teorie statistiky, Praha 1934. — (26) *Rychlík*, Úvod do počtu pravděpodobnosti, Praha 1938. — (27) *Skalický*, Grafické metody v počtu pravděpodobnosti, ČMF **62**.

[ČMF = Časopis pro pěst. mat. a fysiky, RMP = Rozhledy matem.-přírodovědecké.]
