Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hejzlar

O křivce zápalové

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 1, 27--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121789

O křivce zápalové.

Sestavil

Dr. Fr. Hejzlar.

Pokrajní paprsky světla rovnoběžně s osou a v téže rovině na kulové zrcadlo dopadající neprotínají se, byvše odraženy, se středními paprsky v bodě jediném, t. j. v ohnisku, nýbrž v bodech mnohých křivou čáru tvořících. I chceme dokázati, že tato čára, jíž *křivka zápalová* čili *kaustická* nebo *zápalnice* díme, jest *epikykloida.* Za tou příčinou vyvineme 1. rovnici epikykloidy, 2. rovnici zápalnice a srovnáme 3. obě tyto rovnice.

ad 1. Epikykloida ku př. STU (obr. 1.) jest křivka opsaná bodem (M) ležícím v kružnici kruhu (k), jenž se vně po obvodě jiného kruhu (K) valil. Odtud patrno především čtvero vlastností:

a) Počal-li se kruh valiti, když bod M v bodě S se nalézal, musí

$$arc.\, MN = arc\, SN; \tag{1}$$

b) po jednom vykonaném otočení dotkne se bod M bodu U a kruhový oblouk SU rovná se obvodu kruhu k;

c) ve středu naší křivky, t. j. v bodě T dosáhne M od nehybné kružnice největší vzdálenosti $TV = 2r$ a konečně

d) epikykloida postupuje od S na obě strany dále tím způsobem, že stejné oblouky STU neustále se opakují.

Budiž střed O pólem, přímka jím a bodem S probíhající osou polárnou a $OM = S$ průvodič opisujícího bodu M; i plyne z trojúhelníku CMO (dle věty Carnotovy)

$$\varrho^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2\,(R + r)\,.\,r\,.\,cos\,\beta. \tag{2}$$

Uvážíme-li, že *)

$$arc.\, MN = r\beta$$
$$arc.\, SN = R\alpha$$

a že dle rovnice (1) sluší psáti

$$r\beta = R\alpha$$

čili

$$\beta = \frac{R}{r}\,\alpha,$$

*) Viz: *Václ. Jandečka* „Geometria pro vyšší gymnasia“ díl I. str. 110.

promění se stejnina (2) v

$$\varrho^2 = (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)\, r \,.\, \cos \frac{R}{r}\, \alpha.$$

Z této epikykloidě vůbec příslušné rovnice zjednáme si kladouce

$$r = \frac{1}{2} R$$

rovnici zvláštní

$$\varrho^2 = \frac{10 R^2}{4} - \frac{3 R^2}{2} \cos 2\alpha$$

nebo

$$\varrho^2 = R^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha) \right),$$

z níž dosazením známého vzorce

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

posléze obdržíme

$$\varrho^2 = R^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha) \tag{3}$$

t. j. rovnici epikykloidy vzniklé valením se kruhu, jehož poloměr rovná se polovičce poloměru kruhu nehybného.

ad. 2. Je-li EF (obr. 2.) zrcadlo kulové ku př. duté, O střed a $OM = P$ poloměr jeho, protnou se dva sobě blízké a s osou OX rovnoběžné paprsky HM a GN po odrazu v bodě J.[1])

Vztah souřadnic toho bodu bude zároveň rovnice křivky, ve které všecky průsečné body odražených paprsků leží.

Položme O za počátek pravoúhlých souřadnic [2]), OX za osu x-vou a označme vzdálenosť bodu M (x, y) od bodu $J(x', y')$ písmenem u; se zřetelem ku stejninám

$$\delta = 2\alpha$$

a

$$x = P \cos \alpha$$
$$y = P \sin \alpha$$

nabudeme pak

$$\left.\begin{aligned} x' &= OR - LR = x - u \cos \delta = P \cos \alpha - u \cos 2\alpha \\ y' &= MR - MS = y - u \sin \delta = P \sin \alpha - u \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) **Na zrcadle vypuklém vznikne prodloužením odražených paprsků *zdánlivý* bod průsečný a tudíž i *zdánlivá* zápalnice.**

[2]) **Zde užito: Dr. *Alb. Mousson* „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung" II. Band, 2. Aufl. str. 294—297.**

Ježto poloměrem u opsaný oblouček jest

$$MT = u\varepsilon$$

a z pravoúhelného trojúhelníka MTN, jehož strany za přímky míti můžeme, vysvítá, že

$$MT = MN \,.\, \cos\vartheta,$$

bude

$$u\varepsilon = MN \,.\, \cos\vartheta.$$

Jest však

$$MN = P\mu,$$

$$\vartheta = \sphericalangle OMK = \alpha$$

(ramena těchto úhlů stojí na sobě kolmo) a rovnoramenného trojúhelníka ONQ vnější úhel

$$\delta + \varepsilon = 2(\alpha + \mu) = 2\alpha + 2\mu$$

čili

$$\varepsilon = 2\mu;$$

pročež

$$u\varepsilon = P\mu \,.\, \cos\alpha,$$

z čehož ustanovíme

$$u = \frac{\mu}{\varepsilon} \,.\, P\cos\alpha$$

nebo

$$u = \frac{1}{2} P\cos\alpha = \frac{1}{2} x.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnic (4), objeví se nám

$$x' = P\cos\alpha - \frac{1}{2} P\cos\alpha \cos 2\alpha = P\cos\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right]$$

$$= P\cos\alpha\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right]$$

$$= P\cos\alpha\left[\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]$$

$$y' = P\sin\alpha - \frac{1}{2} P\cos\alpha \sin 2\alpha = P\sin\alpha\,[1 - \cos^2\alpha]$$

čili

$$x' = P\cos\alpha\left[\frac{1}{2} + \sin^2\alpha\right]$$

$$y' = P\sin^3\alpha.$$

Abychom nyní vztah souřadnic bodu J, kteréhož průvodič budiž ϱ, určili, řiďme se stejninou

$$\varrho^2 = x'^2 + y'^2$$

a najdeme

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= P^2 \cos^2\alpha \left[\frac{1}{2} + \sin^2\alpha\right]^2 + P^2 \sin^6\alpha \\
&= P^2 \left[\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha \,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\right] \\
&= P^2 \left[\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{4}\,[\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha],
\end{aligned}$$

z čehož vychází na jevo rovnice křivky zápalné

$$\varrho^2 = \frac{1}{4} P^2 (1 + 3\sin^2\alpha) \qquad (5)$$

ad 3. Srovnáme-li obě rovnice (3) a (5), shledáme, že týž tvar do sebe mají a že tudíž křivka zápalová jest epikykloida, která by se opsati dala bodem valící se kružnice v poloměru rovném polovičce poloměru kruhu nehybného. Poloměr tohoto kruhu jest ale dle (3) $\frac{1}{2} P$ t. j. druhá odmocnina ze součinitele binomu $1 + 3\sin^2\alpha$; pročež přísluší valícímu se kruhu poloměr $\frac{1}{4} P$.

Odtud sestrojení křivky zápalové (obr. 3.) zajisté snadno pochopiti lze.