Emil Weyr

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 1, 24--39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121784

Bude pak

$$\frac{d\gamma_2}{dc_2} = M(c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2) \frac{d\gamma_1}{dc_1}.$$

Avšak γ_2 záviseti má pouze na c_2, tedy platí totéž o $\frac{d\gamma_2}{dc_2}$, musí býti tudíž součin $M\frac{d\gamma_1}{dc_1}$ pouhou funkcí c_2, *což jen tenkráte možno, je-li*

$$M(c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2) = \psi_1 (c_1 \gamma_1) \psi_2 (c_2 \gamma_2),$$

kdež ψ_1 ψ_2 libovolné funkce značí.

Napotom nutno položiti

$$\psi_1 (c_1 \gamma_1) \frac{d\gamma_1}{dc_1} = \alpha. \qquad (4)$$

kdež je α libovolnou stálou, z čehož pak plyne

$$\frac{d\gamma_2}{dc_2} = \alpha \psi_2 (c_2 \gamma_2). \qquad (5)$$

Z differenciálních rovnic (4), a (5) plynou integrováním γ_1 a γ_2 co funkce c_1 a resp. c_2, čímž úkol řešen.

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně.

(Podává Dr. *Emil Weyr.*)

Mezi veškerými algebraickými křivkami nejjednodušeji lze pojednávati křivky *racionální*. Racionální křivkou nazýváme takovou křivku algebraickou, jejíž body lze jednoznačně (eindeutig) určovati pomocí jediného proměnného parametru spůsobem algebraickým. Zavedeme-li tudíž souřadnice rovnoběžné, musí se tyto pro každý bod racionální křivky jeviti co algebraické funkce jisté jednoznačně proměné u, kterou pak *parametrem* nazýváme.

Tak na př. lze vyjádřiti souřadnice x, y bodu přímky, rovnicemi

$$x = a + \alpha u$$
$$y = b + \beta u$$

kde u libovolnou proměnnou značí. Každé hodnotě veličiny u odpovídá jediný jen bod v rovině soustavy souřadnic a veškeré, veškerým hodnotám u příslušné body vyplňují přímku, jejíž rovnice zní:

$$(\beta x - \alpha y) = (a\beta - b\alpha)$$

Pro přímku můžeme rovnice pro x a y do všeobecnějšího tvaru uvésti, totiž co zlomky, jichž čitatelé i jmenovatelé jsou linearné binomy. A poněvadž každému bodu přímky jediná hodnota parametru a naopak přísluší, musí obě souřadnice (x, y) pro tutéž hodnotu u státi se nekonečně velkými t. j. jmenovatelé obou zlomků, které vyjadřují souřadnice, musí se až na stálého součinitele úplně shodovati. Soudíme tedy, že i rovnice

$$x = \frac{a + \alpha u}{m + n u}$$

$$y = \frac{b + \beta u}{m + n u}$$

určují body přímce náležící.

Rovnice přímky té obdržíme vyloučením parametru u z obou rovnic. Tato eliminace přivádí nás k rovnici:

$$(m\beta - bn)\, x + (an - m\alpha)\, y = (a\beta - b\alpha).$$

Parametr nekonečně vzdáleného bodu přímky plyne z rovnice

$$m + nu = 0 \quad \text{t. j.} \quad u = -\frac{m}{n}$$

a parametry bodů, v nichž přímka osy x, y protíná, plynou obdobně z rovnic

$$a + \alpha u = 0 \text{ a } b + \beta u = 0.$$

Parametr průseku přímky s libovovolnou křivkou $F(x,y) = 0$ obdržíme, vložíme-li do rovnice této křivky za x a y hodnoty pro přímku platící a řešíme-li rovnici dle u.

Obdobně lze vyjádřiti souřadnice bodů křivek druhého stupně [které jak známo racionálními jsou] pomocí rovnic:

$$x = \frac{a_1 u^2 + b_1 u + c_1}{a_3 u^2 + b_3 u + c_3}$$

$$y = \frac{a_2 u^2 + b_2 u + c_2}{a_3 u^2 + b_3 u + c_3}$$

Rovnice kuželosečky takto vyjádřené obdržíme eliminací veličiny u z obou rovnic které k tomuto účelu můžeme psáti:

$$u^2 (a_3 x - a_1) + u (b_3 x - b_1) + (c_3 x - c_1) = 0$$

$$u^2 (a_3 y - a_2) + u (b_3 y - b_2) + (c_3 y - c_2) = 0;$$

vyloučíme-li poslední členy těchto dvou rovnic a dělíme-li společným činitelem u, obdržíme rovnici:

$$u\,[(a_2 c_3)\,x + (a_3 c_1)\,y + (a_1 c_2)] + [(b_2 c_3)\,x + (b_3 c_1)\,y + (b_1 c_2)] = 0.$$

Při čemž všeobecně k vůli krátkosti položeno jest

$$a_i\,b_k - a_k\,b_i = (a_i\,b_k)$$

a vyloučíme-li naopak první čtvercem u^2 opatřené členy, obdržíme

$$u\,[(a_2 b_3)\,x + (a_3 b_1)\,y + (a_1 b_2)] + [a_2 c_3)\,x + (a_3 c_1)\,y + (a_1 c_2)] = 0.$$

Vyloučením veličiny u z posledních dvou rovnic obdržíme konečně rovnici kuželosečky:

$$[(a_2 b_3)\,x + (a_3 b_1)\,y + (a_1 b_2)]\,[(b_2 c_3)x + (b_3 c_1)\,y + (b_1 c_2)] = [(a_2\,c_3)x + (a_3 c_1)\,y + (a_1 c_2)]^2$$

Jest to křivka dotýkající se přímek

$$(a_2\,b_3)\,x + (a_3\,b_1)\,y + (a_1\,b_2) = 0$$
$$(b_2\,c_3)\,x + (b_3\,c_1)\,y + (b_1\,c_2) = 0$$

v bodech, kde tyto protínají přímku:

$$(a_2 c_3)\,x + (a_3\,c_1)\,y + (a_1\,c_2) = 0.$$

Jdeme-li o stupeň výše, přijdeme ku křivkám řádu třetího, pro které pak (jsou-li racionální) platí rovnice:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1\,u^3 + b_1\,u^2 + c_1\,u + d_1}{a_3\,u^3 + b_3\,u^2 + c_3\,u + d_3} \\ y &= \frac{a_2\,u^3 + b_2\,u^2 + c_2\,u + d_2}{a_3\,u^3 + b_3\,u^2 + c_3\,u + d_3} \end{aligned} \qquad (1)$$

Rovnice křivky samé obdrželi bychom vyloučením parametru u z obou těchto rovnic. Obě souřadnice x, y stanou se současně nekonečně velkými, je-li:

$$a_3\,u^3 + b_3\,u^2 + c_3\,u + d_3 = 0,$$

kořeny této rovnice jsou tedy parametry nekonečně vzdálených tří bodů naší křivky. Dle reálnosti, pomyslnosti a rovnosti kořenů poslední rovnice mohou nastat následující čtyry případy:

1. všecky tři nekonečně vzdálené body jsou realné,
2. dva pomyslné a jeden reálný,
3. dva splývající a třetí reálný,
4. všecky tři splývající.

V prvním případu má křivka tři větvě, v druhém jedinou, v třetím jest nekonečně vzdálená přímka tangentou a křivka má dvě větve, a v čtvrtém případě jest nekonečně vzdálená přímka tečnou obratu a křivka má jedinou větev.

Pro průseky s *libovolnou* přímkou

$$Ax + By + C = 0$$

obdržíme, dosadíme-li za x a y hodnoty, rovnici:

$$A(a_1u^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1) + B(a_2u^3 + b_2u^2 + c_2u + d_2)$$
$$+ C(a_3u^3 + b_3u^2 + c_3u + d_3) = 0, \text{ aneb}$$
$$u^3(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) + u^2(Ab_1 + Bb_2 + Cb_3) + u(Ac_1 + Bc_2 + Cc_3)$$
$$+ (Ad_1 + Bd_2 + Cd_3) = 0,$$

z kteréž plynou tři kořeny u_1, u_2, u_3 co parametry tří průseků křivky a přímky. Poněvadž dva body křivky již určují jimi procházející přímku a tedy i třetí průsek této s křivkou, soudíme, že mezi kořeny $u_1\, u_2\, u_3$ poslední rovnice musí platiti takový vztah, že lze z dvou těchto tří hodnot vždy třetí jednoznačně určiti.

Rovnici, tuto souvislost vyjadřující, následujícím spůsobem obdržíme. Zaveďme zkrácené označení:

$$(u)_1 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$(u)_2 = u_2\, u_3 + u_3\, u_1 + u_1\, u_2$$
$$(u)_3 = u_1\, u_2\, u_3$$

Pak plyne ze známých vlastností součinitelů rovnic vyšších stupňů, že:

$$(u)_1 = -\frac{Ab_1 + Bb_2 + Cb_3}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$$
$$(u)_2 = \frac{Ac_1 + Bc_2 + Cc_3}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$$
$$(u)_3 = -\frac{Ad_1 + Bd_2 + Cd_3}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$$

aneb:

$$A\,[a_1(u)_1 + b_1] + B\,[a_2(u)_1 + b_2] + C\,[a_3(u)_1 + b_3] = 0$$
$$A\,[a_1(u)_2 - c_1] + B\,[a_2(u)_2 - c_2] + C\,[a_3(u)_2 - c_3] = 0$$
$$A\,[a_1(u)_3 + d_1] + B\,[a_2(u)_3 + d_2] + C\,[a_3(u)_3 + d_3] = 0$$

Z těchto rovnic plyne vyloučením koefficientů A, B, C rovnice, na hodnotách A, B, C a tedy i na poloze přímky nezávislá, ve formě determinantu

$$\begin{vmatrix} [a_1(u)_1 + b_1], & [a_2(u)_1 + b_2], & [a_3(u)_1 + b_3] \\ [a_1(u)_2 - c_1], & [a_2(u)_2 - c_2], & [a_3(u)_2 - c_3] \\ [a_1(u)_3 + d_1], & [a_2(u)_3 + d_2], & [a_3(u)_3 + d_3] \end{vmatrix} = 0.$$

Rozložíme-li determinant na osm determinantů jednoduchými prvky opatřených, obdržíme:

$$\begin{vmatrix} a_1(u)_1 & a_2(u)_1 & a_3(u)_1 \\ a_1(u)_2 & a_2(u)_2 & a_3(u)_2 \\ a_1(u)_3 & a_2(u)_3 & a_3(u)_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(u)_1 & a_2(u)_1 & b_3 \\ a_1(u)_2 & a_2(u)_2 & -c_3 \\ a_1(u)_3 & a_2(u)_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(u)_1 & b_2 & a_3(u)_1 \\ a_1(u)_2 & -c_2 & a_3(u)_2 \\ a_1(u)_3 & d_2 & a_3(u)_3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_2(u)_1 & a_3(u)_1 \\ -c_1 & a_2(u)_2 & a_3(u)_2 \\ d_1 & a_2(u)_3 & a_3(u)_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3(u)_1 \\ -c_1 & -c_2 & a_3(u)_2 \\ d_1 & d_2 & a_3(u)_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2(u)_1 & b_3 \\ -c_1 & a_2(u)_2 & -c_3 \\ d_1 & a_2(u)_3 & d_3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1(u)_1 & b_2 & b_3 \\ a_1(u)_2 & -c_2 & -c_3 \\ a_1(u)_3 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \text{*)}$$

Vyjmeme-li v prvním determinantu společný součin $a_1 a_2 a_3$ a v dalších třech vždy seučiny $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$, shledáme, že první má všecky, a ostatní tři vždy dva sloupce totožné, tak že první čtyry determinanty se rovnají nulle.**) Zbývající část rovnice lže psáti:

$$a_1 \begin{vmatrix} (u)_1 & b_2 & b_3 \\ (u)_2 & -c_2 & -c_3 \\ (u)_3 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} (u)_1 & b_1 & b_3 \\ (u)_2 & -c_1 & -c_3 \\ (u)_3 & d_1 & d_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} (u)_1 & b_2 & b_1 \\ (u)_2 & -c_2 & -c_1 \\ (u)_3 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Rozvineme-li a spojíme-li členy $(u)_1$, $(u)_2$, a $(u)_3$ obsahující, tu obdržíme:

$$(u)_1 \, [a_2 (d_2 c_3 - c_2 d_3) + a_2 (d_3 c_1 - c_3 d_1) + a_3 (d_1 c_2 - c_1 d_2)] +$$
$$(u)_2 \, [a_1 (b_3 d_2 - b_2 d_3) + a_2 (b_1 d_3 - b_3 d_1) + a_3 (b_2 d_1 - b_1 d_2)] +$$
$$(u)_3 \, [a_1 (b_3 c_2 - b_2 c_3) + a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2)] - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

aneb:

$$(u)_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (u)_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (u)_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

aneb:

$$(u)_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (u)_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + (u)_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Viz *Studnička* „O determinantech“ str, 25.

**) Viz *Studnička* l. c. str. 23.

aneb kratčeji:

$$(u)_3\,(a_1\,b_2\,c_3) + (u)_2\,(a_1 b_2\,d_3) + (u)_1\,(a_1\,c_2\,d_3) + (b_1\,c_2\,d_3) = 0 \quad (2)$$

Položíme-li nyní k vůli větší krátkosti

$$(a_1\,b_2\,c_3) = M_3,\ (a_1\,b_2\,d_3) = M_2,$$
$$(a_1\,c_2\,d_3) = M_1,\ (b_1\,c_2\,d_3) = M_0,$$

pak rovnice též zní:

$$M_0 + M_1\,(u)_1 + M_2\,(u)_2 + M_3\,(u)_3 = 0. \quad (3)$$

Vypíšeme-li tu, bude

$$M_0 + M_1\,(u_1 + u_2 + u_3) + M_2\,(u_2 u_3 + u_3\,u_1 + u_1\,u_2) + M_3\,u_1 u_2 u_3 = 0.$$

Tato rovnice vyjadřuje podmínku, by tři body křivky u_1, u_2, u_3 se na téže přímce nalezaly.

Z rovnice té lze určit třetí průsek u_3 přímky procházející danými dvěma body u_1. u_2 naší křivky.

Píšeme-li totiž základní naši rovnici (2) ve formě:

$$[M_0 + M_1\,(u_1 + u_2) + M_2\,u_1\,u_2] + u_3\,[M_1 + M_2(u_1 + u_2) + M_3 u_1 u_2] = 0,$$

tak obdržíme:

$$u_3 = -\frac{M_0 + M_1\,(u_1 + u_2) + M_2\,u_1\,u_2}{M_1 + M_2\,(u_1 + u_2) + M_3\,u_1\,u_2}.$$

Jak z posledního tvaru základní rovnice na jevo vychází, bude tato pro *zcela libovolné* u_3 splněna, jest-li současně

$$\left.\begin{aligned} M_0 + M_1\,(u_1 + u_2) + M_2\,u_1\,u_2 &= 0 \\ M_1 + M_2\,(u_1 + u_2) + M_3\,u_1\,u_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

takže *každý* bod křivky s oběma body plynoucími z rovnic (4) na tétéž přímce se nalezá; přímka spojující body, jenž z rovnic (4) plynou, jest tedy úplně neurčitá. Z toho soudíme, že *každá* bodem u_1 (z rovnic (4) určeným) procházející přímka protíná křivku v bodě u_2 (též z (4) plynoucím), což se však jen pak může státi, splývají-li tyto dva body v jediném jen bodě roviny křivky. V bodě tom protíná tedy každá jím procházející přímka naši křivku v dvou splývajících bodech a bod ten jest tudíž pro křivku bodem *dvojným.*

Naše křivka tedy má bod *dvojný* a z rovnic (4) plynou parametry obou dvojnému bodu (na ním procházejících větvích) nekonečně blízkých (sousedních) bodů.

Z rovnic (4) plyne

$$u_1 + u_2 = \frac{M_1\,M_2 - M_0\,M_3}{M_1\,M_3 - M_2^2}$$

$$u_1\,u_2 = \frac{M_3\,M_2 - M_1^2}{M_1 M_3 - M_2^2}.$$

tak že tedy parametry bodu dvojného (t. j. vlastně parametry bodů tomu nekonečně blízkých, na ním procházejících větvích se nalezajících bodů) jsou kořeny kvadratické rovnice:

$$u^2(M_1 M_3 - M_2{}^2) + (M_0 M_3 - M_1 M_2)u + (M_0 M_2 - M_1{}^2) = 0 \quad (5)$$

Tyto kořeny budou reálné, pomyslné aneb splývající, dle toho je-li

$$(M_0 M_3 - M_1 M_2)^2 \gtreqless 4(M_1 M_3 - M_2{}^2)(M_0 M_2 - M_1{}^2)$$

V prvním případu jsou oba sousední body bodu dvojného reálné a tedy i tečny bodu dvojného (přímky jej se sousedními dvěma body spojující) t. j. bod dvojný jest *skutečným* bodem takovým, v kterém se dvě realné větve křivky protínají. V druhém případě, jest dvojný bod bodem *isolovaným* čili *osamotnělým* a v třetím případě kde oba body sousední a tedy i obě tečny splývají, máme bod *návratu.*

Na základě rovnice (2) lze všeliké, racionální křivky se týkající otázky rozluštiti.

Splynou-li dva z tří průseků u_1 u_2 u_3 přímky a křivky na př. u_3 a u_2, stane se přímka tečnou křivky v bodě u_2 a u_1 bude další průsek tečny s křivkou. Bod u_1 se pak nazývá *bodem tangenciálním* bodu u_2.*

Relace mezi bodem u_2 a jeho bodem tangenciálním plyne z rovnice (2) jest-li že položíme $u_3 = u_2$; tím obdržíme:

$$[M_0 + 2M_1 u_2 + M_2 u_2{}^2] + u_1 [M_1 + 2M_2 u_2 + M_3 u_2{}^2] = 0 \quad (6)$$

z které rovnice lze k danému bodu u_2 příslušný tangenciální bod u_1 nalézti; jest totiž:

$$u_1 = -\frac{M_0 + 2M_1 u_2 + M_2 u_2{}^2}{M_1 + 2M_2 u_2 + M_3 u_2{}^2}.$$

Chceme-li naopak k danému bodu u_1 příslušný bod u_2 najíti, tu musíme patrně řešiti dle u_2 quadratickou rovnici (6):

$$u_2{}^2 (M_2 + M_3 u_1) + 2u_2 (M_1 + M_2 u_1) + (M_0 + M_1 u_1) = 0,$$

z čehož plyne:

$$u_2 = -\frac{(M_1 + M_2 u_1) \pm \sqrt{(M_2{}^2 - M_1 M_3)u_1{}^2 + (M_1 M_2 - M_0 M_3)u_1 + (M_1{}^2 - M_0 M_2)}}{M_2 + M_3 u_1}$$

Obdržíme tudíž dvě, buď současně reálné aneb současně pomyslné hodnoty pro u_2 t. j. z každého *bodu křivky* vycházejí

---

*) Viz: *Cremona* „Úvod do geometrické theorie křivek rovinných str. 44. českého vydání.

dvě buď současně reálné aneb současně imaginární tangenty křivky. A poněvadž tangenta v bodu samém platí za dvě (splývající) tangenty, tedy soudíme, že každým bodem procházejí $2 + 2 = 4$ tangenty křivky a že tato jest tedy *čtvrté třídy*. Všeobecná křivka třetího stupně nemajíc bod dvojný jest šesté třídy; bod dvojný zmenší třídu původní vždy o dvě jednice.

Co se tkne realnosti neb pomyslnosti obou s bodu u_1 proložených tečen, tu závisí tato na znaménku veličiny pod odmocninou se vyskytující.

Má-li rovnice

$(M_2{}^2 - M_1 M_3) u_1{}^2 + (M_1 M_2 - M_0 M_3) u_1 + (M_1{}^2 - M_0 M_2) = 0$

reálné kořeny, pak tyto oddělují veškeré reálné hodnoty na dvě části, z nichž jedna činí výraz po levé straně poslední rovnice stojící hodnotou kladnou a druhá hodnotou zápornou.

Poslední rovnice jest však rovnice (5), tak že tedy pro případ, kdy křivka má skutečný dvojný bod, tento rozděluje křivku na dvě části. Každým bodem jedné, procházejí dvě reálné a každým bodem druhé dvě pomyslné tečny. Poslední část nazýváme *kličkou křivky.*

Má-li rovnice (5) pouze imaginární kořeny t. j. je-li dvojný bod bodem osamotnělým, pak by se u_2 mohlo státi buď *vždy reálným* aneb *vždy pomyslným* t. j. pak *každým* bodem by procházely buď dvě reálné aneb dvě pomyslné tečny. Z těchto dvou případů může však pouze první nastati, neb je-li u_1 libovolný bod křivky, tu tečna jeho protne na *každý pád* křivku v reálném bodě u_2, kterým mimo reálné tečny $\overline{u_2 u_1}$ *musí* procházeti druhá *reálná* tečna. A to pak platí pro veškeré body křivky.

Splynou-li veškeré tři průseky přímky a křivky v bod jediný, pak jest tento *bodem obratu* (inflekčním) a příslušná tečna jest *tečnou obratu*. Bod obratu splývá tudíž se svým bodem tangenciálním. Parametry bodů obratu obdržíme, položíme-li do základní rovnice (2) $u_1 = u_2 = u_3 = u$.

Tím stane se $(u)_1 = 3u$, $(u)_2 = 3u^2$, $(u)_3 = u^3$ a pro body obratu obdržíme tudíž rovnici:

$$M_3 u^3 + 3 M_2 u^2 + 3 M_1 u + M_0 = 0$$

která jsouc třetího stupně tři kořeny $u_1\, u_2\, u_3$ míti bude. Tyto kořeny jsou pak parametry bodů obratu. Takových bodů stává tudiž tré. Buď jsou všecky reálné aneb jeden reálný a dva sdruženě imaginární. Z poslední rovnice pro body obratu plyne

$$(u)_1 = \frac{-3M_2}{M_3}$$

$$(u)_2 = \frac{3\,M_1}{M_3}$$

$$(u)_3 = \frac{-M_0}{M_3};$$

násobíme-li tyto rovnice posloupně činiteli $M_1\ M_2\ M_3$ a sečteme-li, tu obdržíme:

$$M_1\,(u)_1 + M_2\,(u)_2 + M_3\,(u)_3 = -M_0$$

a tudíž

$$M_0 + M_1\,(u)_1 + M_2\,(u)_2 + M_3\,(u)_3 = 0$$

z čehož plyne: *„že všecky tři body obratu se na přímce nalézají.**

Každý bod obratu má tu vlastnost, že splývá se svým bodem tangenciálním, poněvadž jeho tečna jest přímka protínající křivku v třech nekonečně blízkých bodech.

Základní rovnice stane se co možná nejjednodušší, učiníme-li, aby dvojnému bodu příslušely parametry 0, ∞, což vždy možné jest. Dostačí považovati co parametr u libovolného bodu karakteristický poměr **) paprsku $U = \delta u$, vzhledem k tečnám $T_1\ T_2$ bodu dvojného δ t. j, položiti $u = \frac{sin\ T_1\ U}{sin\ T_2\ U}$; pak nekonečně blízký bod větve T_1 (t. j. větve, mající T_1 za tangentu) má $u = 0$ a větve T_2, $u = \infty$. Že karakteristický poměr $\frac{sin\ T_1\ U}{sin\ T_2\ U}$ lze vzíti co jednoznačný parametr, o tom se přesvědčíme následujícím spůsobem.

Geometricky jest to takřka bezprostředně jasno. Neb bodem dvojným δ procházející paprsek U jest úplně určen karakteristickým poměrem $\frac{sin\ T_1\ U}{sin\ T_2\ U}$ a naopak paprsek U určuje hodnotu poměru úplně. Dále však protíná U křivku mimo v δ jen v jediném dalším bodě u, kdežto naopak též bod u křivky naší úplně určuje paprsek $\delta u = U$.

*) Viz: *Cremona* „Úvod do geometrie th. kř. rovinných.

**) Viz; „Základové vyšší geometrie“ str. 12.

Z toho ihned plyne, že hodnota poměru $\frac{\sin T_1 U}{\sin T_2 U}$ úplně a jednoznačně určuje bod u křivky, tak že poměr ten můžeme považovati za jednoznačný parametr bodu u.

Též analyticky lze věc stvrditi; a to následovně:

Rovnice křivky třetího stupně všeobecně zní:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+2Hx+2Jy+K=0$$

Má-li křivka míti dvojný bod musí pro něj stávat rovnic *)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3Ax^2+6Bxy+3Cy^2+2Ex+2Fy+2H=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3Bx^2+6Cxy+3Dy^2+2Fx+2Gy+2J=0$$

a má-li bod dvojný býti počátkem souřadnic, pak musí býti:

$$K=0, \quad H=0, \quad J=0$$

tak že rovnice zní:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2=0$$

Mají-li konečně osy x, y býti tečnami T_1, T_2 bodu dvojného, musí pro $x=0$ y rovnati se třikráte nulle, a naopak; což dá podmínky $G=0, \ E=0$

tak že rovnice v soustavě $T_1 \delta T_2$ zní:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+2Fxy=0.$$

Položíme-li nyní pro libovolný bod u:

$$\frac{\sin T_1 U}{\sin T_2 U}=u=\frac{y}{x}$$

bude $y=ux$, což vloženo do rovnice křivky dá:

$$x^3(A+3Bu+3Cu^2+Du^3)+2Fx^2u=0$$

aneb:

$$x=-\frac{2Fu}{A+3Bu+3Cu^2+Du^3},$$

$$y=-\frac{2Fu^2}{A+3Bu+3Cu^2+Du^3}.$$

Skutečně se tedy jeví x, y co racionální funkce parametru u.

Rovnice (3) pro bod dvojný zněly:

$$M_0+M_1(u_1+u_2)+M_2u_1u_2=0$$
$$M_1+M_2(u_1+u_2)+M_3u_1u_2=0$$

aneb dělíme-li u_2:

$$\frac{M_0}{u_2}+M_1\left(\frac{u_1}{u_2}+1\right)+M_2u_1=0$$

*) Viz: *Studnička* „Základové vyšší mathematiky" I. díl, str. 181.

$$\frac{M_1}{u_2} + M_2 \left(\frac{u_1}{u_2} + 1\right) + M_3 u_1 = 0$$

a považíme-li, že jim musí býti zadost učiněno, položíme-li $u_1 = 0$ a $u_2 = \infty$, tu obdržíme

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0.$$

a základní rovnice zní tudíž

$$M_0 + M_3 (u)_3 = 0$$

aneb

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{M_0}{M_3},$$

aneb položíme-li $-\dfrac{M_0}{M_3} = K$

$$u_1 u_2 u_3 = K.$$

Pro náš případ jest

$$\begin{array}{llll} a_1 = 0, & b_1 = 0 & , c_1 = -2F, & d_1 = 0 \\ a_2 = 0, & b_2 = -2F, & c_2 = 0 & , d_2 = 0 \\ a_3 = D, & b_3 = 3C & , c_3 = 3B & , d_3 = A \end{array}$$

tedy:

$$M_0 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2F & 0 \\ -2F & 0 & 0 \\ 3C, & 3B, & A \end{vmatrix} = 2F(-2FA) = -4AF^2$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2F \\ 0 & -2F & 0 \\ D & 3C & 3B \end{vmatrix} = -2F(+2FD) = -4DF^2$$

Máme tudíž:

$$-\frac{M_0}{M_3} = -\frac{A}{D} = K.$$

Splynou-li body u_2 u_3 v jediný bod u, pak se u_1 stane tangenciálním bodem bodu u a z rovnice:

$$u_1 u_2 u_3 = K$$

plyne:

$$u_1 u^2 = K$$

co rovnice mezi bodem tangenciálním u_1 a bodem původním. Z rovnice té plyne

$$u_1 = \frac{K}{u^2}$$

a dále
$$u = \pm \sqrt{\frac{K}{u_1}}.$$

Každému u_1 odpovídají tedy dva body u, totiž:
$$u' = + \sqrt{\frac{K}{u_1}}, \quad u'' = - \sqrt{\frac{K}{u_1}},$$
což jsou parametry bodů styku bodem u_1 procházejících tangent křivky. Jelikož $u'' = - u'$ aneb $u' + u'' = 0$, jsou paprsky $U_1 = \overline{\delta u'}$ $U_2 = \overline{\delta u''}$ vzhledem k tečnám T_1 T_2 bodu dvojného harmonicky sdružené.*) Vidíme tudíž, že body u' u'' mající společný bod tangenciální promítají se s dvojného bodu δ v paprscích úhel tečen bodu dvojného harmonicky oddělujících. Takové dva body u' u'', společným bodem tangenciálním u_1 opatřené, nazýváme *„sdruženými body křivky"*.

Paprsky U_1 U_2 tvoří (mění-li se sdružené body u' u'') kvadratickou involuci, pro kterouž T_1 T_2 jsou paprsky dvojnými. Každému bodu u' křivky přísluší jediný jen bod sdružený u''; neb u' určuje U_1, paprsek ten pak U_2, a přímka ta bod u''. Z výměnlivosti v involuci paprsků U_1 U_2 plyne pak též vyměnlivost aneb involutornost bodů u' u''.

Pro body obratu máme $u_1 = u_2 = u_3 =$ na př. u; což vloženo do rovnice $u_1 u_2 u_3 = K$ dá:
$$u^3 = K$$
z čehož jde (označíme-li nyní opět písmenami u_1, u_2, u_3 parametry bodů obratu):
$$u_1 = \sqrt[3]{K}$$
$$u_2 = \alpha \sqrt[3]{K}$$
$$u_2 = \alpha^2 \sqrt[3]{K}$$
je-li $\sqrt[3]{K}$ aritmetická hodnota třetí odmocniny z K a α imaginární třetí kořen z kladné jedničky, t. j.
$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Násobíme-li parametry bodů obratu, obdržíme:
$$u_1 u_2 u_3 = \alpha^3 (\sqrt[3]{K^3})$$
aneb
$$u_1 u_2 u_3 = K,$$

*) Viz: „Základové vyšší geometrie" str. 13.

čímž nabýváme po druhé důkazu, že inflekční body naší křivky se na přímce nalezají.

Z rovnice (6):

$$u_1\, u_2\, u_3 = K$$

platící pro tři body křivky na přímce se nalezající můžeme vyvinouti největší část oněch theoremů, které se obyčejně pro křivky 3. stupně uvádějí.

Obmezíme se sdělením následujících vět a jich důkazů, ponechávajíce si podrobnější pojednání o těchto zajímavých otázkách budoucnosti.

Theorém. Nalezají-li se tři body naší křivky na přímce, pak se též jich body tangenciální nalezají na přímce.

Důkaz. Buďtež $u_1\, u_2\, u_3$ tři body naší křivky na přímce se nalezající, t. j. budiž:

$$u_1\, u_2\, u_3 = K.$$

Jsou-li u_1', u_2', u_3' tangenciální body, pak máme, dle dřívějšího:

$$u_1' = \frac{K}{u_1^2}$$

$$u_2' = \frac{K}{u_2^2}$$

$$u_3' = \frac{K}{u_3^2}$$

a tudíž:

$$u_1'\, u_2'\, u_3' = \frac{K^3}{(u_1\, u_2\, u_3)^2} = \frac{K^3}{K^2}$$

aneb

$$u_1'\, u_2'\, u_3' = K,$$

čímž věta dokázána jest.*)

Theorém. „Jest-li naší křivce vepsán úplný čtyrstran (soustava šesti bodů jevících se co průseky čtyr libovolných přímek) tu každý pár protilehlých vrcholů jest párem harmonicky sdružených bodů křivky.“

Důkaz. Buďtež $u_1\, u_2\, u_3\, u_1'\, u_2'\, u_3'$ vrchole vepsaného čtyrstranu a sice tak, že $u_1\, u_2\, u_3$ tvoří trojúhelník, kdežto $u_1'\, u_2'\, u_3'$ jsou na přímce.

*) Věta, že inflekční body se nalezají na přímce, jest jen zvláštním případem této věty.

Pak máme:

$$u_1' u_2' u_3' = K$$

ale obdobně

$$u_1 \; u_2 \; u_3' = K$$
$$u_2 \; u_3 \; u_1' = K$$
$$u_3 \; u_1 \; u_2' = K$$

násobíme-li první s druhou a pak třetí s čtvrtou z těchto rovnic, obdržíme:

$$u_1 u_2 u_1' u_2' u_3'^2 = K^2$$
$$u_1 u_2 u_1' u_2' u_3^2 = K^2$$

z čehož jde

$$u_3'^2 = u_3^2$$

a jelikož nemůže býti $u_3' = u_3$, musí býti

$$u_3' = -u_3$$

aneb tedy u_3 a u_3' jsou body harmonicky sdružené. Totéž platí o $u_1 \; u_1'$ a o $u_2 \; u_2'$.

Theorém. Protínají-li dvě přímky naši křivku v bodech $u_1 \; u_2 \; u_3$ a $u_1' \; u_2' \; u_3'$ pak přímky $\overline{u_1' u_1'}$, $\overline{u_2 \, u_2'}$ $\overline{u_3 \, u_3'}$ určují na křivce opět tři body u_1'', u_2'', u_3'' na přímce ležící.

Důkaz. Dle toho, co předpokládáme, jest předně:

$$u_1 \; u_2 \; u_3 = K$$
$$u_1' \, u_2' \, u_3' = K$$

a za druhé též

$$u_1 \; u_1' \, u_1'' = K$$
$$u_2 \; u_2' \, u_2'' = K$$
$$u_3 \; u_3' \, u_3'' = K$$

z čehož plyne násobením:

$$(u_1 \; u_2 \; u_3) \, (u_1' \, u_2' \, u_3') \, (u_1'' \, u_2'' \, u_3'') = K^3$$

aneb na základě prvních dvou rovnic

$$u_1'' \, u_2'' \, u_3'' = K,$$

čímž věta dokázána. Věta předcházející jest zvláštní případ této věty, myslíme-li si totiž, že přímky $\overline{u_1 \; u_2 \; u_3}$ a $\overline{u_1' \, u_2' \, u_3'}$ jsou nekonečně blízkými.

Theorém. Jsou-li $u' \; u''$ body styku tečen s bodu u_1 ku křivce položených, pak jest třetí průsek u_2 přímky $u' \; u''$ a křivky sdruženým bodem bodu u_1.

Důkaz. Máme předně

$$u' = + \sqrt{\frac{K}{u_1}}$$

$$u'' = - \sqrt{\frac{K}{u_1}}$$

a dále

$$u' \, u'' \, u_2 = K$$

Z prvních dvou rovnic plyne násobením

$$u' u'' = - \frac{K}{u_1}$$

aneb

$$u' \, u'' \, u_1 = - K$$

a jelikož $u' \, u'' \, u_2 = K$ a tedy

$$u_2 = - u_1$$

aneb

$$u_1 + u_2 = 0$$

čímž věta dokázána.

Theorém. Spojíme-li dva sdružené body $u' \, u''$ naší křivky s libovolným jiným bodem u, protnou obdržené dvě přímky $\overline{uu'}$, $\overline{uu''}$ křivku opět v sdružených bodech $u_1' \, u_1''$.

Důkaz. Máme předně

$$u' = - u'';$$

dále pak

$$u \, u' \, u_1' = K$$

$$u \, u'' \, u_1'' = K$$

a tedy

$$u' \, u_1' = u'' \, u_1''$$

a na základě první rovnice jest:

$$u_1' = - u_1''$$

čímž věta dokázána.

Theorém. Je-li křivce naší úplný čtyrúhelník (soustava čtyř na křivce ležících bodů) $u_1 \, u_2 \, u_3 \, u_3$ vepsán, tak protínají tři páry protilehlých stran křivku v třech párech bodů, které určují tři přímky, timtéž bodem u křivky procházející.

Důkaz. Buďtež $u_1' \, u_1''$ průseky stran $\overline{u_2 \, u_2}$, $\overline{u_3 \, u_4}$ s křivkou, obdobně buďtež $u_2' \, u_2''$ průseky křivky se stranami $\overline{u_1 \, u_3}$ a $\overline{u_2 \, u_4}$ a konečně buďtež $u_3'' u_3$ průseky křivky s protilehlými stranami $\overline{u_1 u_4}$, $\overline{u_2 u_3}$; dále budiž u průsek křivky s přímkou $\overline{u_1' u_1''}$.

Tu máme tedy

$$\begin{array}{ll} u_1 u_2 u_1' = K & u_1 u_4 u_3' = K \\ u_3 u_4 u_1'' = K & u_2 u_3 u_3'' = K \\ u_1 u_3 u_2' = K & u\, u_1' u_1'' = K \\ u_2 u_4 u_2'' = K & \end{array}$$

Z rovnic těch plyne:

$$u_1' u_1'' = u_2' u_2'' = u_3' u_3'' = \frac{K^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}$$

a poněvadž:

$$u_1' u_1'' = \frac{K}{u}$$

jest též

$$u_2' u_2'' = u_3' u_3'' = \frac{K}{u}$$

aneb

$$u\, u_2' u_2'' = u\, u_3' u_3'' = K$$

čímž dokázáno, že též přímky $\overline{u_2' u_2''}$ a $\overline{u_3' u_3''}$ prochází bodem u.

(Pokračování.)

Nový zrcadlový elektroměr.

(Popisuje *Josef Hervert.*)

Stroje, jichž se ku poznání elektrického stavu i k zkoumání elektrostatických zákonů používá, jsou rozmanité, jako rozličné druhy elektroskopů jak obyčejných, tak kondensačních a pak tak zvané elektroměry, k jichžto vynálezu aneb modofikaci se pojí četná jména badatelů, jako jsou: *Henly*, *Cavallo*, *Cantor*, *Adams*, *Bennet*, *Parrot*, *Buff*, *De Luc*, *Volta*, *Bohnenberger*, *Fechner*, *Hankel*, *Lamont*, *Matheson*, *Thomson*, *Riess*, *Palmieri*, *Coulomb*, *Örsted*, *Dellmann*, *Peltier*, *Kohlrausch*, *Zenger*, *Rommershausen* a j.

Fysikální kabinet české polytechniky obdržel letos od Londýnské firmy bratří Elliotů nový elektroměr, jenž se od všech uvedených namnoze liší a jejž tuto blíže vysvětliti chci, pokud jsem mu z pokusů vyrozuměl, jelikož jsem popis a výklad jeho posud nikde nalézti nemohl.