Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

O integrování nekonečných řad

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 103--113

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121778`

O integrování nekonečných řad.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

§ 1. Úvod.

V nauce o integrování nekonečných řad je zvláště důležitá následující **věta Arzelova:**[1])

Věta 1. *Budiž $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... posloupnost funkcí, definovaných v intervalu $< a, b >$, jež má tyto vlastnosti:*

1. Funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... jsou integrace schopny[2]) *v intervalu $< a, b >$.*

2. Pro každé x intervalu $< a, b >$ existuje limita $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$.

3. Funkce $f(x)$ jest integrace schopna v intervalu $< a, b >$.

4. Existuje kladné číslo C tak, že $|f_n(x)| < C$ pro všechna x intervalu $< a, b >$ a pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Věta tato praví tedy, že za určitých předpokladů lze zaměniti pořádek mezi limitním přechodem a integrací, t. j. že za oněch předpokladů platí

$$\int_a^b (\lim_{n=\infty} f_n(x))\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Věta Arzelova, tak jak byla vyslovena, jedná o integraci limity konvergentní posloupnosti; lze jí však okamžitě dáti tento tvar:

Věta 2. *Budiž $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... posloupnost funkcí, definovaných v intervalu $<a, b>$, jež má tyto vlastnosti:*

---

1) Všechny funkce a všechna čísla v této práci jsou reálná, konečná. Jestliže $a < b$, potom značí $< a, b >$ množství všech čísel x, pro něž $a \leq x \leq b$ (uzavřený interval); obdobně značí (a, b) resp. $< a, b)$ resp. $(a, b >$ množství všech čísel x, pro něž $a < x < b$ (otevřený interval), resp. $a \leq x < b$, resp. $a < x \leq b$ (polouzavřené intervaly).

2) »Integrace schopný« a »integrál« jest rozuměti v této práci ve smyslu Riemannově; viz K. Petr, Počet integrální, str. 102.

1. Funkce $g_1(x), g_2(x), \ldots$ jsou integrace schopny v intervalu $\langle a, b\rangle$.

2. Pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest řada $g_1(x) + g_2(x) + \ldots$ konvergentní. Označme

$$g_1(x) + g_2(x) + \ldots = f(x).$$

3. Funkce $f(x)$ jest integrace schopna v intervalu $\langle a, b\rangle$.

4. Existuje kladné číslo C tak, že $|g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)| < C$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$

Potom jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,dx + \int_a^b g_2(x)\,dx + \ldots$$

Věta 2 jest bezprostředním důsledkem věty 1; položme totiž $f_n(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)$; funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots$ splňují potom patrně předpoklady věty 1 a tedy jest následkem věty 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b (g_1(x) + \ldots + g_n(x))\,dx =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(\int_a^b g_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b g_n(x)\,dx \right) = \int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b g_2(x)dx + \ldots,$$

jak bylo dokázati.

Věta 2 udává, že za určitých předpokladů lze nekonečnou řadu integrovati člen po členu. V literatuře existuje hojnost důkazů věty 1 a 2[3]). V roce 1925 vypracoval jsem pro 2 vydání knihy prof. Petra »Počet integrální« nový důkaz, který zde podávám.

Důkaz je založen na pojmu vnější míry Jordanovy; čtenář nepotřebuje však teorii míry znáti: používám totiž jen definice vnější míry Jordanovy a jejích nejjednodušších vlastností, jež lze z definice přímo vyčísti. Z teorie množství bodových nemusí čtenář též nic znáti: jednoduchý speciální tvar pokrývací věty Borelovy, který v následujícím potřebuji, dokazuji v 1. pomocné větě.

Důkaz Arzelovy věty, který provádím, bylo by možno směstnati na mnohem menší prostor: abych však výklad učinil pokud možno srozumitelným, provádím obšírně všechny kroky.

§ 2. O míře Jordanově.

Zavedeme napřed několik označení. Pod »množstvím bodovým« rozumím množství reálných čísel čili — geometricky řečeno —

[3]) Věta Arzelova pochází z roku 1885. Další důkazy podali Hartogs, Bieberbach, Landau, Osgood, F. Riesz, Hausdorff. Literární údaje viz v pojednání: F. H a u s d o r f f, Beweis eines Satzes von Arzelà, Math. Zeitschr. 26 (1927), str. 135—137.

množství bodové na ose číselné. Jsou-li M_1, M_2 dvě množství bodová a je-li každý bod z M_1 obsažen v M_2, značím tuto okolnost znakem $M_1 \leq M_2$. Jsou-li $M_1, M_2 \ldots$ množství bodová v konečném nebo nekonečném počtu, znamená $M_1 + M_2 + \ldots$ množství všech bodů, které jsou obsaženy aspoň v jednom z množství $M_1, M_2 \ldots$; $M_1 . M_2 \ldots$ znamená množství všech bodů, jež jsou obsaženy ve všech množstvích $M_1, M_2, \ldots$ Je-li dáno množství bodové M a konečný nebo nekonečný počet bodových množství $M_1, M_2, \ldots$ tak, že $M \leq M_1 + M_2 + \ldots$ (t. j. tak, že každý bod z M leží aspoň v jednom z množství $M_1, M_2, \ldots$), říkáme, že systém množství $M_1, M_2, \ldots$ pokrývá množství M.

1. pomocná věta *(zvláštní případ věty Borelovy). Budiž $J = \langle a, b \rangle$ uzavřený interval; budiž*

$$J_1, J_2, \ldots \tag{1}$$

posloupnost otevřených intervalů, jež pokrývá interval J (t. j. $J \leq J_1 + J_2 + \ldots$); potom lze zvoliti celistvé kladné číslo k tak, že také systém intervalů

$$J_1, J_2, \ldots, J_k$$

pokrývá interval J (t. j. $J \leq J_1 + J_2 + \ldots + J_k$).

Důkaz. V posloupnosti (1) existuje aspoň jeden interval J_{k_0}, který obsahuje bod a.[4] Pro každé celistvé $n \geq k_0$ definujme číslo b_n jakožto největší z čísel x intervalu $\langle a, b \rangle$ takových, že

$$\langle a, x) \leq J_1 + J_2 + \ldots + J_n;$$

takové číslo b_n patrně existuje ke každému $n \geq k_0$ a platí $a < b_n \leq \leq b_{n+1} \leq b$; existuje tedy $\lim b_n = c$ a jest

$$a < b_n \leq c \leq b. \tag{2}$$

Předpokládejme, že $c < b$; potom existuje v (1) aspoň jeden interval J_{k_1}, který obsahuje bod c; volme nějaké číslo n_1 tak, že $n_1 \geq k_0$, $n_1 \geq k_1$ a dále budiž n_1 již tak veliké, že bod b_{n_1} leží v intervalu J_{k_1}; to je možno, ježto $\lim b_n = c$. Systém intervalů $J_1, J_2, \ldots, J_{n_1}$ pokrývá patrně aspoň celý interval $\langle a, d)$, kde d je pravý koncový bod intervalu J_{k_1}, a tedy $d > c$. Nutně tedy jest $b_{n_1} \geq d > c$, což je však ve sporu s (2).

Je tedy nutně $c = b$. Vyberme z (1) interval J_{k_2}, který obsahuje bod b. Volme k větší než k_0 a k_2 tak, že bod b_k leží v J_{k_2} — to je možno, ježto $\lim b_n = b$; potom intervaly $J_1, J_2, \ldots, J_k$ pokrývají patrně celý interval $\langle a, b \rangle$, jak bylo dokázati.

Definice. *Budiž M ohraničené množství bodové; $J_1, J_2, \ldots, J_n$ budiž konečný počet otevřených intervalů a budiž $M \leq J_1 + J_2 + \ldots + J_n$ (t. j. systém intervalů $J_1, J_2, \ldots, J_n$ nechť pokrývá množ-*

[4]) Obsahuje-li nějaký *otevřený* interval (α, β) bod a, jest $\alpha < a < \beta$ t. j. a jest *vnitřním* bodem intervalu (α, β).

stvi M); označme znakem μ součet délek těchto intervalů (t. j. jestliže $J_i = (\alpha_i, \beta_i)$, potom $\mu = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)$). Uvažujme nyní všechny systémy, složené z konečného počtu otevřených intervalů, jež pokrývají množství M; ke každému takovému systému přísluší určité kladné číslo μ. Všechna čísla μ, příslušná ke všem těmto systémům, tvoří jisté množství čísel kladných; dolní hranici tohoto množství čísel kladných nazýváme **vnější Jordanovou měrou množství** *M.*

Poznámka. Místo »vnější Jordanova míra« budu říkati krátce »míra«. Míru množství M značiti budu mM. Je-li $M_1 \leqq M_2$, je patrně $mM_1 \leqq mM_2$. Míra intervalu (otevřeného, uzavřeného, nebo polouzavřeného) rovná se patrně jeho délce, na př. $m\langle a, b\rangle = b - a$. Míra množství, obsahujícího jen konečný počet bodů, je patrně rovna nule.

2. pomocná věta. *Buďtež M, N dvě ohraničená množství bodová, $M \leqq N$; dále buďiž $I_1, I_2, \ldots, I_l$ konečný počet otevřených intervalů, jež pokrývají množství M (t. j. $M \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_l$). ε buďiž číslo kladné, libovolně zvolené. Potom lze nalézti konečný počet otevřených intervalů $I_{l+1}, I_{l+2}, \ldots, I_{l+p}$, takže platí*

1. $N \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_{l+p}$;
2. $mI_{l+1} + mI_{l+2} + \ldots + mI_{l+p} \leqq mN - mM + \varepsilon$.

Důkaz. Označme $M_1 = I_1 + I_2 + \ldots + I_l$. Sestrojme konečný počet otevřených intervalů $K_1, K_2, \ldots K_k$, jež pokrývají N tak, že $mK_1 + mK_2 + \ldots + mK_k < mN + \frac{1}{2}\varepsilon$ a označme

$$N_1 = K_1 + K_2 + \ldots + K_k. \tag{3}$$

Množství N_1 jest dáno v (3) jako součet intervalů otevřených, jež mohou míti body společné; je však bezprostředně jasno, že lze vyjádřiti množství N_1 též jako součet konečného počtu otevřených intervalů $H_1, H_2, \ldots, H_h$, z nichž žádné dva nemají společných bodů: $N_1 = H_1 + H_2 + \ldots + H_h$. Tím spíše jest

$$mH_1 + mH_2 + \ldots + mH_h < mN + \tfrac{1}{2}\varepsilon; \tag{4}$$

obdobně lze vyjádřiti M_1. Z toho je patrno, že také množství M_1N_1 lze vyjádřiti jako součet konečného počtu otevřených intervalů $L_1, L_2, \ldots, L_l$, z nichž žádné dva nemají společných bodů: $M_1N_1 = L_1 + L_2 + \ldots + L_l$. Každý bod z M leží v M_1 a rovněž v N_1 (neboť $M \leqq N \leqq N_1$), je tedy $M \leqq M_1 N_1$ a tedy nutně

$$mL_1 + mL_2 + \ldots + mL_l \geqq mM, \tag{5}$$

neboť mM je dolní hranicí takových součtů. Odstraníme-li z N_1 všechny body, obsažené v $L_1 + L_2 + \ldots + L_l = M_1N_1$, zbude jakési množství bodové N_2, složené z konečného počtu množství $P_1, P_2, \ldots, P_p$, $N_2 = P_1 + P_2 + \ldots + P_p$ tak, že každé množství P_r ($r = 1, 2, \ldots, p$) je buď interval (uzavřený, polouzavřený nebo otevřený) nebo jediný bod a dále tak, že žádná dvě z množství $P_1, P_2, \ldots, P_p$ nemají bodů společných. Platí ovšem

$$mL_1 + mL_2 + \ldots + mL_l + mP_1 + mP_2 + \ldots + mP_p = \\ = mH_1 + mH_2 + \ldots + mH_\gamma,$$

a tedy podle (4) a (5)

$$mP_1 + mP_2 + \ldots + mP_p < mN - mM + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Dále je $M_1N_1 + N_2 = N_1$, tedy $M_1 + N_2 \geqq N$. Nahraďme nyní každé množství P_r $(r = 1, 2, \ldots, p)$ otevřeným intervalem, jejž označíme I_{l+r}, takže $P_r \leqq I_{l+r}$, $mI_{l+r} < mP_r + \varepsilon/2p$. Potom je

1. $N \leqq M_1 + N_2 \leqq I_1 + \ldots + I_l + I_{l+1} + \ldots + I_{l+p}$,
2. $mI_{l+1} + mI_{l+2} + \ldots + mI_{l+p} < mN - mM + \varepsilon$,

jak bylo dokázati.

3. pomocná věta. *Budiž $M_1, M_2, \ldots$ posloupnost množství bodových, jež má tyto vlastnosti: 1. $M_1 \leqq M_2 \leqq M_3 \leqq \ldots$; $M_1 + M_2 + \ldots = \langle a, b \rangle$. Potom jest $\lim_{n=\infty} mM_n = b - a$.*

Důkaz. Jest $M_n \leqq \langle a, b \rangle$ a tedy $mM_n \leqq m\langle a, b \rangle = b - a$. Za druhé jest $mM_n \leqq mM_{n+1}$. Existuje tedy limita $\nu = \lim_{n=\infty} mM_n$ a jest $\nu \leqq b - a$.

Předpokládejme, že $\nu < b - a$; z toho vyvodíme spor. Zvolme $\eta = \frac{1}{2}(b - a - \nu)$; tedy $\eta > 0$. Sestrojme napřed otevřené intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_{l_1}$, takže

$$M_1 \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_{l_1}, \quad mI_1 + mI_2 + \ldots + mI_{l_1} < mM_1 + \eta/2.$$

Podle druhé pomocné věty sestrojme dále otevřené intervaly $I_{l_1+1}, I_{l_1+2}, \ldots, I_{l_2}$ tak, že

$$M_2 \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_{l_2}, \quad mI_{l_1+1} + mI_{l_1+2} + \ldots + mI_{l_2} < mM_2 - mM_1 + \eta/2^2;$$

podle druhé pomocné věty sestrojme dále otevřené intervaly $I_{l_2+1}, I_{l_2+2}, \ldots, I_{l_3}$ tak, že

$$M_3 \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_{l_3}, \quad mI_{l_2+1} + mI_{l_2+2} + \ldots + \\ + mI_{l_3} < mM_3 - mM_2 + \eta/2^3;$$

tak pokračujíce, dostáváme posloupnost otevřených intervalů $I_1, I_2, I_3, \ldots$, jež má tyto vlastnosti:

A) $\langle a, b \rangle \leqq I_1 + I_2 + \ldots$; neboť každý bod z $\langle a, b \rangle$ leží v nějakém M_n a platí

$$M_n \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_{l_n}.$$

B) Pro každé k jest $\sum_{n=1}^{k} mI_n < b - a - \eta$; neboť, je-li r definováno nerovnostmi

$$i_{r-1} < k \leqq i_r, \text{ je } \sum_{n=1}^{k} m I_n \leqq \sum_{n=1}^{i_1} m I_n + \sum_{n=i_1+1}^{i_2} m I_n + \ldots +$$

$$+ \sum_{n=i_{r-1}+1}^{i_r} m I_n < \left(m M_1 + \frac{\eta}{2}\right) + \left(m M_2 - m M_1 + \frac{\eta}{2^2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(m M_r - m M_{r-1} + \frac{\eta}{2^r}\right) < m M_r + \eta \leqq \nu + \eta = b - a - \eta.$$

Podle první pomocné věty lze nalézti k tak, že $< a, b > \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_k$ (na základě vlastnosti A). Podle vlastnosti B je však součet délek intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_k$ menší než $b - a$, což je patrně ve sporu s okolností, že tyto intervaly pokrývají celý interval $< a, b >$. Nemůže tedy býti $\nu < b - a$ a je tedy $\nu = b - a$, jak bylo dokázati.

§ 3. Důkaz věty Arzelovy.

4. pomocná věta. *Budiž $h_1(x), h_2(x), \ldots$ posloupnost funkcí definovaných v intervalu $< a, b >$; budiž dále $\lim\limits_{n=\infty} h_n(x) = 0$ pro $a \leqq x \leqq b$; konečně nechť existuje kladné číslo D takové, že $| h_n(x) | < D$ pro všechna x intervalu $< a, b >$ a pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$. Potom jest*[5])

$$\lim_{n=\infty} \sup \underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \leqq 0, \quad \lim_{n=\infty} \inf \overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \geqq 0.$$

Důkaz. Pro $a \leqq x \leqq b$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ položme[6]) $F_n(x) = \mathrm{Max}\,(0, h_n(x), h_{n+1}(x), \ldots)$. Toto číslo existuje, neboť buď jsou čísla

$$h_n(x), \; h_{n+1}(x), \ldots \tag{6}$$

všechna $\leqq 0$ a potom je $\mathrm{Max}\,(0, h_n(x), h_{n+1}(x), \ldots) = 0$, nebo je aspoň jedno z čísel (6) kladné a potom vzhledem k $\lim h_n(x) = 0$ musí býti mezi nimi aspoň jedno největší. Platí

$$0 \leqq F_{n+1}(x) \leqq F_n(x) < D, \quad \lim_{n=\infty} F_n(x) = 0 \tag{7}$$

pro $a \leqq x \leqq b$.

Zvolme libovolné kladné číslo ε; označme znakem $M_n(\varepsilon)$ množství oněch bodů x intervalu $< a, b >$, pro něž $F_n(x) < \varepsilon / 2 (b - a)$;

---

[5]) Definici hořního a dolního integrálu viz v knize K. Petr, Počet integrální, str. 108.

[6]) Max $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ označuji největší z čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$; je-li těchto čísel nekonečné množství, je ovšem nutno existenci největšího čísla mezi nimi dokázati.

vzhledem k (7) je patrně $M_n(\varepsilon) \leqq M_{n+1}(\varepsilon)$, $M_1(\varepsilon) + M_2(\varepsilon) + \ldots = \langle a, b \rangle$. Podle 3. pomocné věty je tedy $\lim\limits_{n=\infty} mM_n(\varepsilon) = b - a$; lze tedy zvoliti číslo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (závislé na ε) tak, že $mM_{n_0}(\varepsilon) > b - a - \varepsilon/2D$.

Rozdělme nyní interval $\langle a, b \rangle$ na konečný počet dílů body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_l$ tak, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{l-1} < x_l = b,\ l \geqq 1 \tag{8}$$

a označme symbolem μ_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ dolní hranici funkce $F_{n_0}(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Sestrojme součet

$$s = \sum_{i=1}^{l} \mu_i (x_i - x_{i-1}).$$

Tvrdím: ony z intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, v nichž je $\mu_i \geqq \varepsilon/2(b-a)$, mají součet délek nejvýše $\varepsilon/2D$; kdyby totiž součet jejich délek byl větší než $\varepsilon/2D$, byl by součet délek ostatních intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ menší než $b - a - \varepsilon/2D$. Množství $M_{n_0}(\varepsilon)$ nemá však žádný bod v intervalech $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, v nichž $\mu_i \geqq \varepsilon/2(b-a)$; jest tedy množství $M_{n_0}(\varepsilon)$ pokryto těmi ostatními intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, jichž délky by měly součet menší než $b - a - \varepsilon/2D$. Bylo by tedy možno pokrýti množství $M_{n_0}(\varepsilon)$ konečným počtem uzavřených intervalů o součtu délek menším než $b - a - \varepsilon/2D$ a tedy také konečným počtem *otevřených* intervalů o součtu délek menším než $b - a - \varepsilon/2D$ (k tomu stačí, nahraditi každý z těch uzavřených intervalů intervalem otevřeným trochu větším); to je však ve sporu s nerovností $mM_{n_0}(\varepsilon) > b - a - \varepsilon/2D$.

Jest tedy příspěvek oněch intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, pro něž $\mu_i \geqq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, k součtu s menší než $D \cdot \dfrac{\varepsilon}{2D} = \dfrac{\varepsilon}{2}$, neboť $\mu_i < D$. Příspěvek ostatních intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ k součtu s je pak menší než

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{l} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Je tedy } s < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ať jsou čísla $l, x_0, x_1, \ldots, x_l$, hovící vztahům (8), zvolena jakkoli. Dolní integrál $\underline{\int_a^b} F_{n_0}(x)\,dx$ je však podle definice roven právě horní hranici součtů s, vzatých pro všechny možné volby čísel $l, x_0, x_1, \ldots, x_l$, pro něž platí (8). Jest tedy

$$\underline{\int_a^b} F_{n_0}(x)\,dx \leqq \varepsilon.$$

Vzhledem k (7) je tedy

$$0 \leq \underline{\int_a^b} F_n(x)\,dx \leq \varepsilon \text{ pro } n \geq n_0(\varepsilon),$$

tedy

$$\lim_{n=\infty} \underline{\int_a^b} F_n(x)\,dx = 0.$$

Ježto patrně $h_n(x) \leq F_n(x)$, jest konečně

$$\limsup_{n=\infty} \underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \leq 0.$$

Užiji-li tohoto výsledku na funkce $-h_1(x)$, $-h_2(x), \ldots$, dostávám

$$\limsup_{n=\infty} \underline{\int_a^b} (-h_n(x))\,dx \leq 0;$$

ale

$$\underline{\int_a^b} (-h_n(x))\,dx = -\overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx,$$

tedy

$$\limsup_{n=\infty} \underline{\int_a^b} (-h_n(x))\,dx = -\liminf_{n=\infty} \overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx,$$

čili

$$\liminf_{n=\infty} \overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \geq 0,$$

jak bylo dokázati.

Důkaz věty 1. Funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots$ nechť splňují předpoklady věty 1 z § 1; položme $f_n(x) - f(x) = h_n(x)$, $2C = D$; potom je[7] $\lim_{n=\infty} h_n(x) = 0$, $|h_n(x)| < D$ pro $a \leq x \leq b$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; podle 4. pomocné věty je tedy

$$\limsup_{n=\infty} \underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \leq 0, \quad \liminf_{n=\infty} \overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \geq 0.$$

Funkce $h_n(x)$ jsou však v intervalu $\langle a, b \rangle$ integrace schopny; jest tedy

$$\underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx = \overline{\int_a^b} h_n(x)\,dx = \int_a^b h_n(x)\,dx,$$

---

[7] Neboť $|f(x)| = \lim_{n=\infty} |f_n(x)| \leq C$.

a tedy nutně

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b h_n(x)\,dx = 0\,;$$

to však znamená

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx = 0$$

čili

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

jak bylo dokázati.

Göttingen, 15. ledna 1928.

Sur l'intégration des séries infinies.

(Extrait de l'article précédent.)

Une démonstration nouvelle du théorème suivant de M. Arzelà:

Soit $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *une suite de fonctions intégrables (au sens de Riemann) dans l'intervalle* $< a, b >$; *soit* $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour* $a \leqq x \leqq b$, $f(x)$ *intégrable dans* $< a, b >$, $|f_n(x)| < C$ *dans* $< a, b >$ *et pour* $n = 1, 2, \ldots$ *Alors, on a* $\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

On peut indiquer la marche de la démonstration comme il suit:

Nous ne considérons que des ensembles linéaires de points; la mesure extérieure de Jordan d'un ensemble M soit désignée par mM. On démontre très aisément le Lemme 1[er]: *Soit* $M \leqq N$ (lire: M contenu dans N); *soient* $I_1, I_2, \ldots, I_i$ *des intervalles ouverts; soit* $M \leqq I_1 + I_2 + \ldots + I_i$, *soit* $\varepsilon > 0$; *alors, on peut trouver des intervalles ouverts* $I_{i+1}, \ldots, I_{i+p}$ *tels que*

$$1)\quad \sum_{n=1}^{i+p} I_n \geqq N,$$

$$2)\quad \sum_{n=i+1}^{i+p} mI_n \leqq mN - mM + \varepsilon.$$

Lemme 2[ème]*: Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = < a, b >$, $M_n \leqq M_{n+1}$; *alors, on a* $\lim_{n=\infty} mM_n = b - a$.

Démonstration: On a évidemment $\lim\limits_{n=\infty} mM_n \leqq b-a$; soit $\lim mM_n = b-a-2\eta$, $\eta > 0$. On trouve (Lemme 1[er]) des nombres entiers $1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ et des intervalles ouverts $I_1, I_2, \ldots$ tels que

$$M_1 \leqq \sum_{n=1}^{i_1} I_n, \quad \sum_{n=1}^{i_1} mI_n \leqq mM_1 + \frac{\eta}{2},$$

$$M_k \leqq \sum_{n=1}^{i_k} I_n, \quad \sum_{n=i_{k-1}+1}^{i_k} mI_n \leqq mM_k - mM_{k-1} + \frac{\eta}{2^k} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

On a, alors 1. $<a, b> \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$,

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n \leqq \lim mM_n + \eta = b - a - \eta$. D'après un théorème de M. Borel, on peut trouver r tel que $<a, b> \leqq \sum\limits_{n=1}^{r} I_n$; mais ceci est en contradiction avec $\sum\limits_{n=1}^{r} mI_n < b-a$; donc on a $\lim mM_n = b-a$.

Lemme 3ème: Soit $h_n(x) \to 0$, $|h_n(x)| < D$ *pour* $a \leqq x \leqq b$, $n = 1, 2, \ldots$; *alors on a* $\limsup\limits_{n=\infty} \int_a^b h_n\,dx \leqq 0$, $\liminf\limits_{n=\infty} \int_a^b h_n\,dx \geqq 0$.

Démonstration: Soit $F_n(x) = \mathrm{Max}\,(0, h_n(x), h_{n+1}(x), \ldots)$; donc $0 \leqq F_{n+1} \leqq F_n < D$, $F_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$,

$$M_n = M_n(\varepsilon) = M\left(F_n(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right);$$

on a

$$M_n \leqq M_{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = <a, b>,$$

donc (Lemme 2ème) $mM_n \to b-a$. Soit $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que

$$mM_{n_0} > b - a - \frac{\varepsilon}{2D};$$

soit $l \geqq 1$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = b$; soit $\mu_i =$ borne inférieure de $F_{n_0}(x)$ pour $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$; soit

$$s = \sum_{i=1}^{l} \mu_i (x_i - x_{i-1}).$$

Les intervalles $<x_{i-1}, x_i>$ avec $\mu_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ recouvrant M_{n_0} tout entier, leur longueur totale est $> b - a - \frac{\varepsilon}{2D}$; la longueur totale des autres intervalles $<x_{i-1}, x_i>$ est, alors,

donc $$<\frac{\varepsilon}{2D}; \text{ d'où } s<(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+D\frac{\varepsilon}{2D}=\varepsilon;$$

$\underline{\int_a^b} F_{n_0}\,dx \leqq \varepsilon$, d'où $0 \leqq \underline{\int_a^b} F_n\,dx \leqq \varepsilon$ pour $n \geqq n_0$, donc $\underline{\int_a^b} F_n\,dx \to 0$,

d'où
$$\limsup_{n=\infty} \underline{\int_a^b} h_n\,dx \leqq 0.$$

En appliquant ce résultat aux fonctions $-h_n$, on retrouve la seconde inégalité à démontrer.

Démonstration du théorème d'Arzelà. f_n satisfaisant aux conditions du théorème de M. Arzelà, on peut appliquer le lemme précédant aux fonctions $h_n=f_n-f$; les fonctions f_n-f étant intégrables, on a
$$\int_a^b h_n\,dx \to 0,$$
c'est-à-dire
$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{c. q. f. d.}$$