Eugen Bunickij

O integraci úplných diferenciálů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 87--94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121774

O integraci úplných diferenciálů.

Napsal *E. Bunicky.*

§ 1. Integrace úplných diferenciálů se někdy podstatně zjednoduší, můžeme-li použíti jedné z vět dále uvedených. Především dokážeme pomocnou větu.

§ 2. **Věta pomocná.** *Buďtež $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstantni veličiny, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ daná reálná čísla, vesměs různá, t nezávisle proměnná nabývajici kladných hodnot v daném intervalu. Aby platilo identicky*

$$a_1 t^{\alpha_1} + a_2 t^{\alpha_2} + \ldots + a_n t^{\alpha_n} = 0, \tag{1}$$

jest nutno a stači, jsou-li všechna čisla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovna nule.

Je zřejmé, že tato podmínka je postačující, dokážeme tedy pouze, že je také nutná. Derivujme identitu (1) a násobme výsledek t. Dostaneme

$$a_1 \alpha_1 t^{\alpha_1} + a_2 \alpha_2 t^{\alpha_2} + \ldots + a_n \alpha_n t^{\alpha_n} = 0. \tag{2}$$

Derivujme rovnici (2) a násobme opět t; tak to opakujme s každou následující rovnicí, celkem $(n-1)$-krát. Dostaneme tak postupně tyto identity:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \alpha_1^2 t^{\alpha_1} + a_2 \alpha_2^2 t^{\alpha_2} + \ldots + a_n \alpha_n^2 t^{\alpha_n} = 0, \\ a_1 \alpha_1^3 t^{\alpha_1} + a_2 \alpha_2^3 t^{\alpha_2} + \ldots + a_n \alpha_n^3 t^{\alpha_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \alpha_1^{n-1} t^{\alpha_1} + a_2 \alpha_2^{n-1} t^{\alpha_2} + \ldots + a_n \alpha_n^{n-1} t^{\alpha_n} = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Budiž τ určité číslo kladné, vzaté z intervalu, v němž se mění t. Položíme-li v rovnicích (1), (2), (3) $t = \tau$, obdržíme soustavu n lineárních homogenních rovnic

$$\left.\begin{array}{l} \tau^{\alpha_1} a_1 + \tau^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \tau^{\alpha_n} a_n = 0, \\ \tau^{\alpha_1} \alpha_1 a_1 + \tau^{\alpha_2} \alpha_2 a_2 + \ldots + \tau^{\alpha_n} \alpha_n a_n = 0, \\ \tau^{\alpha_1} \alpha_1^2 a_1 + \tau^{\alpha_2} \alpha_2^2 a_2 + \ldots + \tau^{\alpha_n} \alpha_n^2 a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau^{\alpha_1} \alpha_1^{n-1} a_1 + \tau^{\alpha_2} \alpha_2^{n-1} a_2 + \ldots + \tau^{\alpha_n} \alpha_n^{n-1} a_n = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

vzhledem k veličinám $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Determinant soustavy (4)

$$\begin{vmatrix} \tau^{\alpha_1} & \tau^{\alpha_2} & \ldots & \tau^{\alpha_n} \\ \alpha_1\tau^{\alpha_1} & \alpha_2\tau^{\alpha_2} & \ldots & \alpha_n\tau^{\alpha_n} \\ \alpha_1^2\tau^{\alpha_1} & \alpha_2^2\tau^{\alpha_2} & \ldots & \alpha_n^2\tau^{\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}\tau^{\alpha_1} & \alpha_2^{n-1}\tau^{\alpha_2} & \ldots & \alpha_n^{n-1}\tau^{\alpha_n} \end{vmatrix} = \tau^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

není roven nule. Poněvadž jsme totiž předpokládali, že τ je různé od nuly, činitel $\tau^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$ nemůže býti roven nule, stejně jako determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermondův, počítaný pro hodnoty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vesměs různé. Poněvadž je determinant soustavy (4) různý od nuly, jest $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Věta I. *Aby výraz*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} q_i dx_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} r_i dx_i, \tag{5}$$

kde $p_i, q_i, \ldots, r_i$ jsou homogení funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — p_i řádu k, q_i řádu $l, \ldots, r_i$ řádu m, při čemž $k, l \ldots, m$ jsou čísla vesměs různá — byl úplným diferenciálem, je nutno a stačí, aby každý z částečných součtů

$$\sum_i p_i dx_i, \quad \sum_i q_i dx_i, \ldots, \quad \sum_i r_i dx_i \tag{6}$$

byl také úplným diferenciálem.

Pozn. Předpokládá se, jako obvykle, že funkce $p_i, q_i, \ldots, r_i$ mají spojité parciální derivace podle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, stejně jako druhé derivace smíšené.

Aby výraz (5), který se může psáti v tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i + q_i + \ldots + r_i)\, dx_i$, byl úplným diferenciálem, je nutno a stačí, aby platilo pro každou kombinaci dvou indexů různých $i \neq \nu$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$

$$(p_i + q_i + \ldots + r_i)_\nu = (p_\nu + q_\nu + \ldots + r_\nu)_i,$$

anebo $$(p_i)_\nu + (q_i)_\nu + \ldots + (r_i)_\nu = (p_\nu)_i + (q_\nu)_i + \ldots + (r_\nu)_i. \tag{7*}$$

*) Píšeme všude $(u)_i$, $(u)_\nu$ místo $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial u}{\partial x_\nu}$.

Derivace $(p_i)_\nu$, $(p_\nu)_i$ funkcí homogeních $p_i(x_1, \ldots, x_\nu)$, $p_\nu(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ řádu k jsou, jak známo, funkcemi homogeními proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ řádu $(k-1)$. Stejně derivace $(q_i)_\nu$, $(q_\nu)_i$ a $(r_i)_\nu$, $(r_\nu)_i$ jsou také homogeními funkcemi řádu $(l-1)$, resp. $(m-1)$. Zavedeme-li tedy do identity (7) místo veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proměnné tx_1, tx_2, tx_n, při čemž t jest libovolný činitel, dostaneme

$$\begin{aligned} & t^{k-1}(p_i)_\nu + t^{l-1}(q_i)_\nu + \ldots + t^{m-1}(r_i)_\nu = \\ & = t^{k-1}(p_\nu)_i + t^{l-1}(q_\nu)_i + \ldots + t^{m-1}(r_\nu)_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Poněvadž činitel t jest nezávislý na proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (a poněvadž může nabývati kladných hodnot, na př. v okolí hodnoty $t = 1$), identita (8) je možna pouze, platí-li v souhlase s pomocnou větou dříve dokázanou,

$$(p_i)_\nu = (p_\nu)_i, \quad (q_i)_\nu = (q_\nu)_i, \quad \ldots, \quad (r_i)_\nu = (r_\nu)_i$$

pro každou kombinaci dvou indexů i, ν navzájem různých, odkud následuje, že každý z částečných součtů (2) je úplným diferenciálem.

Věta II. *Integrál U úplného diferenciálu*

$$dU = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i, \tag{9}$$

kde X_i jsou homogení funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ řádu m různého od (-1), je vyjádřen vzorcem

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i x_i}{m+1} + c, \tag{10}$$

kde c jest arbitrární konstanta.

Diferencováním součtu $\sum_i X_i x_i$ plyne $d\left(\sum_i X_i x_i\right) = \sum_i X_i dx_i + \sum_i x_i\, dX_i$ anebo, máme-li na zřeteli identitu $dX_i = \sum_\nu (X_i)_\nu\, dx_\nu$,

$$d\left(\sum_i X_i x_i\right) = \sum_i X_i\, dx_i + \sum_{i,\nu} x_i (X_i)_\nu\, dx_\nu. \tag{11}$$

A tedy, protože výraz (9) je podle předpokladu úplným diferenciálem a X_i homogeními funkcemi řádu m, obdržíme

$$(X_i)_\nu = (X_\nu)_i \quad \text{a} \quad \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu)_i x_i = m X_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} & \sum_{i,\nu} x_i (X_i)_\nu\, dx_\nu = \sum_{i,\nu} (X_\nu)_i x_i\, dx_\nu = \sum_\nu \left[\sum_i (X_\nu)_i x_i\right] dx_\nu = \\ & = \sum_\nu m X_\nu\, dx_\nu = m \sum_i X_i\, dx_i, \end{aligned}$$

totiž
$$\sum_{i,\nu} x_i (X_i)_\nu dx_\nu = m \sum_i X_i dx_i. \tag{12}$$

Rovnici (11) můžeme tedy psáti, majíce na zřeteli vztah (12), v tvaru
$$d\left(\sum_i X_i x_i\right) = \sum_i X_i dx_i + m \sum_i X_i dx_i$$
nebo
$$d\left(\sum_{i=1}^{n} X_i x_i\right) = (m+1) \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i, \tag{13}$$
odkud vychází (máme-li na mysli, podle předpokladu, nerovnost $m + 1 \neq 0$)
$$dU = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \frac{d \sum_{i=1}^{n} X_i x_i}{m+1}$$
anebo
$$dU = d\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i x_i}{m+1}\right). \tag{14}$$
Integrací obdržíme
$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i x_i}{m+1} + c,$$
při čemž c jest arbitrární konstanta.

Pozn. 1. Je patrno, že vzorec (10) je jenom zobecnění elementárního vzorce pro integraci
$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$
v případě, že $m \neq -1$.

2. V případě, že $m = -1$, udaný postup selhává, protože nelze v tom případě odvoditi rovnici (14)′ ze vztahu (13). Tento vztah totiž nabude pro $m = -1$ tvaru $d\left(\sum_{i=1}^{n} X_i x_i\right) = 0$, a dostaneme v tomto případě $\sum_{i=1}^{n} X_i x_i = A$, kde A je konstanta.

§ 3. Příklady. 1. Jest integrovati úplný diferenciál
$$dU = (4x^3y^3 + 6x^2y^4 + y^5 + 6x + y)\,dx + \\ + (2x^4y + 6x^3y^3 + 5xy^4 + x + 4y)\,dy.$$

Řešení. Obdržíme

$$(4x^3y^2 + 6x^2y^3 + y^5 + 6x + y)_y = 8x^3y + 18x^2y^2 + 5y^4 + 1 =$$
$$= (2x^4y + 6x^3y^2 + 5xy^4 + x + 4y)_x.$$

Podmínka integrability jest tedy splněna. Rozdělíme-li daný diferenciální výraz*) ve dva součty homogení řádu 5 a 1, dostaneme

$$dU = [(4x^3y^2 + 6x^2y^3 + y^5)\,dx + (2x^4y + 6x^3y^2 + 5xy^4)\,dy] +$$
$$+ [(6x + y)\,dx + (x + 4y)\,dy],$$

při čemž každý částečný homogení součet jest (věta I) úplným diferenciálem. Aplikujeme-li na každý tento součet větu II, obdržíme

$$U = \frac{(4x^3y^2 + 6x^2y^3 + y^5)\,x + (2x^4y + 6x^3y^2 + 5xy^4)\,y}{5 + 1} +$$
$$+ \frac{(6x + y)\,x + (x + 4y)\,y}{1 + 1} + c$$

anebo, provedeme-li to,

$$U = x^4y^2 + 2x^3y^3 + xy^5 + 3x^2 + xy + 2y^2 + c.$$

Pozn. Tohoto postupu lze použíti při diferenciálních výrazech $\sum_i X_i\,dx_i$ (úplné diferenciály), kde všecky funkce X_i jsou polynomy $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Jest integrovati úplný diferenciál

$$dU = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2\,\frac{y}{x}\,dy.$$

Řešení. Vzhledem k identitám

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)_y = \frac{2y}{x^2} = \left(-2\,\frac{y}{x}\right)_x$$

jest podmínka integrability splněna. Aplikujeme-li na diferenciální homogení výraz řádu nultého $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2\,\frac{y}{x}\,dy$ vzorec (10), obdržíme

$$U = \frac{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)x - \left(\frac{2y}{x}\right)y}{0 + 1} + c$$

*) Říkáme »diferenciální výraz (diferenciální součet, úplný diferenciál) homogení řádu m«, chceme-li označiti výraz $\sum_i p_i\,dx_i$, kde $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou homogení funkce řádu m.

čili

$$U = \frac{x^2 - y^2}{x} + c.$$

3. Jest integrovati diferenciální rovnici

$$dU = (1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy.$$

Řešení. Lze snadno ukázati, že pravá strana rovnice je úplným diferenciálem. Použijeme-li na tento úplný diferenciál homogení řádu nultého věty II, dostaneme

$$U = (1 + e^{\frac{x}{y}})\,x + y e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + c$$

čili

$$U = x + y e^{\frac{x}{y}} + c.$$

4. Jest integrovati diferenciální rovnici

$$dU = \left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3}\right)dy.$$

Řešení. Po zjištění podmínky integrability, pišme danou rovnici v tvaru

$$dU = \left[\left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \cos\frac{y}{x}\,dy\right] + \left[\frac{1}{y^2}\,dx - \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y^3}\right)dy\right],$$

při čemž jsme rozložili druhou část na dva úplné homogení diferenciály řádu nultého a (—2). Integrujeme-li každý z těchto dvou diferenciálů pomocí vzorce (10), obdržíme

$$U = \left[\left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)x + y\cos\frac{y}{x}\right] + \frac{1}{(-1)}\left[\frac{x}{y^2} - \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3}\right)y\right] + c$$

čili

$$U = x\sin\frac{y}{x} + \frac{x+y}{y^2} + c.$$

5. Jest integrovati diferenciální rovnici

$$dU = (xy + z)\left(\frac{dx}{xz} + \frac{dy}{zy} - \frac{dz}{z^2}\right).$$

Řešení. Když jsme zjistili u pravé strany tři podmínky integrability, pišme dU v tvaru

$$dU = \left(\frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz\right) + \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right).$$

Integrujeme-li zvláště úplný diferenciál homogení řádu nultého pomocí vzorce (10) a úplný diferenciál homogení výjimečného řádu (—1) obvyklými metodami, dostaneme

$$U = \frac{xy + xy - xy}{z} + \log\frac{xy}{z} + \log c,$$

čili

$$U = \frac{xy}{z} + \log\frac{c\,xy}{z},$$

při čemž, jako všude, c znamená arbitrární konstantu.

4. Vidíme tedy, že obyčejné metody pro integraci úplných diferenciálů jsou nutné jen při diferenciálech nehomogeních, anebo homogeních řádu (—1). Stává se někdy, že po vhodné substituci úplný diferenciál nehomogení přejde v homogení a připouští zjednodušení svrchu uvedená.

Uvažujme na př. diferenciální rovnici

$$dU = \left[\frac{yz^2}{(z-xy)^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right]dx + \left[\frac{xz^2}{(z-xy)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right]dy - \\ - \left[\frac{x^2y^2}{(z-xy)^2} - \frac{2}{z}\right]dz.$$

Když jsme zjistili u pravé strany podmínky integrability, položme

$$z = t^2. \tag{15}$$

Touto substitucí daná diferenciální rovnice nabude tvaru

$$dU = \left[\frac{yt^4}{(t^2-xy)^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right]dx + \left[\frac{xt^4}{(t^2-xy)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right]dy - \\ - \left[\frac{x^2y^2}{(t^2-xy)^2} - \frac{2}{t^2}\right]2t\,dt$$

čili

$$dU = \left[\frac{yt^4\,dx}{(t^2-xy)^2} + \frac{xt^4\,dy}{(t^2-xy)^2} - \frac{2x^2y^2t\,dt}{(t^2-xy)^2}\right] + \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{4dt}{t}\right).$$

Když jsme takto rozložili pravou stranu dané rovnice na dva úplné diferenciály homogení řádu prvního resp. (—1), integrujme první diferenciál podle vzorce (15) a druhý diferenciál obyčejnými metodami. Obdržíme

$$U = \frac{xyt^4 + xyt^4 - 2x^2y^2t^2}{2(t^2-xy)^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \log t^4 + \log c = \frac{2(t^2-xy)xyt^2}{2(t^2-xy)^2} + \\ + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \log ct^4 = \frac{xyt^2}{t^2-xy} + \log ct^4 + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

anebo, v souhlasu se substituční rovnicí (15),

$$U = \frac{xyz}{z - xy} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \log cz^2,$$

kde c znamená arbitrární konstantu.

Sur l'intégration des différentielles totales.

(Extrait de l'article précédent.)

1. L'expression différentielle

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} q_i dx_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} r_i dx_i,$$

où $p_i, q_i, \ldots, r_i$ sont respectivement des fonctions homogènes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des ordres différents $k, l, \ldots, m$ ne peut être une différentielle totale, que si chacune des sommes partielles

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i, \quad \sum_{i=1}^{n} q_i dx_i, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i dx_i$$

est aussi une différentielle totale (Théorème I du texte).

On démontre cette proposition au moyen du lemme suivant: les puissances $t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_n}$ d'une variable positive t avec les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ réels et inégaux deux à deux sont linéairement indépendantes (Lemme du texte).

2. L'intégrale de l'expression différentielle totale

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i,$$

où X_i sont des fonctions homogènes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du même ordre m différent de (-1), s'exprime par la formule

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i}{m+1} + C,$$

C étant une constante arbitraire (Théorème II du texte).

Les propositions 1. et 2. sont illustrées par des exemples (§§ 3, 4 du texte).