K ustanovení definitivní hodnoty (5) užito vzorce Wallissova

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = 2\prod_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}}{1+\frac{1}{2\nu}},$$

t. j.

$$\frac{\pi}{2} = 2\Pi \frac{2\nu(2\nu+2)}{(2\nu+1)^2} = 2 \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdots$$

$$= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdots$$

(Pokračování.)

---

## Několik poznámek o čtyrstěnu.*

Napsal **Jan Schuster**, prof. reálky v Pardubicích.

I. V následujících úvahách užijme označení obdobného jako v rovinné trigonometrii, jež umožní cyklickou substituci ve třech nebo čtyřech prvcích a počet zjednoduší. Čtyrstěn o rozích $K_1, K_2, K_3, K_4$, měj sferické siny trojhranů $E_1, E_2, E_3, E_4$, sferické siny trojhranů k těmto polarních $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4$ a protější stěny $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Berme $\Delta_4$ za podstavu o hranách $a', b', c'$ a hrany protější buďte $a, b, c$. K těmto hranám přiléhající úhly stěnové značme souhlasně $\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta, \gamma$, a úhly hranové označme písmeny souhlasnými s protější hranou stěny a jejím indexem, totiž stěna $\Delta_4$ měj hranové úhly $a_4, b_4, c_4$, stěna $\Delta_1$ .. $a_1, b_1, c_1$ atd. Ostatní označení zavedeme dle potřeby.

Jako základních prvků použijeme hlavně stěn a úhlů stěnových.

II. Obsah čtyrstěnu $T$, který se obyčejně vyjadřuje ve tvaru:

$$T = \tfrac{1}{3}\, abc\, E_4,$$

přepišme ve tvar, jenž obsahuje toliko stěny a sinus polarního trojhranu $\mathrm{E}_4$, užijíce výrazů pro obsah trojúhelníků:

$$ab \sin c_3 = 2\Delta_3 \qquad bc \sin a_1 = 2\Delta_1 \qquad ca \sin b_2 = 2\Delta_2.$$

---

*) Tato práce je prvním sdělením auktorovým z jeho prací o čtyrstěnu z roku 1915 a proto časově předchází pojednání v »Zeitschrift für das Realschulwesen« z roku 1917 a v Rozpravách České Akademie z roku 1918 č. 30.

Odtud je totiž $a^2 = \frac{2\Delta_2\Delta_3}{\Delta_1} \frac{\sin a_1}{\sin b_2 \sin c_3}$, atd.

tak, že je: $T = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3}} \,.\, E_4$.

Ale dle sinové věty sferické trigonometrie jest

$$\frac{\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{E_4^3}{\mathrm{E}_4^3}$$

a rovněž je $\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 4E_4\mathrm{E}_4$ [1])

Odtud hned $\sin^2 a_1 \sin^2 b_2 \sin^2 c_3 = \frac{4E_4^4}{\mathrm{E}_4^2}$

a dosazením levé strany do hodnoty pro $T$ obdržíme:

$$T = \tfrac{2}{3}\sqrt{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\mathrm{E}_4} \tag{1}$$

Obdobné rovnice vzniknou cyklickou přeměnou indexů, a pravé strany tvoří postupnou rovnici, jež umocněna dvěma a dělena součinem $\frac{4}{9}\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, vede na rovnici zcela obdobnou sinové větě v trojúhelníku, totiž:

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\Delta_1} = \frac{\mathrm{E}_2}{\Delta_2} = \frac{\mathrm{E}_3}{\Delta_3} = \frac{\mathrm{E}_4}{\Delta_4} = \frac{9T^2}{4\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}, \tag{2}$$

anebo znásobíme-li jednotlivé z rovnic (1),

$$T = \tfrac{2}{3}\sqrt[8]{\Delta_1^3\Delta_2^3\Delta_3^3\Delta_4^3\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\mathrm{E}_3\mathrm{E}_4} \tag{3}$$

II. Jako v trojúhelníku dá druhou skupinu vztahů věta cosinová. Průmět vždy tří stěn do stěny čtvrté vede k rovnicím:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \cos\gamma + \Delta_3 \cos\beta + \Delta_4 \cos\alpha' \\
\Delta_2 &= \Delta_2 \cos\alpha + \Delta_1 \cos\gamma + \Delta_4 \cos\beta' \\
\Delta_3 &= \Delta_1 \cos\beta + \Delta_2 \cos\alpha + \Delta_4 \cos\gamma' \\
\Delta_4 &= \Delta_1 \cos\alpha' + \Delta_2 \cos\beta' + \Delta_3 \cos\gamma'
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Násobme první tři postupně činitelem $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ a sečtěme. Dosadíme-li pak do součtu posledních členů pravou stranu rovnice čtvrté, což dá $\Delta_4^2$, obdržíme:

$$\begin{aligned}\Delta_4^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\,\Delta_1\Delta_2 \cos\gamma - 2\,\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha - \\ - 2\,\Delta_3\Delta_1 \cos\beta\end{aligned} \tag{5}$$

---

[1]) Weber-Wellstein Enzyklopaedie der Elementar-Mathematik. II. Bd., p. 365.

t. j. první větu cosinovou, ke které patří další tři rovnice plynoucí cyklicky.

Ze soustavy 4. můžeme však určiti další relace, přepíšeme-li první tři rovnice na tvar:

$$\begin{aligned} \Delta_3 \cos\beta + \Delta_2 \cos\gamma &= \Delta_1 - \Delta_4 \cos\alpha' \\ \Delta_3 \cos\alpha + \Delta_1 \cos\gamma &= \Delta_2 - \Delta_4 \cos\beta' \\ \Delta_2 \cos\alpha + \Delta_1 \cos\beta &= \Delta_3 - \Delta_4 \cos\gamma' \end{aligned}$$

a řešíme-li je dle $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Determinant koefficientů levé strany má hodnotu : $2\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, a řešení zní:

$$\begin{aligned} 2\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha = &- \Delta_1^2 (\Delta_1 - \Delta_4 \cos\alpha') + \Delta_1\Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_4 \cos\beta') \\ &+ \Delta_1\Delta_3 (\Delta_3 - \Delta_4 \cos\gamma') = \Delta_1 (\Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1^2) - \Delta_1\Delta_4 \\ &(\Delta_2 \cos\beta' + \Delta_3 \cos\gamma' - \Delta_1 \cos\alpha'). \end{aligned}$$

Když na pravo ve druhé závorce první dva členy nahradíme hodnotou plynoucí z poslední z rovnic (4), možná celou rovnici zkrátiti činitelem $\Delta_1$, a píšeme-li členy s indexy stejnými k sobě, dospějeme k výrazu:

$$\Delta_1^2 + \Delta_4^2 - 2\,\Delta_1\Delta_4 \cos\alpha' = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\,\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha, \qquad (6)$$

k němuž patří dva další pro úhly $\beta, \beta'$ resp. $\gamma, \gamma'$.

Z této rovnice vidíme především, že jsou-li ze šesti prvků, jimiž čtyrstěn určen, dány čtyři stěny a dva úhly protější, obsahuje úkol spor anebo není určitý.

Dále vidíme, že společná hodnota obou stran rovnice (6) musí býti souměrnou funkcí pro oba páry stěn $\Delta_1, \Delta_4$ a $\Delta_2, \Delta_3$.

K jejímu určení uvažujme protější hrany $aa'$, jejichž úhel buď $\varphi_a$, a promítněme na rovinu kolmou ku hraně $a$ stěny $\Delta_2$ a $\Delta_3$, čímž vznikne trojúhelník, který má úhel, sevřený rameny rovnými výškám obou trojúhelníků: $\frac{2\,\Delta_2}{a}$, $\frac{2\,\Delta_3}{a}$, rovný stěnovému úhlu $\alpha$, a protější základnu rovnou průmětu hrany $a'$, totiž $a' \sin\varphi_a$. Pak dá cosinová věta:

$$\frac{4\,\Delta_2^2}{a^2} + \frac{4\,\Delta_3^2}{a^2} - a'^2 \sin^2\varphi_a = 2 \cdot \frac{2\,\Delta_2}{a} \cdot \frac{2\,\Delta_3}{a} \cos\alpha.$$

Když odstraníme jmenovatel a uvážíme, že $\frac{aa' \sin\varphi_a}{4}$ jest obsah $p_a$ rovnoběžníka vzniklého řezem středním, který je rovnoběžný s oběma hranami $a$, $a'$,

obdržíme $$\Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 4p_a^2 = 2\,\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha. \qquad (7)$$

Je tedy společnou hodnotou obou stran rovnice (6) čtverec dvojnásobné plochy středního řezu, k oběma párům stěn souměrného.

Rovnic (7) je celkem šest; vyjadřují druhou větu cosinovou.

IV. Z obou vět cosinových možná odvoditi řadu identit. Uvedeme jen tři.

Z rovnic (4) znásobených postupně $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, a sečtěných bude:

$$2\sum_{k,l} \Delta_k \Delta_l \cos(\widehat{\Delta_k \Delta_l}) = \sum_k \Delta_k^2 \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4;\ k \neq l).$$

Nebo dosadíme li hodnoty cosinů úhlů znásobených stěnami z rovnic (7) do rovnice (5), plyne:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 = 4(p_a^2 + p_b^2 + p_c^2). \tag{8}$$

Znásobíme-li každé dvě z rovnic (7), jež patří témuž střednímu řezu, bude ku př.:

$$4\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 \cos\alpha \cos\alpha' = (\Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_3^2\Delta_4^2 + \Delta_4^2\Delta_1^2) - \\ - 4p_a^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2) + 16p_a^4$$

a sečteme-li je, dá součet členů v prvních závorkách na pravo všecky dvojnásobné součiny čtverce, jenž vznikne, když ve třetím členu za čtvernásobné čtverce středních řezů položíme levou stranu rovnice (8), tak že zbudou jen členy quadratické, a jest:

$$4\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = \\ = 16\sum_{k=a,b,c} p_k^4 - \sum_{l=1,2,3,4} \Delta_l^4 \tag{9}$$

V. Čtyrstěn jest určen šesti částmi. Které podmínky se musí splniti, jsou li dány čtyři stěny a dva střední řezy?

Především dle (4) musí býti každá stěna menší než součet tří ostatních. Ovšem stačí, splní-li tu podmínku stěna největší.

Dle (7) musí $\quad 2\Delta_2\Delta_3 > \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - 4p_a^2$

nebo $\quad 4p_a^2 > (\Delta_2 - \Delta_3)^2$ atd.,

tedy celkem čtyři nerovnosti. Zase netřeba tvořiti všech, nýbrž jsou-li stěny v pořadí vzestupném, ku př. $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, netřeba vyšetřovati $\Delta_3 - \Delta_2$ a vůbec z každých dvou rozdílů příslušných témuž řezu, se omeziti na větší.

Poslední nerovnost vede pro páry stěn protějších k nové:

$$8p_a^2 > (\Delta_1 - \Delta_4)^2 + (\Delta_2 - \Delta_3)^2. \tag{10}$$

Když součet tří těchto nerovností odečteme od rovnice (8), dvěma znásobené, vznikne:

$$2\sum_{i,k}\Delta_i\Delta_k > \Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\Delta_4^2 \qquad (i,k=1,2,3,4;\ i\neq k)$$

Odečteme-li (9) od (8), vznikne:

$$p_b^2+p_c^2-p_a^2<\tfrac{1}{2}(\Delta_1\Delta_4+\Delta_2\Delta_3)$$

Poznámka: Jsou-li všecky stěny čtyřstěnu stejně velké, dají rovnice (7), když v nich zavedeme úhly poloviční,

$$p_a=\Delta\sin\tfrac{\alpha}{2},\ p_b=\Delta\sin\tfrac{\beta}{2},\ p_c=\Delta\sin\tfrac{\gamma}{2}$$

Protější úhly jsou stejné. Rovnice (8) vede na:

$$p_a^2+p_b^2+p_c^2=\Delta^2$$

nebo dle posledních rovnic:

$$\sin^2\tfrac{\alpha}{2}+\sin^2\tfrac{\beta}{2}+\sin^2\tfrac{\gamma}{2}=1.$$

Všecky tyto úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se stejně střídají v rozích, jež jsou proto shodnými trojhrany, a jejich úhly hranové, ležící střídavě ve všech stěnách, jsou stejné. Proto jsou stěny shodné a síť čtyřstěnu je trojúhelník s týmiž úhly hranovými ve vrcholech.

VI. Rovnice (7) dovolují pomocí stěn a řezů vyjádřiti úhlové funkce. Především sferické siny polarních trojhranů $E_1, E_2, E_3, E_4$ možná přepsati ze tvaru:

$$E_4^2=-\cos\sigma_4\cos(\sigma_4-\alpha)\cos(\sigma_4-\beta)\cos(\sigma_4-\gamma) \text{ na}$$

$$-4E_4^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$$

nebo

$$-4E_4^2=\begin{vmatrix}-1 & \cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta & -1 & \cos\alpha\\ \cos\gamma & \cos\alpha & -1\end{vmatrix},$$

nebo se zřetelem k (7) na tvar:

$$-32E_4^2\Delta_1^2\Delta_2^2\Delta_3^2=$$

$$\begin{vmatrix}-2\Delta_1\Delta_2\Delta_3, & \Delta_2(\Delta_3^2+\Delta_1^2-4p_b^2), & \Delta_3(\Delta_1^2+\Delta_2^2-4p_c^2)\\ \Delta_2(\Delta_3^2+\Delta_1^2-4p_b^2), & -2\Delta_1\Delta_2\Delta_3, & \Delta_1(\Delta_2^2+\Delta_3^2-4p_a^2)\\ \Delta_3(\Delta_1^2+\Delta_2^2-4p_c^2), & \Delta_1(\Delta_2^2+\Delta_3^2-4p_a^2), & -2\Delta_1\Delta_2\Delta_3\end{vmatrix}$$

Ostatní se obdrží cyklicky.

Tím už zároveň objem $T$ vyjádřen stěnami, hledíme-li k rovnici (3).

Pro siny úhlů stěnových možná zavésti výrazy součinové v trigonometrii obvyklé. Neboť přičteme-li rovnici (7) k součinu

$2\Delta_2\Delta_3$ nebo odečteme-li ji od něho, možná zavésti poloviční úhly, takže po úpravě je:

$$4\Delta_2\Delta_3\cos^2\tfrac{\alpha}{2} = (\Delta_2+\Delta_3)^2 - 4p_a^2$$
$$4\Delta_2\Delta_3\sin^2\tfrac{\alpha}{2} = 4p_a^2 - (\Delta_2-\Delta_3)^2$$

Položíme-li $\Delta_2 + \Delta_2 + 2p_a = 2m_{23}$,

a $m_{23}(m_{23}-\Delta_2)(m_{23}-\Delta_3)(m_{23}-2p_a) = M_{23}^2$,

je
$$\Delta_2\Delta_3\sin\alpha = 2M_{23} \tag{11}$$

Veličinu $M_{23}$ možná též definovat rovnicí:

$$16M_{23}^2 = 4\Delta_2^2\Delta_3^2 - (\Delta_2^2+\Delta_3^2-4p_a^2)^2. \tag{12}$$

Další hodnoty plynou zase cyklicky.

VII. Délky hran dovoluje nejstručněji určiti jiná definice objemu, totiž součin podstavy a výšky. Výšku tělesnou možná získati jako průmět stěnové, t. j. ku př.

$$v_4 = \frac{2\Delta_1}{a'}\sin\alpha, \quad \text{tak že } \Delta_4 v_4 = 3T = \frac{2\Delta_4\Delta_4\sin\alpha}{a'}.$$

Ale dle (11) je čitatel znám jako funkce stěn: $4M_{14}$,

tak že
$$a' = \frac{4M_{14}}{3T}. \tag{13}$$

Jiný postup pro určení hran dá použití výrazů pro úhly hranové. Pro trojhran $K_4$ platí

$$\sin c_3 \sin\alpha\sin\beta = 2E_4 \text{ atd.}$$

nebo dle (11)
$$\sin c_3 = \frac{E_4\Delta_1\Delta_2\Delta_3^2}{2M_{23}M_{13}} \tag{14}$$

Utvořme ostatní výrazy pro úhly hranové a dosaďme do výrazu pro čtverec hrany z odstavce II. Pak je

$$a^2 = \frac{4M_{32}^2}{E_4\Delta_1\Delta_2\Delta_3}.$$

Ježto hrana $a$ obsahuje také roh $K_1$, platí:

$$a^2 = \frac{4M_{32}^2}{E_1\Delta_4\Delta_2\Delta_3}$$

a součin obou posledních rovnic dovoluje hranu vyjádřiti souměrně vzhledem k oběma rohům $K_1$ $K_4$:

$$a^2 = \frac{4M_{23}^2}{\Delta_2\Delta_3\sqrt{E_1E_4\Delta_1\Delta_4}} \tag{15}$$

Součin dvou hran protějších jest:

$$a^2 a'^2 = \frac{4^2 M_{23}^2 M_{14}^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4 \Delta_1^3 \Delta_2^3 \Delta_3^3 \Delta_4^3}} = \frac{4^4 M_{23}^2 M_{14}^2}{3^4 T^4},$$

užijeme-li rovnice (3), a souhlasně se (13) jest: $a\, a' = \frac{16 M_{23} M_{14}}{9 T^2}$.

Následkem relace vytčené ve II. odstavci mezi hranami protějšími a středním řezem $p_a$ máme pro sklon hran $a$, $a'$:

$$\sin \varphi_a = \frac{4 p_a}{a a'} = \frac{9}{4} \frac{T^2 p_a}{M_{23} M_{14}}$$

a osa týchž mimoběžek $O_a$ se dá počítati jako výška trojúhelníka, jenž vznikne promítnutím stěn $\Delta_2$, $\Delta_3$ a hrany $a'$ ve směru hrany $a$:

$$O_a\, a' \sin \varphi_a = \frac{2\Delta_2}{a} \cdot \frac{2\Delta_3}{a} \cdot \sin \alpha.$$

Se zřetelem na (11) a (16) plyne odtud:

$$O_a = \frac{2 M_{23}}{a\, p_a} \text{ nebo} = \frac{2 M_{14}}{a' p_a} = \frac{2}{p_a} \sqrt{\frac{M_{14} M_{23}}{a\, a'}} = \frac{3 T}{2 p_a}. \quad (17)$$

neboť dle (13) platí: $$\frac{M_{14}}{a'} = \frac{M_{23}}{a}. \quad (13')$$

(Dokončení.)

---

# Příspěvek ke konstrukci elipsy ze sdružených průměrů.

Podává prof. **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

Jak známo, lze považovati elipsu za šikmý průmět kružnice. Buďtež $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dva sdružené průměry kružnice, k níž sestrojen opsaný čtverec $pqrs$, jehož strany jsou rovnoběžné s těmito průměry, které stotožníme s osami souřadnic $X$, $Y$. Tečna v libovolném bodě $t\,(x_t, y_t)$ kružnice $K$, má rovnici $xx_t + yy_t = r^2$; průsečíky její se stranami $\overline{sr}$, $\overline{rq}$ (obr. 1.) jsou $m$, $u$ jich souřadnice určíme, řešíme-li rovnici tečny s rovnicí $y = r$ (pro bod $m$) a $x = r$ (pro bod $u$).