Alois Čermák

Některé poznámky k theorii hypergeometrické funkce na základě thetafunkcí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 441--460

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121736

Některé poznámky k theorii hypergeometrické funkce na základě thetafunkcí.

Napsal **Alois Čermák**, suppl. professor.

§ 1. *Úvod.* Partikulární integrály differenciální rovnice Gaussovy

$$\frac{d^2y}{dx^2}\, x(x-1) + \frac{dy}{dx}\,[\gamma - x(\alpha+\beta+1)] - \alpha\beta y = 0 \qquad (1)$$

dají se, jak známo, vyjádřiti omezenými integrály tvaru $\int\limits_p^q F(u, x)\, du$, kdež $F(u, x) = u^{\beta-\gamma}(u-x)^{-\beta}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}$ a p, q jsou dva různé singulární body funkce $F(u, x)$, nebo obecněji integrálem $\int\limits_c^{(p,\, q,\, p,\, -q\, -)} F(u, x)\, du$ dle označení Pochhammerova*), kdež integrační cesta vychází z regulárního bodu c a tvoří dvojoběh kol singulárních bodů p, q. Po substituci $u \,\Big|\, \frac{1}{z}$ nabude hypergeometrický integrál obecného tvaru

$$P(x) = \int\limits_p^q z^a (1-z)^b (1-z)^c\, dz.$$

Zaveďme, jak Wirtinger**) učinil, jako novou proměnnou elliptický integrál v normálním tvaru Riemannově

$$v = \tfrac{1}{2} \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}},$$

*) Srv. Pochhammer, Üb. ein Integral mit doppeltem Umlauf, Math. Ann. 35. 1890, pag. 470—494 a týž, Zur Theorie der Eulerschen Integrale, ibid., pag. 495—526.

**) Srv. Zur Darstellung der hypergeom. F. durch best. Int. Sitzungsber. der Akad. in Wien, CXI. 1902, pag. 898 sq.

jehož modul jest x. Vyjádříme-li $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z}$ a $\sqrt{1-xz}$ pomocí elliptických thetafunkcí, pak výraz $P(x)$ jest až na faktor tvaru $4x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}$ roven integrálu

$$K\int \vartheta_1^{2a+1}(u,\omega)\,.\,\vartheta_2^{2b+1}(u,\omega)\,.\,\vartheta_3^{2c+1}(u,\omega)\,\vartheta_0^{2d+1}(u,\omega)\,du. \tag{2}$$

Při tom $u = \frac{v}{2K}$, perioda $K = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}$ a d jest pomocný, k vůli symmetrii zavedený exponent, daný relací $a+b+c+d+2=0$. Integrační meze jsou rovny polovinám periody ϑ-funkcí. Pro Jacobiho thetafunkce užito následujícího označení *):

$$\vartheta_0(u,\omega) = Q\prod_{1,\infty}^{\nu}(1-q^{2\nu-1}e^{2\pi iu})(1-q^{2\nu-1}e^{-2\pi iu})$$

$$\vartheta_1(u,\omega) = 2q^{\frac{1}{4}}Q\sin\pi u\prod_{1,\infty}^{\nu}(1-q^{2\nu}e^{2\pi iu})(1-q^{2\nu}e^{-2\pi iu})$$

$$\vartheta_2(u,\omega) = 2q^{\frac{1}{4}}Q\cos\pi u\prod_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu}e^{2\pi iu})(1+q^{2\nu}e^{-2\pi iu})$$

$$\vartheta_3(u,\omega) = Q\prod_{1,\infty}^{\nu}(1+q^{2\nu-1}e^{2\pi iu})(1+q^{2\nu-1}e^{-2\pi iu})$$

$$\omega = \frac{iK'}{K}, \quad q = e^{\pi i\omega}, \quad Q = \prod_{1,\infty}^{\nu}(1-q^{2\nu}).$$

Vidíme, že ve výrazu (2) součet exponentů dává nullu. To vede k myšlence, studovati integrály výrazů

$$\prod_{0,3}^{\lambda}\vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u,\omega) = \vartheta_0^{a_0}(u,\omega)\,\vartheta_1^{a_1}(u,\omega)\,\vartheta_2^{a_2}(u,\omega)\,.\,\vartheta_3^{a_3}(u,\omega); \tag{3}$$

při čemž

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0. \tag{3'}$$

Označme takový integrál

$$J(a_0, a_1, a_2, a_3) = \int\limits_{\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega'}{2}} \Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u,\omega)\,du. \tag{4}$$

*) Srv. Weber, Ellipt. Functionen u. alg. Zahlen, 1891, pag. 61. Na tuto knihu i v dalším odvoláváno, ale místo ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ_{11} užito Weierstrassova označování ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2, ϑ_1.

Ω, Ω' značí libovolné dvě periody ϑ-funkcí. Tyto periody mají obecný tvar $m + n\omega$, m, n celá čísla. Exponenty a_λ jsou též libovolná čísla, vázaná jen podmínkou (3'). Nedopouští-li integrál (4) integraci až k singulárním bodům, použije se vhodně volených dvojoběhů. Výraz (4) definuje patrně systém nekonečného počtu transcendentních funkcí, které závisí jednak na exponentech a_λ, jednak na integračních mezích $\frac{1}{2}\Omega$, $\frac{1}{2}\Omega'$ *).

Vlastnosti a relace, které budou nalezeny pro tuto novou funkci J, dají se bezprostředně přenésti na hypergeometrickou funkci Gaussovu, jež se od této liší jen uvedeným, jednoduchým faktorem. Lze tedy celou theorii hypergeometrických transcendent vyvoditi z elliptických ϑ-funkcí. V následujícím nalezneme relace mezi příbuznými funkcemi a vypočteme differenciální rovnici pro funkci J.

A. Relace mezi příbuznými J-funkcemi.

§ 2. Jako *příbuznou* ku $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$ označíme takovou funkci $J(a_0 + k_0, a_1 + k_1, a_2 + k_2, a_3 + k_3)$, jejíž exponenty liší se jen o celistvá sudá čísla k_0, k_1, k_2, k_3 od funkce prvé. Ovšem, jak plyne z definice J-funkcí, musí býti součet $\Sigma k_\lambda = 0$. S touto okolností souvisí, proč nutno modifikovati též definici funkcí sousedních (styčných, contignae), jaká platí o obyčejných funkcích Gaussových. Zavedeme ještě název *funkcí nejblíže příbuzných* **) ku $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$ pro takové funkce, které se shodují ve dvou argumentech s $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$, v ostatních však dvou se různí resp. o $+2$ a -2, ku př. $J(a_0, a_1 + 2, a_2 - 2, a_3)$. Ve všech těchto případech příbuzné funkce musí býti korrespondující t. j. musí býti vztaženy k téže integrační čáře.

Vypočtěme základní relace mezi nejblíže příbuznými funkcemi.

1. Ku prvé serii vztahů přijdeme tím, že libovolné celistvé homogenní relace mezi ϑ-funkcemi znásobíme vhodným faktorem

*) Při některých problémech jest výhodnější uvažovati funkci $KJ(a_0, a_1, a_2, a_3)$.

**) Označení toto jest analogické s Berger, Über die zur 3. Stufe gehörigen hyperg. Int. am ellipt. Gebilde, Monatshefte für Math. u. Ph., 1906, pag. 137 sq.

$\prod\limits_{0,3}^{k} \vartheta_k^{l_k}(u)$ a pak celou rovnici integrujeme podél téže čáry integrační. Nejjednodušší takové relace plynou ze základních dvou rovnic *)

$$A^2\vartheta_3^2(u) = C^2\vartheta_0^2(u) - B^2\vartheta_1^2(u),$$
$$A^2\vartheta_2^2(u) = B^2\vartheta_0^2(u) - C^2\vartheta_1^2(u),$$

kdež

$$A = \vartheta_0(o, \omega), \quad B = \vartheta_2(o, \omega), \quad C = \vartheta_3(o, \omega).$$

Ježto modul

$$k(\omega) = \frac{B^2}{C^2}, \quad k'(\omega) = \sqrt{1 - k^2} = \frac{A^2}{C^2},$$

máme 4 hledané relace, kde argument u za znaménkem funkčním vynechán:

$$1.\ k'\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - k\vartheta_3^2 = 0 \qquad 3.\ k'\vartheta_3^2 - \vartheta_0^2 + k\vartheta_1^2 = 0$$
$$2.\ k\vartheta_2^2 - \vartheta_3^2 + k'\vartheta_0^2 = 0 \qquad 4.\ k\vartheta_0^2 - \vartheta_1^2 - k'\vartheta_2^2 = 0.$$

Dělme prvou rovnici ϑ_0^2, druhou ϑ_1^2, třetí ϑ_2^2 a poslední ϑ_3^2. Dostaneme homogenní výrazy 0-tého stupně dle ϑ_k. Násobme každý faktorem $\prod\limits_{0,3}^{k} \vartheta_k^{a_k} . du$, při čemž $\Sigma a_k = 0$ a integrujme podél téže integrační cesty; dostaneme vztahy

$$k' J(a_0 - 2, a_1 + 2, a_2, a_3) + J(a_0 - 2, a_1, a_2 + 2, a_3)$$
$$- k J(a_0 - 2, a_1, a_2, a_3 + 2) = 0$$
$$k J(a_0, a_1 - 2, a_2 + 2, a_3) - J(a_0, a_1 - 2, a_2, a_3 + 2)$$
$$+ k' J(a_0 + 2, a_1 - 2, a_2, a_3) = 0$$
$$k' J(a_0, a_1, a_2 - 2, a_3 + 2) - J(a_0 + 2, a_1, a_2 - 2, a_3)$$
$$+ k J(a_0, a_1 + 2, a_2 - 2, a_3) = 0$$
$$k J(a_0 + 2, a_1, a_2, a_3 - 2) - J(a_0, a_1 + 2, a_2, a_3 - 2)$$
$$- k' J(a_0, a_1, a_2 + 2, a_3 - 2) = 0.$$

Z každé relace dostaneme nové tři relace, když za $a_k - 2$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ substituujeme a_k, za to však vždy jeden ze zbývajících tří exponentů zmenšíme o 2. Tak vznikne 12 relací následujících:

---

*) Weber, l. c., pag. 54.

$$
\left.\begin{aligned}
k' J(a_0, a_1, a_2, a_3) &+ J(a_0, a_1 - 2, a_2 + 2, a_3) \\
&- k\, J(a_0, a_1 - 2, a_2, a_3 + 2) = 0 \\
J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- k J(a_0, a_1, a_2 - 2, a_3 + 2) \\
&+ k' J(a_0, a_1, + 2, a_2 - 2, a_3) = 0 \\
k\, J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- k' J(a_0, a_1 + 2, a_2, a_3 - 2) \\
&- \quad J(a_0, a_1, a_2 + 2, a_3 - 2) = 0
\end{aligned}\right\}(a)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k' J(a_0, a_1, a_2, a_3) &+ k J(a_0 - 2, a_1, a_2 + 2, a_3) \\
&- \quad J(a_0 - 2, a_1\, a_2, a_3 + 2) = 0 \\
k\, J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- J(a_0, a_1, a_2 - 2, a_3 + 2) \\
&+ k' J(a_0 + 2, a_1, a_2 - 2, a_3) = 0 \\
J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- k' J(a_0 + 2, a_1, a_2, a_3 - 2) \\
&- k\, J(a_0, a_1, a_2 + 2, a_3 - 2) = 0
\end{aligned}\right\}(b)
$$

$$(5)$$

$$
\left.\begin{aligned}
k' J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- J(a_0 + 2, a_1, a_2, a_3 - 2) \\
&+ k\, J(a_0, a_1 + 2, a_2, a_3 - 2) = 0 \\
J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- k\, J(a_0 - 2, a_1 + 2, a_2, a_3) \\
&- k' J(a_0 - 2, a_1, a_2, a_3 + 2) = 0 \\
k\, J(a_0, a_1, a_2, a_3) &+ k' J(a_0, a_1 - 2, a_2, a_3 + 2) \\
&- \quad J(a_0 + 2, a_1 - 2, a_2, a_3) = 0
\end{aligned}\right\}(c)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k\, J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- \quad J(a_0 - 2, a_1 + 2, a_2, a_3) \\
&- k' J(a_0 - 2, a_1, a_2 + 2, a_3) = 0 \\
J(a_0, a_1, a_2, a_3) &+ k' J(a_0, a_1 - 2, a_2 + 2, a_3) \\
&- k\, J(a_0 + 2, a_1 - 2, a_2, a_3) = 0 \\
k' J(a_0, a_1, a_2, a_3) &- k J(a_0 + 2, a_1, a_2 - 2, a_3) \\
&+ \quad J(a_0, a_1 + 2, a_2 - 2, a_3) = 0
\end{aligned}\right\}(d)
$$

To jsou hledané relace mezi funkcemi s $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$ nejblíže příbuznými. Jsou to, jak vidíme, lineární, homogenní rovnice, jichž koefficienty jsou jednoduchými funkcemi modulů k, k'. Z těchto 12 rovnic jest však jen 8 lineárně nezávislých. Ku př. rovnice a_1 plyne z c_3 a d_2, když prvou z nich násobíme k a pak od druhé odečteme.

§ 3. 2. Druhou třídu vztahů mezi příbuznými J-funkcemi nalezneme, vycházejíce z identity

$$\frac{d}{du} \overset{\lambda}{\Pi} \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) = \overset{\lambda}{\Pi} \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) \,.\, \overset{\lambda}{\Sigma} a_\lambda \frac{d \log \vartheta_\lambda(u)}{du}, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

Vzhledem k tomu, že $\overset{\lambda}{\Sigma} a_\lambda = 0$, můžeme za

$$\Sigma a_\lambda \frac{d \log \vartheta_\lambda}{du}$$

psáti

$$\Sigma a_\lambda \frac{d \log \vartheta_\lambda(u)}{du} - \Sigma a_\lambda \frac{d \log \vartheta_i(u)}{du} = \Sigma a_\lambda \frac{d \log}{du}\left(\frac{\vartheta_\lambda(u)}{\vartheta_i(u)}\right),$$

kdež i značí nyní pevné nějaké číslo z čísel 0, 1, 2, 3. Volme po sobě $i = 0, 1, 2, 3$; dostaneme tak 4 identické výrazy:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{du} \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) &= \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda} \Sigma a_\lambda \frac{d}{du} \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_0} \\
\frac{d}{du} \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) &= \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda} \Sigma a_\lambda \frac{d}{du} \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_1} \\
\frac{d}{du} \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) &= \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda} \Sigma a_\lambda \frac{d}{du} \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_2} \\
\frac{d}{du} \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda}(u) &= \Pi \vartheta_\lambda^{a_\lambda} \Sigma a_\lambda \frac{d}{du} \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_3}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{I)}$$

Relace poslední lze značně zjednodušiti tím, že nahradíme derivace ϑ-funkcemi samými.

Jest totiž nejprve

$$\frac{d}{du} \log \frac{\vartheta_e}{\vartheta_k} = \frac{\vartheta_k}{\vartheta_e} \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_k}\right). \quad \text{II)}$$

Avšak jak známo z theorie elliptických thetafunkcí, derivace kvocientu dvou ϑ-funkcí dají se jednoduše vyjádřiti ve tvaru $\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_k}\right) = Const \frac{\vartheta_m \cdot \vartheta_n}{\vartheta_k^2}$, kdež m, n jsou ona dvě čísla z čísel 0, 1, 2, 3, jež jsou od l a k rozdílná.*) Konstantu (vzhledem k proměnné u) určíme, když provedeme naznačenou differenciaci a pak za u substituujeme vhodnou speciální hodnotu $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$.

Vypišme tyto vzorce, které budeme i v následujícím potřebovati:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right) &= \pi A^2 \frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{\vartheta_0^2} & \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right) &= -\pi A^2 \frac{\vartheta_2 \vartheta_3}{\vartheta_1^2} \\
\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\right) &= -\pi C^2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_3}{\vartheta_0^2} & \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right) &= -\pi B^2 \frac{\vartheta_3 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_1^2} \\
\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\right) &= -\pi B^2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_0^2} & \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right) &= -\pi C^2 \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{\vartheta_1^2}
\end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

---

*) Weber, l. c., 59.

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)=\pi C^2\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{\vartheta_2^2}\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)=\pi B^2\frac{\vartheta_2\vartheta_1}{\vartheta_3^2}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)=\pi B^2\frac{\vartheta_3\vartheta_0}{\vartheta_2^2}\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\right)=\pi C^2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_3^2}\qquad \text{III)}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)=\pi A^2\frac{\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_2^2}\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)=-\pi A^2\frac{\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_3^2}.$$

Systém rovnic I) s použitím vzorců II) a III) dá:

$$\frac{d}{du}\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}=\pi\,\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}\left[a_1A^2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_1}-a_2C^2\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_2}-a_3B^2\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_0\vartheta_3}\right]$$

$$\frac{d}{du}\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}=-\pi\,\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}\left[a_0A^2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_1}+a_2B^2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_1\vartheta_2}+a_3C^2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_1\vartheta_3}\right]$$

$$\frac{d}{du}\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}=\pi\,\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}\left[a_0C^2\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_2}+a_1B^2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_1\vartheta_2}+a_3A^2\frac{\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_2\vartheta_3}\right]$$

$$\frac{d}{du}\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}=\pi\,\Pi\vartheta_\lambda^{a_\lambda}\left[a_0B^2\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_0\vartheta_3}+a_1C^2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_1\vartheta_3}-a_2A^2\frac{\vartheta^0\vartheta_1}{\vartheta_2\vartheta_3}\right].$$

Integrujme obě strany rovnic podél libovolných dvojoběhů v u-rovině. Levé strany odpadnou, a dostaneme zase trojčlenné lineární rovnice:

$$\begin{aligned}
&a_1k'J(a_0-1,a_1-1,a_2+1,a_3+1)-a_2J(a_0-1,a_1+1,\\
&\quad a_2-1,a_3+1)-a_3kJ(a_0-1,a_1+1,a_2+1,a_3-1)=0\\
&a_0k'J(a_0-1,a_1-1,a_2+1,a_3+1)+a_2kJ(a_0+1,a_1-1,\\
&\quad a_2-1,a_3+1)+a_3J(a_0+1,a_1-1,a_2+1,a_3-1)=0\\
&a_0J(a_0-1,a_1+1,a_2-1,a_3+1)+a_1kJ(a_0+1,a_1-1,\\
&\quad a_2-1,a_3+1)+a_3k'J(a_0+1,a_1+1,a_2-1,a_3-1)=0\\
&a_0kJ(a_0-1,a_1+1,a_2+1,a_3-1)+a_1J(a_0+1,a_1-1,\\
&\quad a_2+1,a_3-1)-a_2k'J(a_0+1,a_1+1,a_2-1,a_3-1)=0.
\end{aligned}$$

Volíme-li v každé z těchto rovnic opět 3 vhodné systémy exponentů, dostaneme následujících 12 relací:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_1+1)k'J(a_0,a_1,a_2,a_3)-(a_2-1)J(a_0,a_1+2,\\
&\quad a_2-2,a_3)-(a_3-1)kJ(a_0,a_1+2,a_2,a_3-2)=0\\
&(a_2+1)J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_3-1)kJ(a_0,a_1,a_2+2,\\
&\quad a_3-2)-(a_1-1)k'J(a_0,a_1-2,a_2+2,a_3)=0\\
&(a_3+1)kJ(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_2-1)J(a_0,a_1,a_2-2,\\
&\quad a_3+2)-(a_1-1)k'J(a_0,a_1-2,a_2,a_3+2)=0
\end{aligned}\right\}(a)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(a_2+1)\,k\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_3-1)\,J(a_0,a_1,a_2+2,\\
&\qquad a_3-2)+(a_0-1)\,k'J(a_0-2,a_1,a_2+2,a_3)=0\\
&(a_3+1)\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_0-1)\,k'J(a_0-2,a_1,a_2,\\
&\qquad a_3+2)+(a_2-1)\,k\,J(a_0,a_1,a_2-2,a_3+2)=0\\
&(a_0+1)\,k'J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_2-1)\,k\,J(a_0+2,a_1,\\
&\qquad a_2-2,a_3)+(a_3-1)\,J(a_0+2,a_1,a_2,a_3-2)=0
\end{aligned}\right\}(b)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(a_3+1)\,k'J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_0-1)\,J(a_0-2,a_1,a_2,\\
&\qquad a_3+2)+(a_1-1)\,k\,J(a_0,a_1-2,a_2,a_3+2)=0\\
&(a_0+1)\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_1-1)\,k\,J(a_0+2,a_1-2,\\
&\qquad a_2,a_3)+(a_3-1)\,k'J(a_0+2,a_1,a_2,a_3-2)=0\\
&(a_1+1)\,k\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_3-1)\,k'J(a_0,a_1+2,a_2,\\
&\qquad a_3-2)+(a_0-1)\,J(a_0-2,a_1+2,a_2,a_3)=0
\end{aligned}\right\}(c) \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0+1)\,k\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)+(a_1-1)\,J(a_0+2,a_1-2,\\
&\qquad a_2,a_3)-(a_2-1)\,k'J(a_0+2,a_1,a_2-2,a_3)=0\\
&(a_1+1)\,J(a_0,a_1,a_2,a_3)-(a_2-1)\,k'J(a_0,a_1+2,\\
&\qquad a_2-2,a_3)+(a_0-1)\,k\,J(a_0-2,a_1+2,a_2,a_3)=0\\
&(a_2+1)\,k'J(a_0,a_1,a_2,a_3)-(a_0-1)\,k\,J(a_0-2,a_1,\\
&\qquad a_2+2,a_3)-(a_1-1)\,J(a_0,a_1-2,a_2+2,a_3)=0
\end{aligned}\right\}(d)$$

Tento systém relací mezi funkcemi nejblíže příbuznými jest symmetrický k systému (5). Jsou to zase lineární, homogenní relace, jichž koefficienty jsou funkcemi modulů k, k', avšak kromě toho též lineárně závislé na exponentech a_0, a_1, a_2, a_3. U původní funkce $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$ jest vždy koefficient $a_\iota + 1$, u ostatních dvou J-funkcí, které mají vždy tvar $J(a_m - 2, a_\iota + 2)$ resp. $J(a_n - 2, a_\iota + 2)$, jest koefficient $a_m - 1$ resp. $a_n - 1$. Tyto relace rozděleny jsou opět ve 4 skupiny, v každé z nich zůstává resp. a_0, a_1, a_2, a_3 totéž. Tyto relace dlužno ovšem vztahovati jen ke třem funkcím korrespondujícím.

Rovnice (5) a (6) lze pokládati za funkcionální rovnice pro transcendentu J, v níž necháme pouze a_0, a_1, a_2, a_3 probíhati řadu čísel, avšak cesty integrační neměníme. Z těchto 24 relací jest jen část na sobě nezávislých. Kombinujeme-li rovnice (5), (6), můžeme funkci $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$ spojiti s libovolnými dvěma funkcemi nejblíže příbuznými lineárnou relací. Avšak nyní dovedeme odvoditi souvislost mezi kterýmikoli 3 příbuznými funkcemi tvaru

$$J(a_0 + A_i, a_1 + B_i, a_2 + C_i, a_3 + D_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

kdež A_i, B_i, C_i, D_i jsou tři systémy celých čísel sudých. positivních a negativních, jichž součet dává nullu. Neboť lze mezi nimi nalézti řadu takových korrespondujících J-funkcí, že vždy ze tří po sobě jdoucích jsou dvě ke třetí v poměru nejbližšího příbuzenství. Poněvadž pak mezi každými 3 po sobě jdoucími funkcemi této řady existuje lineárná relace, existuje též mezi libovolnými 3 funkcemi té řady lineárná relace. I lze říci, že mezi kterýmikoli třemi příbuznými funkcemi tvaru (7) existuje lineárná relace, jejíž koefficienty jsou celistvé funkce veličin k, k' a racionálné funkce exponentů.

Jak vidno, relace (5) a (6) jsou analogií Gaussových „relationes inter functiones contignas".

Odvodíme ještě jednu, v dalším potřebnou, relaci mezi funkcí $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$, kterou krátce budeme označovati J, a mezi jejími dvěma nejblíže příbuznými. Při tom zavedeme zkrácené označení příbuzných J-funkcí, vyznačujíce pouze ony exponenty, jimiž se liší oproti J, stejné vynechávajíce; ku př $J(a_0 - 2, a_1, a_2, a_3 + 2) = J(a_0 - 2, a_3 + 2)$.

Vyjděme ze vzorců $5b_1$, $6b_1$ a $5b_3$:

$$kJ(a_0 - 2, a_2 + 2) = J(a_0 - 2, a_3 + 2) - k'J$$

$$kJ(a_0 - 2, a_2 + 2) = \frac{-1}{(a_0 - 1)k'}\left\{(a_1 + 1)k^2 J + (a_3 - 1)\, kJ(a_2 + 2, a_3 - 2)\right\}$$

$$kJ(a_2 + 2, a_3 - 2) = J - k'J(a_0 + 2, a_3 - 2).$$

Vylučme z prvých dvou rovnic $J(a_0 - 2, a_2 + 2)$ a dosaďme do výsledku za $kJ(a_2 + 2, a_3 - 2)$ z třetí rovnice; dostaneme hledaný vzorec

$$[a_2 + a_3 - k'^2(a_0 + a_2)]\, J + (a_0 - 1)\, k'J(a_0 - 2, a_3 + 2) - (a_3 - 1)\, k'J(a_0 + 2, a_3 - 2) = 0. \qquad (8)$$

B. Differenciální rovnice J-funkcí.

§ 4. *Naznačení postupu.* Abychom mohli vypočísti differenciální rovnici pro naši funkci, musíme dříve odvoditi relaci mezi derivací J-funkce dle proměnné u a mezi funkcemi s ní příbuznými. Jsou to relace analogické oněm, jež platí o hypergeometrické funkci obyčejné. Ukazuje se však, že tu jest výhodnější místo funkce $J(a_0, a_1, a_2, a_3)$, v (4) definované, zavésti funkci $K\,J(a_0, a_1, a_2, a_3)$, kdež K značí periodu elliptických integrálů a s ϑ-funkcemi souvisí relací *)

$$K = \frac{\pi C^2}{2}. \tag{1}$$

Tuto funkci budeme v dalším krátce označovati $\bar{J}(a_0, a_1, a_2, a_3)$. Všecky relace, v předešlém odvozené pro J-funkce, platí patrně i pro tuto funkci $\bar{J}$.

Při výpočtu derivace $\bar{J}$-funkce opíráme se o následující relaci **): Značiž Φ, Ψ dvě funkce veličin u, ω; pak platí identita, již snadno verifikujeme:

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\Phi\frac{\partial}{\partial u}\log\Psi\right) = \Phi\left(\frac{\partial \log\Psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\log\Phi - \frac{\partial}{\partial u}\log\Phi\frac{\partial}{\partial\omega}\log\Psi\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi\frac{\partial\log\Psi}{\partial w}\right). \tag{2}$$

Pišme

$$\Pi(u) = \vartheta_0^{a_0}(u)\,\vartheta_1^{a_1}(u)\,\vartheta_2^{a_2}(u)\,(\vartheta_3^{a_3}(u)$$

ve tvaru

$$\Pi(u) = \Pi_1(u)\frac{\vartheta_0\,\vartheta_3}{\vartheta_1\,\vartheta_2},\quad \Pi_1(u) = \vartheta_0^{a_0-1}\,\vartheta_1^{a_1+1}\,\vartheta_2^{a_2+1}\,\vartheta_3^{a_3-1}. \tag{3}$$

Víme však (srv. vzorce III v § 3.), že

$$\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{d}{du}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = -\pi B^2\frac{\vartheta_0\,\vartheta_3}{\vartheta_1\,\vartheta_2}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu (3) a násobíme K, tu bude s ohledem na vz. (1)

$$2K\Pi(u) = \frac{1}{k}\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\,.\,\Pi_1(u). \tag{3'}$$

Považujme nyní výraz $\frac{1}{k}\Pi_1(u)$ za funkci Φ a $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ za

*) Weber, l. c., 112.

**) Srv. Wirtinger, Eine neue Verallgemeinerung der hyperg. Int., Wiener Akad. 1903, CXII.

funkci Ψ a applikujme hořejší identitu (2). Dostaneme

$$2\frac{\partial}{\partial\omega}(K\,\Pi\,(u)) =$$

$$\frac{1}{k}\Pi_1(u)\left\{\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\log\frac{\Pi_1(u)}{k}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Pi_1(u)}{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right\}$$
$$+\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial u}\left(\Pi_1(u)\frac{\partial}{\partial\omega}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right). \qquad (4)$$

Tento výraz můžeme značně zjednodušiti. Jest totiž $\frac{\partial}{\partial u}\log k = 0$. Dále jest*)

$$\frac{d(k^2)}{d\omega} = \pi i k^2 k'^2 C^4,$$

z čehož

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\log k(\omega) = \frac{i\pi k'^2 C^4}{2}.$$

Po dosazení a úpravě výrazu (4) bude

$$2\frac{\partial}{\partial\omega}(K\Pi(u)) = \frac{-i\pi}{k}\Pi_1(u)\,.\,\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\,.\,\frac{k'^2C^4}{2}$$
$$+\frac{1}{k}\Pi_1(u)\,.\,\Delta(u)+\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial u}\left(\Pi_1(u)\frac{\partial}{\partial\omega}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right). \qquad (5)$$

Při tom jsme označili

$$\Delta(u) = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\log\Pi_1(u)-\frac{\partial}{\partial u}\log\Pi_1(u)\,.\,\frac{\partial}{\partial\omega}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}.$$

Kdybychom nyní výraz (5) integrovali dle u podél vhodné integrační cesty a dovedli derivace dle u a ω, vyskytující se tam, vyjádřiti ϑ-funkcemi, měli bychom žádanou relaci pro derivaci funkce J. Bude tudíž v následujícím naší úlohou, vypočísti derivace dle ω a determinant $\Delta(u)$.

Co se týče výrazu $\frac{\partial}{\partial\omega}\log\Pi_1(u)$, můžeme vzhledem k relaci $a_0+a_1+a_2+a_3=0$ psáti

$$\Pi_1(u) = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^{a_0-1}\cdot\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{a_2+1}\cdot\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)^{a_3-1}.$$

*) Weber, l. c., 142.

$$\frac{\partial}{\partial\omega} log\, \Pi_1(u) = (a_0 - 1)\frac{\partial}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} + (a_2 + 1)\frac{\partial}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$$
$$+ (a_3 - 1)\frac{\partial}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}.$$

Běží tudíž jen o derivace tvaru $\frac{\partial}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n}$. Upotřebíme-li známé differenciální rovnice ϑ-funkcí

$$\frac{\partial^2\vartheta_\alpha}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial\omega},\ \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

dokážeme snadno relaci

$$\frac{\partial}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} + \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} \cdot \frac{\partial}{\partial u} log\, \vartheta_m\vartheta_n\right). \quad (6)$$

Jest totiž

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{\vartheta_m''}{\vartheta_m} - \frac{\vartheta_n''}{\vartheta_n}\right),$$

kdež ϑ_m'' a ϑ_n'' jsou druhé derivace ϑ_m a ϑ_n dle proměnné u. Avšak

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} log\, \vartheta_m - \frac{\partial^2}{\partial u^2} log\, \vartheta_n$$
$$= \frac{\vartheta''_m}{\vartheta_m} - \frac{\vartheta''_n}{\vartheta_n} - \left(\left(\frac{\vartheta'_m}{\vartheta_m}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta'_n}{\vartheta_n}\right)^2\right).$$

V poslední závorce rozvedeme rozdíl čtverců v součet a rozdíl. Poněvadž $\frac{\vartheta'_m}{\vartheta_m} = \frac{\partial}{\partial u} log\, \vartheta_m$, plyne z toho vztah (6). Tím převedeme derivace funkce $\Pi_1(u)$ dle ω má výraz takový, který obsahuje pouze derivace dle u, jež dovedeme vypočísti.

§ 5. *Výpočet determinantu* $\Delta(u)$. Třeba ještě upraviti výraz $\Delta(u)$ tak, aby se tam vyskytovaly funkce ϑ samy, nikoli jich derivace. $\Delta(u)$ jest, jak vidno, funkcionální determinant. Snadným výpočtem bychom se přesvědčili že jest dvojperiodickou funkcí. Dá se tudíž vyjádřiti pomocí kvocientů ϑ-funkcí. Výpočet jest následující.

Můžeme psáti

$$\Delta(u) = \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \left[(a_0 - 1) \frac{\partial}{\partial \omega} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} + (a_2 + 1) \frac{\partial}{\partial \omega} log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \right.$$
$$\left. + (a_3 - 1) \frac{\partial}{\partial \omega} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} \right]$$
$$- \frac{\partial}{\partial \omega} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \left[(a_0 - 1) \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} + (a_2 + 1) \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \right.$$
$$\left. + (a_3 - 1) \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} \right].$$

Applikujme vzorec (6) předešlého §; výraz $\Delta(u)$ uspořádán zní:

$$4\pi i \Delta(u) = (a_0 - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} \right)$$
$$+ (a_3 - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} \right)$$
$$+ (a_0 - 1) \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}$$
$$+ (a_3 - 1) \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} . \frac{\partial}{\partial u} log \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}. \qquad \text{I)}$$

Členy s koefficientem $(a_2 + 1)$ vypadnou. Tím jsme vyjádřili $\Delta(u)$ derivacemi ϑ-funkcí dle proměnné u, které lze lehko vypočísti. Patrně platí obecně

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} log \frac{\vartheta_e}{\vartheta_m} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_e} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_m} \right) \right) = Const \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\vartheta_n \vartheta_\nu}{\vartheta_e \vartheta_m} \right), \qquad \text{II)}$$

kdež n, ν jsou dvě z čísel 0, 1, 2, 3, která se různí od e a m. Konstantu určíme ze vzorců III) v § 3.

Ve výrazu I) jsou prvé dva členy opět determinanty týchž vlastností jako $\Delta(u)$, proto je označíme $\Delta_1(u)$ a $\Delta_2(u)$. Možno předem říci, že se dají jednoduše vyjádřiti pomocí kvocientů ϑ-funkcí. S použitím vzorců II) v tomto § a III) v § 3. vskutku nalezneme

$$\Delta_1(u)=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$$

$$=\pi^2A^2B^2\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\left\{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_2\vartheta_1}\right)-\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_1}\right)\right\}$$

$$\Delta_2(u)=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}$$

$$=\pi^2B^2C^2\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\left\{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)-\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)\right\}.$$

Když provedeme differenciaci vyznačených součinů, nalezneme konečně

$$\Delta_1(u)=\pi^2A^2B^2\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_1^2}\left\{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)-\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\right)\right\}$$

$$=2\pi^3A^2B^2C^2\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2},$$

$$\Delta_2(u)=\pi^2B^2C^2\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_1^2}\left\{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)-\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)\right\}$$

$$=2\pi^3A^2B^2C^2\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}. \qquad \text{III)}$$

Jest patrný zákon, dle něhož bychom mohli napsati hodnotu i jiných, analogicky jako $\Delta_1(u)$ nebo $\Delta_2(u)$ utvořených determinantů: v čitateli jest vždy třetí mocnost oné ϑ-funkce, jež se na levé straně nevyskytuje, ve jmenovateli pak součin ostatních tří ϑ-funkcí.

Poslední dva členy ve výrazu I) vypočteny dají

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$$

$$=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)=-\pi^3A^2B^2C^2\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}$$

$$=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)=-\pi^3A^2B^2C^2\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}.$$

IV)

Dosaďme tyto hodnoty III) a IV) do relace I); přijdeme k definitivní formuli

$$4\pi i \Delta(u) = \pi^3 A^2 B^2 C^2 \left((a_0 - 1)\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0 \vartheta_1 \vartheta_2} + (a_3 - 1)\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3}\right).$$

§ 6. *Vyjádření derivace* $\frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2}$ *pomocí funkcí příbuzných*

Rovnice (5) v § 4. nabude nyní podoby

$$2\frac{\partial}{\partial \omega}(K\Pi(u)) = -\frac{i\pi k'^2 C^4}{2k}\Pi_1(u)\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$$
$$+ \pi^3 A^2 B^2 C^2 (a_0 - 1)\frac{\Pi_1(u)}{4\pi i k}\cdot\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0 \vartheta_1 \vartheta_2}$$
$$+ \frac{(a_3 - 1)}{4\pi i k}\Pi_1(u)\pi^3 A^2 B^2 C^2 \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3}$$
$$+ \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial u}\left(\Pi_1(u)\frac{\partial}{\partial \omega}\log\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right).$$

Integrujme celou rovnici dle u. Poslední člen odpadne, neboť integrand jest úplným differenciálem. Dále jest

$$\int K\Pi(u)\, du = \overline{J}(a_0, a_1, a_2, a_3),$$

čili krátce $\overline{J}$. I bude

$$2\frac{\partial \overline{J}}{\partial \omega} = -i\pi k'^2 C^4 \overline{J} + \frac{(a_0 - 1)}{2\pi i k}\pi^2 A^2 B^2 \overline{J}(a_0 - 2, a_1, a_2, a_3 + 2)$$
$$+ \frac{(a_3 - 1)}{2\pi i k}\pi^2 A^2 B^2 \overline{J}(a_0 + 2, a_1, a_2, a_3 - 2).$$

Násobme celou rovnici výrazem $\frac{\partial \omega}{\partial k^2} = \frac{1}{i\pi k^2 k'^2 C^4}$ a uvažme, že $k = \frac{B^2}{C^2}$, $k' = \frac{A^2}{C^2}$. Ježto $\frac{\partial \overline{J}}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial k^2}$ jest rovno $\frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2}$, bude po úpravě

$$4k^2 k' \frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2} + 2k' \overline{J} + (a_0 - 1)\overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)$$
$$+ (a_3 - 1)\overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2) = 0. \qquad \text{V)}$$

Tím vyjádřena derivace $\overline{J}$-funkce funkcí $\overline{J}$ a dvěma s ní nejblíže příbuznými funkcemi. Vidno, že prvá, pročež i každá následující derivace $\overline{J}$-funkcí dle modulu k^2 se dá vyjádřiti lineárně pomocí funkcí příbuzných, při čemž koefficienty jsou racionální funkce exponentů a modulů k, k'. Tento výsledek slouží nám k odvození differenciální rovnice pro $\overline{J}$.

§ 7. *Differenciální rovnice $\overline{J}$-funkce.* Za tím účelem differencujme předešlou rovnici opět dle k^2. Poněvadž $k^2 + k'^2 = 1$, bude $\frac{\partial k'}{\partial k^2} = -\frac{1}{2k'}$; i jest

$$4k^2k' \frac{\partial^2 \overline{J}}{\partial (k^2)^2} + 4 \frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2} \frac{2k'^2 - k^2}{2k'} + 2k' \frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2} - \frac{1}{k'} \overline{J}$$
$$+ (a_0 - 1) \frac{\partial \overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)}{\partial k^2}$$
$$+ (a_3 - 1) \frac{\partial \overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2)}{\partial k^2} = 0. \qquad (1)$$

Avšak dle předešlého §

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)}{\partial k^2} &= -\frac{1}{4k^2k'} [2k'\overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2) \\ &\quad + (a_3 + 1)\overline{J} + (a_0 - 3)\overline{J}(a_0 - 4, a_3 + 4)] \\ \frac{\partial \overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2)}{\partial k^2} &= -\frac{1}{4k^2k'} [2k'\overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2) \\ &\quad + (a_0 + 1)\overline{J} + (a_3 - 3)\overline{J}(a_0 + 4, a_3 - 4)] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Násobme prvou rovnici $(a_0 - 1)$, druhou $(a_3 - 1)$ a sečtěme. Členy s $\overline{J}(a_0 \mp 2,\ a_3 \pm 2)$ vypadnou. Musíme ještě vyloučiti veličiny $\overline{J}(a_0 - 4,\ a_3 + 4)$ a $\overline{J}(a_0 + 4,\ a_3 - 4)$. K eliminaci slouží rov. (8) z § 3. a jiné dvě, které z ní plynou, když za a_0 píšeme $a_0 \mp 2$ a za a_3 píšeme $a_3 \pm 2$. Tyto rovnice jsou

$$(a_2 + a_3 - k'^2 (a_0 + a_2))\overline{J} + k'(a_0 - 1)\overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)$$
$$- (a_3 - 1)k'\overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2) = 0,$$

$$(a_2 + a_3 + 2 - k'^2 (a_0 + a_2 - 2))\overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)$$
$$+ k'(a_0 - 3)\overline{J}(a_0 - 4, a_3 + 4) - (a_3 + 1)k'\overline{J} = 0,$$

$$(a_2 + a_3 - 2 - k'^2 (a_0 + a_2 + 2))\overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2)$$
$$+ k'(a_0 + 1)\overline{J} - (a_3 - 3)k'\overline{J}(a_0 + 4, a_3 - 4) = 0.$$

Vypočtěme nejprve z rov. V) § 6. a z prvé z těchto rovnic $\overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2)$ a $\overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)$ a pak dosaďme do obou posledních. Tím vyjádříme

$$\overline{J}(a_0 - 4, a_3 + 4), \quad \overline{J}(a_0 + 4, a_3 - 4)$$

pomocí $\overline{J}$ a $\frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2}$. Nalezneme, že

$$(a_0 - 1)(a_0 - 3)\overline{J}(a_0 - 4, a_3 + 4) + (a_3 - 1)(a_3 - 3)$$
$$\overline{J}(a_0 + 4, a_3 - 4) = 8k^2(1 + k'^2)\frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2} + 2(a_0 a_3 - 1)\overline{J}$$
$$+ \frac{\overline{J}}{2k'^2}\{2(a_2 + a_3)^2 - 2k'^2[(a_0 + a_2 + 2)(a_2 + a_3 - 1)$$
$$+ (a_0 + a_2 - 2)(a_2 + a_3 + 1)] + k'^4[(a_0 + a_2 + 2)^2$$
$$+ (a_0 + a_2 - 2)^2]\}.$$

Jest tudíž, když dosadíme do rovnice (2)

$$(a_0 - 1)\frac{\partial \overline{J}(a_0 - 2, a_3 + 2)}{\partial k^2} + (a_3 - 1)\frac{\partial \overline{J}(a_0 + 2, a_3 - 2)}{\partial k^2}$$
$$= -\frac{2}{k'}\frac{\partial \overline{J}}{\partial k^2} - \{(a_2 + a_3)^2 - 2k'^2(a_0 a_2 - a_0 a_3 + a_2 a_3 + a_2^2)$$
$$+ k'^4(a_0 + a_2)^2\}\frac{\overline{J}}{4k^2 k'^3}.$$

Konečně z (1) nabudeme hledané differenciální rovnice

$$x^2(1 - x)^2\frac{\partial^2 \overline{J}}{\partial x^2} + x(1 - x)(1 - 2x)\frac{\partial \overline{J}}{\partial x}$$
$$- \{(a_0 + a_3)^2 + 2x(a_2 a_3 - a_0 a_2 - a_0 a_3 - a_2^2 + 2)$$
$$+ x^2(a_0 + a_2 + 2)(a_0 + a_2 - 2)\}\frac{\overline{J}}{16} = 0. \qquad (\alpha)$$

Tu jsme označili

$$x = k^2(\omega),$$

tak že $k'^2 = 1 - x$.

Tím proveden důkaz, že funkce $\overline{J}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ vyhovuje differenciální, homogenní lineární rovnici 2. řádu. Jest to regulární rovnice třídy Fuchsovy. Singulární místa této differenciální rovnice jsou, jak vidíme, body $x = 0, 1, \infty$, jako u obyčejné rovnice Gaussovy. Z formulí $k^2 = \frac{B^4}{C^4}$, $k'^2 = \frac{A^4}{C^4}$ plyne, že tato singulární místa jsou právě nullové body funkcí ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3.

Také differenciální resolventa 3. řádu předešlé rovnice má velmi jednoduchý tvar

$$\frac{s'''}{s'}-\frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2=\frac{1-\left(\frac{a_0+a_3}{2}\right)^2}{2x^2}+\frac{1-\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)^2}{2(1-x)^2}$$
$$-\frac{\left(\frac{a_0+a_3}{2}\right)^2-\left(\frac{a_0+a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)^2-1}{2x(1-x)}. \qquad (\beta)$$

s', s'', s''' značí derivace dle x. Položíme-li

$$\lambda=\frac{a_0+a_3}{2}, \quad \nu=\frac{a_2+a_3}{2}, \quad \mu=\frac{a_0+a_2}{2},$$

dostaneme rovnici úplně analogickou s onou, jež platí pro Gaussovu hypergeometrickou funkci.

Všimněme si ještě následujícího. λ, μ, ν jsou difference obou exponentů, náležejících singulárním bodům 0, ∞, 1. Kdybychom vypočetli exponenty samy, našli bychom

$$\alpha_1=\frac{1}{4}(a_2+a_3),\ \alpha_2=-\frac{1}{4}(a_2+a_3) \quad \text{(exp. k sing. bodu 0)}$$

$$\beta_1=\frac{a_0+a_2+2}{4},\ \beta_2=-\frac{a_0+a_2-2}{4} \quad \text{" \quad " \quad "} \ \infty$$

$$\gamma_1=\frac{1}{4}(a_2+a_3),\ \gamma_2=-\frac{1}{4}(a_0+a_3) \quad \text{" \quad " \quad "} \ 1$$

Užijeme-li pro J-funkci obvyklého indexového schematu, můžeme ji psáti

$$J(a_k \mid k^2)=\Pi\left|\begin{matrix} 0, & \infty, & 1 & \\ \frac{\lambda}{2}, & \frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}, & \frac{\nu}{2}; & k^2 \\ -\frac{\lambda}{2}, & -\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}, & -\frac{\nu}{2} & \end{matrix}\right|$$

I shledáváme, že naše funkce J jakožto funkce modulu k^2 representuje Riemannovu P-funkci velice jednoduché formy, jež jest blízka normovanému tvaru P-funkce, jejž Klein *) odvodil,

*) Srv. Klein, Üb. hyperg. Funktion, lith. 2. vyd. 1906, pag. 200 sq.; též Üb. Normierung der lin. Differentialgl. 2. Ordn. Math. Ann. 38, 144—52.

kde oba exponenty jednotlivých singulárních bodů liší se pouze znaménkem. Tím také ukázáno, že lze každou Riemannovu P-funkci vyjádřiti pomocí $\overline{J}$-funkce.

§ 8. *Závěrečné poznámky.* V předešlém podány jsou dva body theorie hypergeometrických transcendent na základě ϑ-funkcí. Naskýtala by se celá řada otázek jiných, ku př. studium rozvojů naší funkce, souvislost jednotlivých jejích větví, transformační problém a pod. Mnohé z těchto otázek dají se řešiti přímo z integrální definice J-funkcí, jiné z hořejší differenciální rovnice. Spokojíme se zatím theorií příbuzných funkcí a odvozením rovnice differenciální.

Funkce, kterou jsme se v předešlých §§ zabývali, patří do třídy zevšeobecněných hypergeometrických funkcí, jež podal Wirtinger*). Místo ϑ-funkcí figurují tam obecně σ-funkce s charakteristikami $\frac{\lambda}{n}$, $\frac{\mu}{n}$, totiž $\sigma_{\lambda\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)$.**) Tyto funkce jsou

$$\int_{\frac{\Omega}{n}}^{\frac{\Omega}{n}} \Pi \sigma_{\lambda\mu}^{k_{\lambda\mu}}(u \mid \omega_1, \omega_2)\, du, \quad \lambda, \mu = 0, 1, \ldots n-1,$$

Ω, Ω' periody. Platí o nich následující hlavní věty: I. Všecky takto definované formy dají se lineárně a homogenně vyjádřiti pomocí n^2 funkcí tohoto systému, na sobě nezávislých. II. Mezi $(n^2 + 1)$ korrespondujícími formami příbuzných systémů, existují homogenní lineární relace, jichž koefficienty jsou jednoznačné modulové funkce n-tého stupně. III. Jakožto funkce nějaké modulové funkce hoví tato funkce differenciální rovnici n^2-tého stupně, jejíž koefficienty jsou rovněž modulové funkce n-tého stupně.

---

*) Srv. Eine neue Verallgemeinerung der hyperg. Integrale, Sitzungsber. der Wiener Akad. CXII. 1903: Üb. die Anzahl der unabh. hyperg. Integrale n-ter Stufe, ib. 1905.

**) Srv. Klein-Frieke, Vorlesungen üb. die Theorie der ellipt. Modulf. 1890, II. 23.

Theorii těchto obecných funkcí Wirtinger pouze naznačil. Případ $n = 3$ v některých bodech podal Berger *). Položíme-li $n = 2$, máme vlastně funkci J. Jak patrno již z uvedených 3 hlavních vět, vykazuje tento specielní případ odchylné chování.

Poznámka ku plochám rozvinutelným.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

Známa jest konstrukce rovin tečných společných nějaké ploše sborcené a nějaké křivce, **) zakládající se na stanovení průsečíků tečen této křivky s onou plochou sborcenou. Konstrukce tato zjednoduší se valně v tom případě, kdy plocha sborcená bude hyperboloidem H a ona křivka křivkou rovinou L, jejíž rovina prochází jednou přímkou plochy sborcené. V tomto případě se snadno stanoví průsečíky tečen křivky L s plochou H a proto také i jejich společné roviny tečné. Souhrnem všech těchto společných rovin tečných stanovena jest rozvinutelná plocha jakožto jejich společná plocha obalová. Položme si za úkol sestrojiti *stopu této plochy* v průmětně a stanoviti zároveň *její body dotyčné* a *poloměry křivosti.*

1. Za tím účelem předpokládejme plochu hyperboloidu H vyjádřenou nějakým průmětem (klinogonálným nebo centrálným), A_3 přímky A nakloněné k průmětně ν, jejíž stopou jest bod n_A, dále přímkou B, ležící v průmětně ν (stotožňující se tudíž se svým průmětem) a obrysem průmětu, t. j. nějakou křivkou 2. stupně K_3, dotýkající se průmětů obou přímek A a B jakožto průmětem obrysové křivky K této plochy.

Průmětna obsahujíc přímku B jakožto přímku 2. soustavy hyperboloidu H protne tuto plochu ještě v přímce 1. soustavy ${}^{\nu}P$, kteráž procházejíc bodem n_A přímky A dotýkati se bude křivky K_3.

Křivka L mějž svůj průmět v libovolné křivce L a její rovina ϱ obsahuj přímku A, proto stopa její N_ϱ v průmětně procházeti bude stopou n_A této přímky.

---

*) l. c.

**) *Dr. W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie 1885, 3. vyd. II. díl, str. 442.