Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Láska

Základy aritmetiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 5, R81--R94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121722

ROZHLEDY MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

ROČNÍK 11. (1931/32). ČÍSLO 3.

Základy aritmetiky.

V. Láska.

Slovo úvodní.

Rozumový převrat dnešní doby vynutil si novou logiku, která se stane v nedaleké budoucnosti normou exaktního rozumování ve všech vědách matematických, biologických a sociologických, abychom vyjmenovali jen ty, v nichž moderní rozumování dosud nejúčinněji se uplatnilo.

Za nejlepší průpravu ke studiu udaného nového pojetí vědeckého rozumování musíme považovati elementární matematiku, neboť matematika to byla, jež dala popud k přestavění dosud právě všeobecně užívané klasické logiky. Pojednání, jež následuje, má býti průpravou ke studiu moderní logiky pro ty, kteří musí vystačiti v matematice s tím, co jim poskytla střední škola. Jest proto psáno s hlediska spíše filosofického než matematického a podává výhradně jen to, co pro vytčený úkol se jeví býti nezbytným po stránce ryze formální, neboť přesné základy matematiky podává symbolická logika sama, kterou musí studovati každý, kdo chce matematice úplně rozuměti.

1. *Vznik čísel.*

Mějmež dvě řady jednoznačně k sobě přiřaditelných prvků:

$$a_1\; a_2\; a_3 \ldots$$
$$b_1\; b_2\; b_3 \ldots$$

„Definicí „čísla" je mnoho a různých ... a nesmíme se tomu diviti. Kdyby jedna z nich vyhovovala, nehledaly by se nové ...

Je nemožno podati definici, která by neobsahovala nějakou větu a je těžko vysloviti nějakou větu, aniž by v ní nějaká ať určitá či neurčitá číslovka aneb nějaké slovo v množném čísle se nalézalo. Jakmile se to stane, máme však „petitio principii." *H. Poincaré.*

a značme jednotlivá přiřadění závorkami

$$\binom{a_1}{b_1}, \binom{a_2}{b_2}, \binom{a_3}{b_3}, \ldots$$

Utvoříme-li dále veškerá možná přiřadění od nejjednoduššího počínajíc postupným přibráním vždy dalších závorek, t. j.

$$\binom{a_1}{b_1}, \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}, \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\binom{a_3}{b_3}, \ldots$$

bude tento postup logicky ekvivalentní s napsáním čárek (za starodávna vruby)

$$I,\ \ II,\ \ III, \ldots$$

které z ekonomických důvodů nahrazujeme číslicemi

1, 2, 3, . . .*)

případně slovně číslovkami*)

jedna, dvě, tři, . . .

Že to byly prsty u ruky, k nimž vztahovány byly předměty, dokazují římské číslice I, II, III, IIII, V, VI, VII, VIII, VIIII, X, a čínské původní číslice:

I, II, III, IIII, IIIII, T, TT, TTT, TTTT.**)

Obecně díme

II jest více než I,
III jest více než II atd.

Místo slova více zaveďme symbol $>$ a opačně symbol $<$ místo slova méně, takže budeme psáti

$$II > I, \quad III > II$$

aneb $$1 < 2 < 3 < \ldots$$

Místo více, méně, mohli bychom stejně oprávněně říci: dřívější — pozdější, vyšší — nižší, více napravo — více nalevo a pod.

Symbol $\gtrless$ je zde symbolem uspořádání podle určitého přívlastku a ničím více. K vůli úplnosti připojíme ještě sym-

*) Proto čte se správně česky 2 + 2 = 4 dvě a dvě jsou čtyři (místo nesprávného jest), rozuměj čárky, vruby, a opět 2 + 5 = 7 dvě a pět jest sedm (čárek).

Viz Brus, Matice české, III. vyd., str. 38.

**) Viz: Jahresbericht der d. Math.-Ver. 1911, str. 381.

Otakar Bystřina ve své „Hanácké legendě“ tak pěkně vzpomíná o „vróbku“ na Hané: „Za starodávna chodili pijáci do hospody s lineárem, který mívali pověšený na krku; k tomu přidělal se druhý lineár u hospodského schovaný a jak vypil soused máz piva, udělal se vroubek. Až byl lineár plný, tož se vroubky sčítaly a odstrouhly a pilo se dále na novo.“

bol 0, který postavíme na počátek naší řady. Symbol ten bude definován později.

Obdržíme tak

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots,$$

t. j. symbolickou definici číselné řady, kterouž počíná aritmetika; co jest před tím, náleží do filosofie. Číselná řada celistvých kladných čísel jest charakterisována následujícími bezprostředně evidentními vlastnostmi:

1. Nula jest číslem (per positionem).
2. Před nulou není čísel.
3. Po každém čísle následuje jedno a jen jedno nové číslo, což značí, že v řadě nemůže se opakovati některé číslo.
4. Žádné z čísel není posledním, v řadě lze neomezeně pokračovati.

K tomu přistupuje ještě pravidlo pro užívání zavedeného symbolu $\lessgtr$:

5. Je-li a libovolné číslo řady a b některé z čísel, jež po něm v řadě následují, platí vždy

$$a < b \text{ a } b > a.$$

Kdybychom chtěli řadu

$$0 < 1 < 2 < 3 \ldots$$

definovati slovně, pak by naše definice vyzněla v parafrasi oněch pěti svrchu uvedených vět, z nichž nelze žádnou vynechati (ježto jsou nutné) a které naopak nepotřebují žádného doplnění, neboť postačují k charakteristice uvažované řady. Předpokladem vytvoření pojmu kladného celistvého čísla jsou tedy následující duševní schopnosti:

1. duch má schopnosti vztahovati věci k věcem,
2. jednu věc přiřaditi k druhé tak, že vzniknou ekvivalentní skupiny

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

a konečně

3. duch má schopnost vytvořiti si obecnou představu, kterou jedinečná přiřadění se shrnují v uspořádanou řadu

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Číselná řada ve svém uspořádání podobá se tak notám. Právě tak jako nauka o harmonii a skladbě jest možná jen na základě přiřadění tónů určitým notám, stejně i aritmetika jest možná jen na základě číselné řady. A tak jako v hudební teorii nejednáme o tónech, nýbrž o vázání tónů v akordy a melodické postupy, podobně nejedná aritmetika o číslech, nýbrž o zákonech mezi čísly, jež jsou důsledkem uspořádání čísel v číselnou řadu. Platí proto věta:

Podstatou pojmu čísla není velikost, nýbrž sukcese podmíněná symboly $>$, $<$ a jednoznačnou vazbou čísel.

Větu tu prvý zásadně vyslovil již Plato (v Theatetu, 185).*) Slovu „jednoznačná vazba“ nutno rozuměti takto: Budiž určitá operace, (vazba, Knüpfung) označena symbolem $(|)$, potom jednoznačná vazba značí, že výsledek vazby dvou prvků a a b, t. j.

$$a\,(|)\,b$$

jest opět prvek téže řady, tudíž u čísel opět číslo, a to:

1. existující vždy v řadě,
2. jedno a jen jedno a
3. zaujímá v řadě určité místo.

Abychom mohli sled a vazbu čísel všeobecně studovati, použijeme vhodných symbolů a rčení. Sled čísel vtělíme v symbol $+ 1$, takže symbolem

$$a\,(|) + 1 \text{ čili kratšeji } a + 1$$

bude označeno číslo bezprostředně následující po čísle a v číselné řadě. V symbolu $+ 1$ je znaménko $+$ neoddělitelné od 1 a nemá nic co dělati se sčítáním. Z této definice symbolu $+ 1$ obdržíme čísla 2, 3, ... následujícím způsobem:

$$1\,(|) + 1 = 2$$
$$2\,(|) + 1 = 3 \text{ atd.}$$

Zároveň jest

$$2\,(|) + 1 = (1\,(|) + 1)\,(|) + 1 = 3,$$
$$3\,(|) + 1 = (2\,(|) + 1)\,(|) + 1 = 4 \text{ atd.}$$

Operace $+ 2$ je definována rovnostmi plynoucími z obou předcházejících

$$(1\,(|) + 1)\,(|) + 1 = 1\,(|) + 2 = 3,$$
$$(2\,(|) + 1)\,(|) + 1 = 2\,(|) + 2 = 4 \text{ atd.}$$

Abychom dospěli k všeobecnější větě, pišme

*) Tak dokumentuje se číslo jako svobodná koncepce našeho ducha..., jež, jednou povstalá, ve svém dalším vývoji jest veskrze na smyslovém jsoucnu nezávislá.

Siegwart, Logik II, 1, 38.

Není náhodou, že moderní matematika navazuje na filosofii Platonovu. Jí jest číslo ideou, která existuje tím, že v nás vznikla jako logicky bezesporná představa, bez ohledu na její transientní význam. Čísla jsou proto jaksi šachové figurky, jichž význam stanoví teprve pravidla hry šachové, t. j. v matematice axiomatické postuláty.

$$a\,(|) + 2 = (a\,(|) + 1)\,(|) + 1,$$

poněvadž
$$1\,(|) + 1 = 2,$$

bude též
$$a\,(|)\,(1\,(|) + 1) = (a\,(|)\,1)\,(|) + 1$$

a n-kráte opakováním stejného postupu dospějeme k větě, kterou k vůli přehlednosti píšeme bez symbolu $(|)$:

$$a + (n + 1) = (a + n) + 1 \qquad (1)$$

jež je **základní** pro tak zvané sčítání (**Bolzano, Grassmann**). Neboť abychom vyšetřili na př. význam symbolu

$$2 + 3,$$

postupujeme následovně:

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 2 + (2 + 1) \text{ ex definitione} \\ &= (2 + 2) + 1 \text{ podle věty I.} \end{aligned}$$

Je však

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= 2 + (1 + 1) \text{ ex definitione} \\ &= (2 + 1) + 1 \text{ podle věty I.} \\ &\left.\begin{aligned} &= 3 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ ex definitione} \end{aligned}$$

a tudíž máme

$$2 + 3 = 4 + 1 = 5.$$

Podobně dospějeme k pravidlům pro násobení zavedením symbolu . 1 rovnicemi

$$a\,.\,1 = a, \quad a\,.\,(n + 1) = a\,.\,n + a.$$

Uvedený zde způsob je sice logicky důsledný, avšak pro praksi byl by nadmíru těžkopádný. Abychom vyhověli **principu ekonomie**, nahradíme podle **Hankela** 1867 opakující se pochody **formálními zákony**, které nám umožní řešiti početní úkoly cestou kratší. Ony zákony jsou následující:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ associační
2. $a + b = b + a$ komutační
3. $a\,(bc) = (ab)\,c$ associační
4. $\left.\begin{aligned} a\,(b + c) &= ab + ac \\ (a + b)\,c &= ac + bc \end{aligned}\right\}$ distribuční (4., 5.)
6. $ab = ba$ komutační.

Poznámka. Při komutaci máme: **jeden výkon a dva pojmy** tedy všeobecně

$$f\,(ab) = f\,(ba)$$

při associaci, máme **jeden výkon a tři pojmy**: tudíž všeobecně

$$f\,\{a, f\,(bc)\} = f\,\{f(ab), c\},$$

a konečně při distribuci: dva výkony a tři pojmy, což lze všeobecně psáti, jak následuje

$$f\{a\varphi(b, c)\} = \varphi\{f(ab), f(ac)\}.$$

Všeobecně vzato, existují proto vlastně jen tři podstatně rozdílné formální zákony, neboť další kombinace nedávají zásadně nových tvarů.

2. *Princip matematické indukce.**)

Uvedené formální zákony plynou, číselnou řadu předpokládaje, přímo z tak zvaného principu matematické indukce. Předpokládejme: 1. že jistá věta, ve které se nalézá nějaké všeobecné číslo n, platí pro $n = 1$ a dále 2. že lze dokázati, že, platí-li pro n, platí i pro $n + 1$, potom platí tato věta pro veškerá čísla číselné soustavy.

Na př. abychom dokázali, že platí všeobecně

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

nutno předpokládati (eventuelně postulátem, definicí atd.) platnost rovnice

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

a dále dokázati, že platí-li věta

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

platí i věta

$$a + (b + \overline{c + 1}) = (a + b) + \overline{c + 1}.$$

Postulujeme-li tudíž na př. předpoklad

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

ex definitione symbolu $+ 1$ a zároveň platnost principu matematické indukce, obdržíme tím aparát potřebný k logickému vybudování celé aritmetiky, neboť z toho lze svrchu uvedené

*) Matematika jest věda dedukce par excellence. Z indukce používá jen tak zvané matematické indukce, t. j. důkazu z n na $n + 1$. Ovšem bez indukce nebylo by ani v matematice invence. Matematické věty zřídka kdy byly objeveny bez indukce, platí to zejména pro historicky objevené věty. Byla-li ale nějaká věta tak objevena, nestane se dříve matematickou větou, dokud není podán její deduktivní důkaz. Matematická dedukce má ovšem jednu kardinální vadu. Místo, aby odkrývala spojení vůdčích myšlenek, halí je v neproniknutelnou mlhu.

F. Mayer: Math. Kongr. 1904., 670.

Také zůstává indukce při použití na vědy přírodní a fysiku vždy závadnou, poněvadž je založena na víře, že v kosmu platí za všech tak různých zjevů stejná zákonitost, což jest vlastně nedoloženou hypotesou. Matematická indukce naproti tomu vnucuje se nám sama sebou výhradně jako duševní vlastnost našeho rozumu, nezávislá na světě mimo nás.

formální zákony 1 až 6 odvoditi t. z. lze dokázati, že jsou důsledkem uvažovaného postulátu. Abychom to alespoň na jediném příkladě ukázali, dokažme existenci tak zvaného principu associace pro sečítání, t. j. větu

$$p + (q + k) = (p + q) + k.$$

Základy k tomu potřebné jsou:

1. Definice symbolu $+ 1$,
2. věta I., t. j.

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

3. věta definující všeobecnou platnost symbolu $+ 1$, t. j. věta

Je-li $\quad a = a'$

bude i $\quad a + 1 = a' + 1.$

Důkaz skládá se ze dvou částí:

A) Ex definitione jest

$$p + (q + 1) = (p + q) + 1.$$

B) Předpokládejme, že platí

$$p + (q + k) = (p + q) + k.$$

Potom dokážeme na základě vět 1., 2. a 3., že platí i

$$p + (q + \overline{k + 1}) = (p + q) + \overline{k + 1}.$$

Poněvadž však platí (podle *A*) poslední věta pro $k = 1$, platí na základě principu matematické indukce všeobecně.

Důkaz věty *B*).

Ze vztahu

$$p + (q + k) = (p + q) + k$$

plyne vzhledem k předpokladu 3.

$$[p + (q + k)] + 1 = [(p + q) + k] + 1,$$

z čehož (klademe-li ve větě 2.) $a = p + q, b = k$)

$$[(p + q) + k + 1] = (p + q) + \overline{k + 1}$$

dále (klademe-li ve větě 2. $a = p, b = q + k$)

$$[p + (q + k)] + 1 = p + [q + \overline{k + 1}]$$

a konečně (klademe-li ve větě 2. $a = p, b = q + k$)

$$[p + (q + k)] + 1 = (p + q) + \overline{k + 1},$$

čímž z obou posledních vztahů plyne

$$p + [q + k + 1] = (p + q) + \overline{k + 1} \quad q.\ e.\ d.$$

Podobným způsobem obdržíme ostatní formální zákony. Formální zákony ty platí zatím jen pro čísla celistvá. Jejich platnost pro jiná čísla, na př. iracionální, musí býti od případu k případu zbadána. Aby „něco“, na př. Dedekindův řez, mohlo býti nazváno číslem, nutno dokázati, že pro to „něco“ platí formální zákony normující pojem čísla.

Na základě uvedeného můžeme nyní stanoviti

3. *Hilbertův systém číselný.*

Reálným číslům přísluší následující vlastnosti (které jsou nutné a dostačující):*)

I. Věty o skladu (Knüpfung):

1. Z čísel a a b povstává „adicí“ určité číslo c, což znamená symbolicky:

$$a + b = c \text{ aneb } c = a + b.$$

2. Jsou-li a a b daná čísla, existuje vždy jedno a jen jedno číslo x a y takové, že

$$a + x = b \text{ aneb } y + a = b.$$

3. Existuje číslo — budiž označeno symbolem 0 nula —, pro které platí při libovolném a rovnice

$$a + 0 = a \text{ aneb } 0 + a = a.$$

4. Z čísel a a b povstane „násobením“ číslo c takové, že platí

$$ab = c \text{ aneb } c = ab.$$

5. K číslům a a b existuje vždy x, y tak, aby

$$ax = b \text{ aneb } ya = b.$$

6. Existuje číslo — budiž označeno 1 —, pro které a pro každé a platí

$$a \,.\, 1 = a \text{ aneb } 1 \,.\, a = a.$$

II. Pravidla algoritmu, t. j. počítání s čísly, formální zákony — Hankel 1867.

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$ associační

8. $a + b = b + a$ komutační

9. $a\,(bc) = (ab)\,c$ associanční

10. $a\,(b + c) = ab + ac$ distribuční

11. $(a + b)\,c = ac + bc$ distribuční

12. $ab = ba$ komutativní.

*) Hilbert: Grundlagen der Geometrie, VII. vydání, str. 241 a následující.

III. Věty o „seřadění" (Anordnung):

13. Je vždy, jsou-li a a b rozdílná čísla a jedno z nich, řekněme a větší ($>$), tudíž

$$a > b, \quad b < a.$$

14. Je-li $a > b$ a $b > c$ je též $a > c$; monotonie, jež uplatňuje vztahy mezi symboly $+, \cdot, \gtrless$.

15. Je-li $a > b$ je vždy též

$$a + c > b + c, \quad c + b < c + a.$$

16. Je-li $a > b$ (samozřejmě $c > 0$), je vždy

$$ac > bc, \quad ca > cb.$$

IV. Věta o plynulosti (Stetigkeit).

17. Archimedova věta.

Budiž $a > 0$, $b > 0$, potom je vždy možno a k a tolikrát přičísti, aby vzniklý součet

$$a + a + a + \ldots + a > b.$$

V. Věta o celistvosti (Vollständigkeit).

Čísla definovaná postuláty 1. až 17. podmiňují existenci úplného logického systému: princip konsistence, t. j. systému, ve kterém každá věta, každý soud jest logickým důsledkem jedině postulátů 1. až 17. a žádných jiných. Uvažované postuláty 1. až 17. jsou nutné a zároveň postačitelné, definují tudíž úplnou čili uzavřenou logickou soustavu.*)

Tuto soustavu čísel nazveme Archimedovou. Soustava, pro niž platí všechny postuláty vyjímaje větu 12., nazývá se soustavou nearchimedovskou čili Desargueovou. V ní tudíž neplatí věta $ab = ba$.

*) Na prvý pohled by se mohlo zdáti, že taková formalisace není vědeckým pokrokem. Jaká je to věda, tak volá Schopenhauer, jejíž výkony lze nahraditi strojem!

Je totiž myslitelný stroj, jehož působení jest normováno axiomatickými postuláty $A, B, C \ldots$, tak, že po nastavení na pojmy $a, b, c, \ldots$, dá přímo určitý výsledek jako na př. stroje početní, které dávají mechanicky součet aneb součin nastavených čísel.

Čistá axiomatika redukovaná Peanovou symbolikou v ryzí minci, je však zlatým pokladem cedulové banky, která nese jméno Matematika a jako takový není sice zpředu pro běžný oběh, avšak stejně potřebný jako zlato cedulovým bankám, poněvadž jest podkladem kreditu matematiky.

Také je vzíti v úvahu, že symbolikou se stávají matematické výrazy nezávislými na gramatice a etymologii. Také teprve symbolika dovoluje věci definovati správně. Slovu romantika rozumí každý samostatně uvažující filosof jinak, co však značí symboly

$$>, <,$$

v tom jsou a musí býti všichni matematikové za jedno.

4. *Přechod k všeobecné aritmetice.*

Každý předmět, který nějakým svým aspektem jest ekvivalentně přiřaditelný k číselné řadě, nazveme měřitelnou veličinou.

Při srovnávání kvalitativně stejných veličin dospíváme k soudům, které slovně vyjadřujeme predikátem

stejný, nestejný, větší, menší atd.

Slova ta nahradíme symboly, a to z té příčiny, poněvadž slova, jež jsou vázána řečí, se nehodí k přesné definici pojmů a vztahů, o nichž uvažuje matematika.

Budeme psáti všeobecně $a = b$, když chceme vysloviti, že a a b jsou stejné co do uvažovaného praedikátu (na př. délky); $a > b$, když a jest větší než b; $a < b$, když a jest menší než b; $a \gtrless b$ resp. může-li všeobecně vzato a býti nestejné s b.

Kromě toho zavedeme symbol identity $\equiv$ pro absolutní rovnost, t. j. tehdy, když pro veškeré predikáty obou pojmů (v uvažovaném příkladu směr i délka) lze užíti symbolu $=$. Píšeme tedy na př. $4 - 1 = 3$, avšak $3 \equiv 3$. Definice. Pravíme, že pojmy, prvky, elementy, individua jsou téže třídy, možno-li na ně aplikovati kromě symbolu identity i symboly $>$, $<$. Symbol $=$ u elementů téže třídy, znamená vždy totéž co symbol $\equiv$, neboť stejné elementy jsou vždy identické, a to z toho důvodu, že každý element může se vyskytnouti ve třídě ex definitione jen jednou. Veličiny vyhovují následujícím axiomatickým postulátům (absolutní teorie):

1. žádný není ani větší ani menší sebe, což znamená, že nelze psáti $a \gtrless a$.

2. pro dvě rozdílná a a b platí vždy disjunktivně buď $a > b$ aneb $b > a$,

3. je-li $a > b$, jest $b < a$ a konečně,

4. když $a > b$ a $b > c$ jest i $a > c$.

Tímto nemá býti filosofický pojem „veličina“ definován. Nám jde jen o formální definici slova „veličina“ tak, aby další naše úvahy neobsahovaly nic, co by nebylo náležitě definováno. Širší pojem „veličina“ jest pojem syntetický, který nutno z matematiky a ovšem i z jiných věd nejprve vypreparovati; a v tomto smyslu objeví se (tak jako u Pasche*) na konci úvah.

V elementární školní matematice jest pojem „veličiny“ jenom pedagogicky a heuristicky cennou pomůckou. Projektivní

*) Pasch: Verändliche und Funktion § 66. Je to zároveň klasický příklad impliátní definice.

geometrie na př. nejedná o veličinách a v teorii grup, této pravé „mathesis universalis" pojem ten — v obvyklé interpretaci — se nevyskytuje. Matematika, jak již uvedeno, není nauka o veličinách, avšak my k vůli názornosti o nich mluvíme a následkem toho nutno předem říci, co ono slovo s našeho hlediska má znamenati.

Všeobecně nazveme tudíž veličinou každý pojem, pro který užíváme symbolů a jichž kontradikce je nějakým jednoznačně určitým způsobem stanovena.

Definice veličiny zde podaná je zásadně Grassmannova.

5. *Čísla záporná.**)

Řada čísel kladných je schopna rozšíření nalevo. Za tím účelem pišme místo

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ e & 2e & 3e \ldots, \end{matrix}$$

kdež $n \,.\, e$ znamená, že číslo jest skupina jednotek e utvořených tak, jako se číslo n skládá z jednotky 1.

Rozšířená řada pak zní

$$\ldots < 3e_1 < 2e_1 < e_1 < 0 < e < 2e < 3e < \ldots$$

a chceme-li, aby algoritmus sečítání čísel (kladných) platil i pro tuto řadu, nutno zavésti následující definiční rovnice pro jednotku e_1:

$$e_1 + e = 0. \qquad \text{(I.)}$$

Čísla s jednotkou e nazýváme kladná, čísla s jednotkou e_1 záporná. Aby platil i algoritmus násobení, dlužno, jak se snadno přesvědčíme, položiti dále

$$\left.\begin{matrix} e_1 e = e e_1 = e_1 \\ e_1 e_1 = e \end{matrix}\right\} \text{II.}$$

Tím jsme dospěli ke zcela novým číslům a vzhledem k rovnicím I. a II. nutno, podržíme-li jednotkovou soustavu, psáti zápornou jednotku novým symbolem.

Tak se vše převede na sčítání a násobení, výraz „odečítání" se zde nevyskytuje. To je logický postup, jenž vede k záporným číslům. Stanovíme:

Symbol $b - 1$ značí číslo v uspořádané řadě bezprostředně před b se nalézající. Historický postup zavedl jednoduše $+ a$ místo ae a $- a$ místo ae_1, čímž ovšem splývá symbo-

---

* „Sestrojením záporných čísel počíná se soustava pomyslných. (t. j. s hlediska celistvých čísel) nesrozumitelných pojmů." Voss. Ueber das Wesen der Math. Str. 34.

lika čísel záporných s tak zvaným odčítáním a problém určiti

$$+a \cdot -b$$

stane se záhadou. A jiné otázky ještě. Tak zejména Newton správně soudil, že $-1 < +1$.

1. D'Alembert naproti tomu klade $-1 > +1$ a argumentuje takto: „Úměra

$$-1 : +1 = +1 : -1$$

je správná (!). Úměra však praví, že poměr prvního a druhého členu rovná se poměru třetího a čtvrtého. Kdyby bylo $-1 < +1$, jak Newton akceptuje, byl by prvý poměr stoupající, druhý klesající, a následkem toho oba poměry by nemohly býti sobě rovny". Čísla záporná není nutno zaváděti v aritmetiku.

Zavedeme místo $e_1 = -1$ všeobecně x a místo symbolu $=$, Gaussův symbol kongruence mod $(x + 1)$; potom místo

$$7 - 9 = 3 - 5$$

lze psáti

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \ (\text{mod } x + 1).$$

Tím se nám zároveň objeví záporná čísla v novém světle a je vybudován most spojující teorii čísel s aritmetikou. Symbol ten, jak známo, praví:

$7 + 9x$ (x jest kladné číslo) děleno $x + 1$ dá týž zbytek jako $3 + 5x$. Máme totiž

$$7 + 9x = 7(x + 1) + 2x$$
$$3 + 5x = 3(x + 1) + 2x$$

Kongruence přejde v rovnici, jestliže x určíme tak, aby

$$x + 1 = 0.$$

Dodáme ještě i pro budoucí úvahy důležitou poznámku. Při zavedení nových čísel nutno i zkoumati význam symbolu $>$, $<$, $=$ atd.

6. *Čísla všeobecná.*

Symbolem (a, b) budeme označovati dvě čísla, která budeme považovati za nové číslo vyššího řádu, pro něž zavedeme tyto axiomatické postuláty:

1. $(a, b) = (a'b')$ je-li $a = a'$, $b = b'$.

Budiž dále c reálným číslem, potom nechť platí

2. $c\,(a, b) = (ca, cb) = (a, b)\,c$
3. $(a, 0) = a\,(1, 0) = a$ } Tím stanoven význam nuly.
4. $(0, b) = b\,(0, 1)$ }
5. $(a, b)\,(a', b') = (aa' - bb',\ ab' + ba')$.

Jednotky naší soustavy nechť jsou

$$(1, 0) = 1, \quad (0, 1) = e$$

a tudíž

$$(a, 0) = a, \quad (0, b) = be.$$

Tím jsme zavedli soustavu číselných skupin, vyhovující, jak lze dokázati, všem postulátům reálných čísel, tedy soustavu, kterou lze na reálná čísla převésti.

Přesně vzato musí i algorithmus zlomků podobně býti formulován. Srov. I. Tannery: Int. á la theorie des fonctions, 1886.

Z postulátu 5. plyne pro

$$(1, 0) = 1, \quad (0, 1) = e,$$

$$(ab) = (a + 0, 0 + b) = (a, 0) + (0, b) = a + be.$$

Je však podle téhož postulátu 5.

$$e^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

tudíž

$$e = \sqrt{-1} = i.$$

Můžeme tedy psáti

$$(a, b) = a + ib$$

a tím jsme dospěli přímou cestou k číslům imaginárním. Rozšíření úvah na symboly (a, b, c), (a, b, c, d) etc. podává se samo sebou. Zde však se ukazuje, že nelze sestrojiti systém číselný splňující všech 11 postulátů čísel obecných a čísel symbolu (a, b). Zejména při číslech (a, b, c) nutno buď vynechati princip komutační, takže na př. bude

$$(a, b, c)\,(a', b', c') = -(a', b', c')\,(a, b, c)$$

aneb distribuční. V prvém případě obdržíme Hamiltonovy kvaterniony a v druhém pak čísla

$$a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

která zavedl Scheffler.

Vytvořme si všeobecné číslo *)

$$c = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots a_ne_n,$$

*) Lze sestrojiti ovšem čísla o nekonečně mnoha jednotkách e. Pro čísla toho druhu neplatí axiom Archimedův. Ona tvoří „nearchimedovské soustavy číselné“.

kdež e jsou jednotky. Má-li ono vyhověti všem 11 postulátům algebry, redukuje se potom na

$$c' = a_1 e_1 + a_2 e_2,$$

kde $e_1 = 1$, $e^2_2 = -1$, což zároveň vysvětluje, proč v obecné algebře čísla vyšších stupňů neexistují, a jestliže je zavedeme, pak nutno měniti formální zákony.

Doplnění úvah našich tvoří: Věta Frobeniova (Crelle-Journal f. Mathem., 1878, 59):

Mezi všemi obecnými čísly o dvou neb více jednotkách neexistuje mimo komplexní čísla a kvaterniony žádné jiné, jež jsouc součinem a i b by se stalo nulou, když jedno z nich jest nulou, t. j. které by vyhovovalo rovnici

$$ab = 0$$

je-li a nebo b rovno nule.

Sestrojení pravidelného třináctiúhelníku.

Ladislav Klír.

Z obrázku je patrna jednoduchá konstrukce pravidelného třináctiúhelníku vepsaného do kružnice.

V dané kružnici o poloměru $\overline{AS} = r$ a středu S vytkneme dva k sobě kolmé průměry: $AB \perp CD$. Z koncového bodu B jednoho průměru opsaný oblouk kruhový tak, aby procházel koncovým bodem C druhého průměru, protíná prvý průměr $\overline{AB}$ v bodě M. Polokružnice opsaná nad $\overline{AS}$ jako průměrem seče předešlý oblouk v bodě N; vzdálenost $\overline{MN}$ je stranou pravidelného třináctiúhelníku ($\overline{MN} = a_{13}$).

O přesnosti této konstrukce se přesvědčíme, srovnáme-li výsledky, k nimž dojdeme z této konstrukce, s výpočtem trigonometrickým.

Je totiž

$$a_{13} = 2r \sin \frac{360^0}{26} = 2r \sin 13^0\, 50'\, 46'', \quad \text{čili } a_{13} = 0{\cdot}47863 \,.\, r.$$

Podle uvedené konstrukce vypočteme stranu a_{13} z pravoúhlého trojúhelníku MNN_1. Jeho odvěsnu $\overline{NN_1}$ určíme buď jako výšku v trojúhelníku OBN, ve kterém známe všecky tři strany, nebo analyticky položením počátku do bodu O a souřadné osy x do průměru $\overline{AB}$.