Augustin Pánek
Poučka binomiální v počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 4, 178--182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121718

Poučka binomiální v počtu pravděpodobnosti.

Podává

Augustin Pánek.

V osudí se nalezá a černých, b bílých kuliček; podobnost mathematická, že vytáhneme kuličku černou, budiž $= u$, aneb bílou $= v$, tedy

$$u = \frac{a}{a+b}, \quad v = \frac{b}{a+b}; \quad u + v = 1.$$

Vykonáme-li tahů $s = m + n$, jest podobnost, že vytáhneme m-krát kuličku černou $= u^m$ a n-krát bílou $= v^n$, a poněvadž pro s tahů jsou kuličky vytažené v permutací s opakováním, proto jest podobnost složitá

$$\frac{(m+n)!}{m!\ n!} u^m . v^n .$$

Učiníme-li na př. tahů $s = 5$, může nastati

$m = 5$, $n = 0$ a podobnost $= u^5$,
$m = 4$, $n = 1$ „ $= 5u^4v$,
$m = 3$, $n = 2$ „ $= 10u^3v^2$,
$m = 2$, $n = 3$ „ $= 10u^2v^3$,
$m = 1$, $n = 4$ „ $= 5uv^4$,
$m = 0$, $n = 5$ „ $= v^5$,

a poněvadž jest jednotka symbol jistoty, proto jest součet podobností příhod jednotlivých

$$u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5 = 1.$$

Vykonáme-li tedy s tahů, obdržíme podle toho

$$u^s + (s)_1 u^{s-1}v + (s)_2 u^{s-2}v^2 + \ldots + (s)_1 uv^{s-1} + v^s = 1 \quad (1)$$

aneb zavedeme-li místo u a v svrchní zlomky a odstraníme-li pak společného jmenovatele $(a+b)^s$, povstane

$$a^s + (s)_1 a^{s-1}b + (s)_2 a^{s-2}b^2 + \ldots + (s)_1 ab^{s-1} + b^s = (a+b)^s, \quad (2)$$

což jest známá poučka Newtonova.

Označíme-li podobnost, že v s tazích vytáhneme nejméně jednou kuličku černou, P, jest dle (1)

$$P = u^s + (s)_1 u^{s-1}v + (s)_2 u^{s-2}v^2 + \ldots + (s)_1 uv^{s-1}$$

aneb

$$P = 1 - v^s = 1 - (1-u)^s \text{*)} \qquad (1')$$

Je-li v osudí m kuliček označených číslicemi 1, 2, ... m, a jest-li každou kuličku vždy po učiněném pokusu zpět do osudí vložíme, čímž se podobnost výjevů jednotlivých nezmění, a vytáhneme-li jich celkem v počtu s: jaká jest podobnost, že nejméně jedna kulička souhlasí s číslem pokusu?

Pro tento případ jest $u = \frac{1}{m}$, tedy podobnost dle vzorce (1'),

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^s. \qquad (3)$$

Podobnost protivná, že žádná kulička číslicí označená, nesouhlasí s číslem pokusu, jest

$$P' = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^s; \quad P + P' = 1.$$

Je-li ale počet osudí g a v každém m kuliček opět označených číslicemi 1, 2, ..., m, a vytáhneme-li jich s, z každého osudí po jedné a na jednou, kteréžto kuličky vždy po vytažení zpět do osudí vložíme; jaká jest podobnost, že nejméně jednou současně vytažené kuličky mají stejné číslo s řadovým číslem pokusu?

V tomto případě zavedeme do vzorce (3), m^g místo m a tedy

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{m^g}\right)^s \qquad (4)$$

Máme-li opět g osudí a v každém m kuliček označených číslicemi 1, 2, ..., m, a učiníme-li t tahů, jaká jest podobnost, že z k kuliček určitých, když z každého osudí jednu a to současně ze všech vytáhneme, jedna kulička nejméně jednou aneb vícekrát vytažena bude, při čemž ovšem předpokládáme, že po každém pokusu kuličku do osudí zpět vložíme.

Zde třeba do vzorce (1') položiti

$$u = \frac{k}{m}, \quad s = gt,$$

a tedy

*) Srovnej „*Poisson,* Recherches sur la Probabilité de Jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris, 1837". *Zachariae,* De mindste Quadraters-Methode, Nyborg, 1871.

$$P = 1 - \left(1 - \frac{k}{m}\right)^{gt}. \qquad (5)$$

Je-li $k = 1$, obdrží se

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{gt}, \qquad (6)$$

což značí podobnost, že jedna určitá kulička dle svrchu uvededených výminek nejméně jednou vytažena bude.

Máme-li jedno osudí a v něm m kuliček, a vytáhneme-li r kuliček jednotlivě, které po vytažení zpět do osudí vložíme, a pokus tento s-krát opakujeme, jaké jest podobnost, že vytažené kuličky patří jen k určitě označeným kuličkám.

Počet případů příznivých, že vytáhneme r kuliček z počtu k určitě označených, jeví se jakožto kombinace k prvků, třídy r-té bez opakování, a tedy $= (k)_r$, a poněvadž pokusy se s-krát opakují, proto $[(k)_r]^s$, tedy podobnost mathematická, že nejméně r kuliček jest z počtu k,

$$q = \left[\frac{(k)_r}{(m)_r}\right]^s = \left[\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)}\right]^s. \qquad (7)$$

V tomto případě nepřipouští se, že by se ostatních $m-k$ kuliček vytáhlo.

Podobnost, že se žádná z k určitých kuliček nevyskytne při s tazích, jest

$$p = \left[\frac{(m-k)(m-k-1)\ldots(m-k-r+1)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)}\right]^s,$$

a podobnost, že z k kuliček určitých objeví se nejméně r různých jednou aneb vícekrát,

$$P = 1 - p = 1 - \left[\frac{(m-k)(m-k-1)\ldots(m-k-r+1)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)}\right]^s. \qquad (8)$$

Zde není vyloučeno, že by se ostatních $m-k$ kuliček vytáhnouti nesmělo.

Jest-li $k = 1$, bude

$$P = 1 - \left[\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-r)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)}\right]^s$$

$$= 1 - \left(\frac{m-r}{m}\right)^s$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{r}{m}\right)^s, \qquad (9)$$

t. j. podobnost, že určitá kulička dle udaných výminek nejméně jednou vytažena bude.

Jaká jest podobnost při týchž výminkách, že každá z k určitých kuliček nejméně jednou se vytáhne?

V tomto případě třeba vzorec (9) povýšiti na k-tou moccnost, tak že

$$P = \left[1 - \left(1 - \frac{r}{m}\right)^s\right]^k. \qquad (10)$$

Je-li tato podobnost $P = \frac{\alpha}{\beta}$, pak se dá ustanoviti počet tahů s, které se musí vykonati, by byla docílena tato podobnost, že se k určitých kuliček vytáhne. Poněvadž

$$\left[1 - \left(1 - \frac{r}{m}\right)^s\right]^k = \frac{\alpha}{\beta},$$

tedy

$$s = \frac{log\left(1 - \sqrt[k]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{log\left(1 - \frac{r}{m}\right)} \; *) \qquad (11)$$

Snadně se určí i veličina k aneb $m - r$ aneb r, známe-li ostatní.

Vzorec (11) má i platnost, když $m = k$, načež povstane

$$s = \frac{log\left(1 - \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{log\left(1 - \frac{r}{m}\right)}. \qquad (12)$$

V obyčejné loterii vytáhne se 5 čísel z 90-ti; kolik tahů se musí vykonat, aby pro podobnost $= \frac{1}{2}$ všecka čísla vytaženana byla

Zde jest

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}, \quad m = 90, \quad r = 5,$$

*) Pro $r = 1$, $k = m$, obdržíme vzorec, který uvádí *Laplace* ve svém „Théorie analytique des Probabilités“, pag. 119.“ a kterýž vyvodil na základě *řady rozdílové.*

a kdy dle vzorce (12)

$$s = 85 \cdot 208$$

to jest přes 85 tahů se musí vykonati, by se mohla 1 proti 1 saditi, že všecka čísla vytažena budou.

Ukázky z indické arithmetiky obecné
řečené „Lilâvâti".

Podává

prof. **František Hromádko** v Táboře.

Bhaskara, s čestným příjměním Âcârya *) t. j. mistr byl poslední mathematik a hvězdář indický, neb pozdější počtáři téhož národa nepodali potomstvu prací samostatných spokojujíce se buď změnou method, jimiž předchůdcové jejich pravdy mathematické vyvíjeli, aneb pouhým rozborem starších v oboru tom chvalně se proslavivších badatelů. Bhaskara jest však tvůrcem původní soustavy hvězdářské, kterou sám *„čelním drahokamem"* všech podobných soustav („Siddhântaçiromani") nazval.

Celé dílo jeho rozvrženo jest na čtvero knih, z nichž obě první *„Lilâvâti* a *Vija* (čti: vidža) *ganita* obsahují základy arithmetiky a algebry jakožto úvod do astronomie. Na konci spisu uvádí autor též rok, kterého se narodil jakož i letopočet, kdy knihu sepsal. První rok souhlasí s r. 1114 po Kr., druhý pak s r. 1150. Ukončil tedy toto dílo v roce 36. svého věku.

Prameny, z nichž vážil, udává Bh. na konci části „Vija ganita" těmito slovy: „Ješto učebné knihy algebry od Brahmagupty, Çridhary a Padmanabhy **) příliš rozsáhlé jsou, sestavil jsem čerpaje z těchto pramenů stručný výtah, tuto pravými theoriemi opatřenou počtářskou rukověť."

Ku podivu jest, že neudává Bh. nejstaršího indického algebraistu a jak se podobá, snad prvního *zakladatele* této nauky.

---

*) Čti *áčárja.*

**) Brâhmagupta t. j. Bráhma nazvaný žil v 7. věku po Kr., oba ostatní mezi 8. a 10. stoletím našeho letopočtu.