Bohumil Bečka

O bodech mnohonásobných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 4, 169--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121717

O bodech mnohonásobných.

Podává

B. Bečka,

assistent při c. k. hvězdárně.

Při stanovení bodů mnohonásobných počtem differenciálním naskytá se v praxi značných obtíží; je-li totiž předložena křivka algebraická

$$\varphi(x, y) = 0,$$

musíme vždy, chtíce dospěti k bodům m-násobným, vyšetřovati, které z bodů, jež obdržíme řešením rovnic

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

vyhovujíce zároveň rovnici křivky, činí výrazy pro $\frac{dy}{dx}$ z podmínek *)

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \frac{\partial^2\varphi}{\partial^{2-i}x\, \partial^i y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \frac{\partial^3\varphi}{\partial^{3-i}x\, \partial^i y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0,$$

. . . .

. . . .

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial^{m-1-i}x\, \partial^i y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0$$

plynoucí neurčitými, takže teprvé m-tou derivací

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \frac{\partial^m\varphi}{\partial^{m-1}x\, \partial^i y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0$$

docílíme m pravých hodnot pro směrnice tečen $\frac{dy}{dx}$.

Poněvadž tu poslední rovnice tím vyššího bude stupně, čím větší jest m, patrno, že nehledíc ani k složitému differencování úloha tím jest nesnadnější, čím více násobné body křivka obsahuje. Jest tudíž zajímavo zvěděti, jakým spůsobem bychom nahradili soustavu výše uvedených rovnic soustavou jinou, kteráž by úlohu bodů mnohonásobných jednak přehledností formy a

*) Viz *Studnička:* „Základové vyšší mathematiky." I. pag. 181.

pro mnohé případy v řešení samém usnadnila, čehož docíliti bez upotřebení počtu differenciálního budiž tu naším úkolem.

Nejvšeobecnější rovnice U_n křivek algebraických zní

$$\left.\begin{array}{c} A \\ + Bx + B_1 y \\ + Cx^2 + C_1 xy + C_2 y^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + Nx^n + N_1 x^{n-1} y + \ldots + N_n y^n \end{array}\right\} = 0, \qquad (1)$$

jíž však k vůli vhodnějšímu přehledu v jiné formě upotřebíme značíce součinitele při členu $x^i y^k$ symbolicky

$$\binom{k+i}{k} a_i b_k,$$

takže všeobecně udavatel $\left\{\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\}$ při $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ úplně se rovná mocnosti $\left\{\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\}$ souřadnic $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$. —

Tím nabude rovnice (1) rázu určitějšího, totiž

$$\left.\begin{array}{c} a_0 \\ + a_1 x + b_1 y \\ + a_2 x^2 + 2(a_1 b_1) xy + b_2 y^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + a_n x^n + \binom{n}{1} (a_{n-1} b_1) x^{n-1} y + \ldots + b_n y^n \end{array}\right\} = 0, \qquad (2)$$

takže $(k+1)^{\text{ní}}$ řádka obdobna jest tu co do tvaru patrně výrazu

$$(ax + by)^k;$$

třeba v něm jen po vykonaném zmocnění podlé poučky binomické psáti

$$a^i b^k = (a_i b_k),$$

aby se přešlo ku tvaru (2).

Můžeme tudíž pro rov. (2) užiti následujícího označení

$$U_n \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{n} (ax + by)^k = 0. \qquad (3\alpha)$$

Abychom nalezli nyní podmínky, za kterýmiž bude počátek souřadnic bodem m-násobným, zaveďme polární souřadnice rovnicemi

$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi,$$

jež dosazeny byvše do (3 α) dají relaci

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \varrho^k (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^k = 0,$$

kterouž lze i takto psáti

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \varrho^k (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^k + \varrho^m \sum_{k=m}^{n} \varrho^{k-m} (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^k = 0. \tag{3β}$$

Má-li býti bod $x = y = 0$ m-násobným bodem křivky, musí kterákoliv přímka jdoucí počátkem souřadnic protínati v něm křivku m-kráte, ač není-li tečnou křivky, aneb hodnota

$$\varrho = 0$$

musí při libovolném φ m-kráte činiti zadost rovnici (3 β), což není jinak možno, než když veškeří součinitelové $(a_i\, b_k)$ ve výrazu

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \varrho^k (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^k$$

rovnají se nulle.

Podlé rovnice (1) neb (2) jest jich na počet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m}{2} (m+1),$$

máme tudíž tolikéž podmínek, aby počátek souřadnic byl m-násobným bodem křivky.

Přímky tečné v bodě tom, majíce celkem po $(m+1)$ bodech s křivkou společných, vytknuty jsou další podmínkou

$$\varrho^m (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^m = 0,$$

aneb

$$(ax + by)^m = 0,$$

kterážto rovnice stejnoměrná stupně m-tého poskytuje m hodnot $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_m$ pro poměr $\frac{y}{x}$, a tudíž m tečen

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1\, x, \\ y &= \alpha_2\, x, \\ &\vdots \\ y &= \alpha_m\, x. \end{aligned}$$

Na základě těchto výsledků snadno udáme obdobné podmínky, aby bod (h_1, h_2) byl bodem m-násobným. Neboť učiníme-li jej počátkem souřadnic, musí v rovnici (3) člen proměnných ξ, η neobsahující jakož i $\left\{\frac{m}{2} (m + 1) - 1\right\}$ jemu následujících součinitelů při $\xi_i\, \eta_k$ rovnati se nulle, převedeme-li ji rovnicemi

$$x = \xi + h_1$$
$$y = \eta + h_2$$

na bod $(h_1 h_2)$ co počátek, tudíž na tvar:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ (ah_1 + bh_2) + (a\xi + b\eta) \right\}^k = 0,$$

aneb mocníme-li za znamením součtovým

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (ah_1 + bh_2)^{k-i} . (a\xi + b\eta)^i = 0. \quad (4\,\alpha)$$

Z posledního tvaru dotčené součinitele snadno odvodíme; budeť tu

$$\left.\begin{array}{l}
a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (ah + bh_2)^k = 0 \ \ldots \text{ co člen stálý,} \\
\sum\limits_{k=1}^{n} ka\,(ah_1 + bh_2)^{k-1} = 0 \ldots \text{ co součinitel při } \xi, \\
\sum\limits_{k=1}^{n} kb\,(ah_1 + bh_2)^{k-1} = 0 \ldots \text{ co } \quad „ \quad „ \ \eta, \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\sum\limits_{k=m-1}^{n} b_{m-1} \binom{k}{m-1} . (ah_1 + bh_2)^{k-m+1} = 0 \quad „ \quad \eta^{m-1}.
\end{array}\right\} (4\beta)$$

Přímky tečné určeny jsou tu pak za podobnou příčinou jako dříve rovnicí:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} (ah_1 + bh_2)^{k-m} . (a\xi + b\eta)^m = 0$$

aneb zavedeme-li opět x, y místo ξ, η též

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (ax + by)^{m-i} . (ah_1 + bh_2)^i \right\} . \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} (ah_1 + bh_2)^{k-m} = 0. \quad (5)$$

Poznámka. Snadno lze tu poznati, že křivka (2) nemá bodů m-násobných, jsou-li veškeří součinitelové

$$(a_{i+\lambda}\, b_{k+\mu}) = 0,$$

— vyjma $a_i b_k$, — a to pro kterékoliv dvě stejné neb rozdílné číslice λ, μ z řady

$$0, 1, 2, \ldots n,$$

avšak tak volené, aby bylo

$$i + k < m,$$
$$\lambda + \mu \leqq n;$$

dle toho nebude na př. při křivce

$$y^4 - ay^3 + y^2 - 6axy - 5y + 3 = 0$$

bodu trojnásobného, ježto jest tu

$$(a_1\, b_1) = -3a$$

avšak

$$(a_{1+\lambda}\, b_{1+\mu}) = 0\,.$$

Abychom určili, zdaž má křivka

$$x^4 + 4xy^3 + ay^3 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

bod trojnásobný, sestavme si pro $n = 4$, $m = 3$ podmínky (4β), totiž

$$\begin{aligned}
&-3 + 8h_1 - 6h_1{}^2 + ah_2{}^3 + h_1{}^4 + 4h_1\, h_2{}^3 = 0\\
&2 - 12h_1 + 4h_1{}^3 + 4h_2{}^3 = 0\\
&2ah_2{}^2 + 12h_1\, h_2{}^2 = 0\\
&-6 + 6h_1{}^2 = 0\\
&3ah_2{}^2 + 12\, h_1\, h_2 = 0\\
&2h_2{}^2 = 0
\end{aligned}$$

z nichž tři poslední poskytují body

$$h_2 = 0\,, \quad h_1 = \pm 1\,,$$

z kterých však toliko bod ($h_2 = 0$ $h_1 = +1$) též prvním třem vyhovuje a jest tudíž bodem trojnásobným.

Poněvadž tu však pro tečné dle rov (5) obdržíme

$$\frac{y}{x - h_1} = \frac{y}{x - 1} = -\frac{4}{a + 4} = \alpha_1\,,$$

$$\frac{y}{x - 1} = +\frac{\alpha_1}{2}\,(i\sqrt{3} - 1)\,,$$

$$\frac{y}{x - 1} = -\frac{\alpha_1}{2}\,(i\sqrt{3} + 1)\,,$$

a tedy dvě tečny pomyslné jsou, jest bod zároveň osamělým.

Obraťme se nyní k vyšetřování bodů dvojných, kteréž velmi často se objevují, pročež též zvláštního povšimnutí jsou hodny. —

Podmínky, které jsou tu platné, plynou ze soustavy (4β) pro $m = 2$, a zní

$$a_0 + \sum_1^n (ah_1 + bh_2)^k = 0 \qquad (6\alpha)$$

$$\sum_1^n ak\,(ah_1 + bh_2)^{k-1} = 0 \qquad (6\beta)$$

$$\sum_1^n bk\,(ah_1 + bh_2)^{k-1} = 0 \qquad (6\gamma)$$

Rovnice (6α) totožná jest co do tvaru s rovnicí (3α), z čehož jde na jevo, že úloha dvojných bodů, shodna jest v podstatě s úlohou určiti společné průseky ($h_1 h_2$) křivky (2) s dvěma křivkami stupně (n—1)-ho, totiž

$$\sum_1^n ak\,(ax+by)^{k-1}=0\,. \tag{7 α}$$

$$\sum_1^n bk\,(ax+by)^{k-1}=0\,. \tag{7 β}$$

Snadno rozhodneme, jaký jest maximální počet těchto průseků; označíme-li totiž počet průseků křivek ($7\,\alpha$), ($7\,\beta$), kteréž neleží na křivce (2), ν, počet vyskytujících se bodů dvojných μ, jest vždy

$$\mu+\nu=(n-1)^2,$$

aneb položíme-li

$$\nu=\frac{n\,(n-1)}{2}\pm k \tag{8}$$

též

$$\mu=\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\mp k, \tag{9}$$

kdež k blíže se má vyšetřiti; proložme za tou příčinou body μ a dalšími $n\pm k-2$ téže křivky (2) celkem tedy

$$\mu+n\pm k-2$$

body jakousi křivku stupně (n—2)-ho, což možno jest, jestli

$$\mu+n\pm k-2\leqq\frac{(n-2)\,(n+1)}{2},$$

an křivka stupně p body $\frac{p\,(p+3)}{2}$ úplně jest stanovena; poněvadž body μ jsou body dvojnými, obdržíme $2\mu+n\pm k-2$ společných bodů, při čemž může býti

$$2\mu+n\pm k-2\leqq n\,(n-2)\,,$$

aneb použijeme-li rov. (9),

$$n\,(n-2)\mp k\leqq n\,(n-2)$$

tedy

$$\mp k\leqq 0\,;$$

z čehož jde, že ve výrazech pro μ a ν toliko znaménka hořejšího upotřebiti lze, načež se stává pro $k=0$ μ maximum, ν pak minimum.*)

*) Srovnej „Cremona, Úvod do geometrie křivek rovinných“ pag. 39.

Považujeme-li bod m-násobný za $\frac{m(m-1)}{2}$ bodů dvojných čili za toliktéž průseků m ramen v něm se protínajících, bude dle toho pro největší možné m

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

čemuž se při racionálném a celistvém m vyhoví jedině hodnotou

$$m = (n-1).$$

Křivka n-tého stupně nemůže tedy míti více než $(n-1)$-násobný bod, a žádáme-li, aby se při ní vyskytl bod n-násobný, pravíme tím, že se má křivka rozpadnouti v n přímek, an se tu rovnice (4α) promění ve

$$(a\xi + b\eta)^n = 0,$$

jež poskytuje n hodnot pro poměr $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y-h_2}{x-h_1}$, a tudíž n přímek křivku skládajících.

Poznámka. Násobíme-li rovnici $\left\{\begin{matrix} 6\beta \\ 6\gamma \end{matrix}\right\}$ veličinou $\left\{\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\}$ a sečteme-li pak, obdržíme

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(ah_1 + bh_2)^k = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(ah_1 + bh_2) + n\,(ah_1 + bh_2)^n = 0,$$

a z n-násobné rov. (6α) snadným rozkladem

$$na_0 + n\sum_{k=1}^{n-1}(ah_1 + bh_2)^k + n\,(ah_1 + bh_2)^n = 0,$$

odečtením pak obou

$$na_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,(ah_1 + bh_2)^k = 0, \tag{10}$$

kterýmžto činem nijak jsme neporušili označení symbolického, získavše zároveň na místo rovnice (6α) rovnici stupně $(n-1)$-ho.

Obsahuje-li křivka jeden proměnný parametr v, lze jej pak vyloučením h_1, h_2 z relac (6β), (6γ), a (10) tak ustanoviti, aby se vyskytly body dvojné.

Pro kuželosečky na př.

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + cy + f = 0. \tag{11}$$

jsou relace tyto

$$ah_1 + ch_2 + d = 0,$$
$$ch_1 + bh_2 + e = 0,$$
$$dh_1 + eh_2 + f = 0,$$

a vyloučíme-li souřadnice h_1, h_2

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0,$$

kterážto stejnina jest dle dřívějšího vyšetření zároveň znakem, kdy se kuželosečka rozpadne ve dvé přímek,

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0,$$

jež blíže určíme porovnáním součinitelů při x^2, y^2, xy.... v součinu

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) = 0,$$

se součiniteli při těchže členech v rovnici (11). Není-li $\varDelta = 0$, rozhoduje o tvaru křivky stupně druhého, jak známo, výraz

$$ab - c^2,$$

kterýž jest však v $\varDelta$ podřízeným determinantem F prvku f; bude pak značiti *)

$$\begin{aligned} F &> 0, \text{ ellipsu,} \\ F &= 0, \text{ parabolu,} \\ F &< 0, \text{ hyperbolu,} \\ \varDelta &= 0, \text{ dvě přímky.} \end{aligned}$$

Rovnice na př.

$$vx^2 + xy - 2y^2 + 3x + 2 = 0.$$

s proměnným parametrem v, značící svazek kuželoseček,**) dává při

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2v & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

čili pro $v = 1$, dvě přímky k svazku příslušné, jichž rovnice jsou

$$x + 2y + 2 = 0,$$
$$x - y + 1 = 0,$$

pro

$$v \begin{cases} < -\frac{1}{8} & \text{ellipsy.} \\ = -\frac{1}{8} & \text{parabolu} \\ > -\frac{1}{8} & \text{hyperboly.} \end{cases}$$

---

*) Viz „Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky". I. pag. 171.

**) „Cremona" pag 48.

Dodatek. Abychom poznali, jak tu souvisí podmínečné relace s derivacemi rovnice (3α) μ_n, derivujme tuto podlé $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu\text{-kráte} \\ \nu\text{-kráte} \end{Bmatrix}$, předpokládajíce při tom, že jest

$$\mu + \nu < n;$$

tím vznikne

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} U_n}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \sum_{k=\mu+\nu}^{n} (a_\mu b_\nu) \, . \, k(k-1) \ldots (k-\nu-\mu+1)(ax+by)^{k-\nu-\mu},$$

aneb zavedeme-li

$$\mu + \nu = i,$$

obě strany veličinou $\begin{pmatrix} i \\ \nu \end{pmatrix}$ znásobíce též

$$\begin{pmatrix} i \\ \nu \end{pmatrix} \frac{\partial^i U_n}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \sum_{k=1}^{n} i! \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i \\ \nu \end{pmatrix} (a_\mu b_\nu)(ax + by)^{k-i}$$

v soustavě (4β) zní však $\left\{ \frac{i(i+1)}{2} + \nu + 1 \right\}^{\text{ní}}$ rovnice $P\nu$.

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \nu \end{pmatrix} (a_\mu b_\nu)(ah_1 + bh_2)^{k-i},$$

takže jest

$$i!\,P\nu = \begin{pmatrix} i \\ \nu \end{pmatrix} \Big/ \frac{\partial^i U_n}{\partial x^\mu \partial y^\nu}^{x=h_1,\, y=h}, \quad \mu + \nu = i;$$

čímž souvislost ona jest vytknuta.

Zbývalo by ještě, provésti reciproké úvahy pro křivky třídy n-té, tedy pro rovnici

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (Au + Bv)^k = 0,$$

kdež jsou μ a ν souřadnice lineárné, což si do některého z příštích čísel ponecháme.