František Josef Studnička
O kvaternionech. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 4, 145--151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121715

O kvaternionech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

§. 4.

O dělení kvaternionů.

Jsou-li předloženy opět dva kvaterniony (10) a (11), totiž

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 ,$$
$$\beta = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 ,$$

bude podlé známého výměru podíl jejich a sice

$$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma \tag{36}$$

míti tu vlastnost, že pro zavedený pořádek v kladení činitelů

$$\gamma\alpha = \beta , \tag{37}$$

při čemž nutno γ určiti pomocí hodnot veličin a, b.

Především tu jde z rovnice poslední, znásobíme-li na obou stranách veličinou $K\alpha$,

$$\gamma\alpha K\alpha = \beta K\alpha$$

a tudíž pomocí vzorce (31) a (36)

$$\gamma = \frac{\beta K\alpha}{N\alpha} , \tag{38}$$

z čehož patrno, že podíl *dvou kvaternionů rovná se součinu čitatele se sdruženým jmenovatelem, dělenému normou jmenovatele.*

Poněvadž $N\alpha$ jest číslo reálné, obdržíme, zjednáme-li si podlé známých pravidel součin

$$\begin{aligned}\beta K\alpha = {} & b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ & + (b_1 a_0 - b_0 a_1 + b_3 a_2 - b_2 a_3)\, i_1 \\ & + (b_2 a_0 - b_3 a_1 - b_0 a_2 + b_1 a_3)\, i_2 \\ & + (b_3 a_0 + b_2 a_1 - b_1 a_2 - b_0 a_3)\, i_3 ,\end{aligned}$$

z čehož jde pak pomocí vzorce (38)

$$\gamma = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3, \tag{39}$$

zavedeme-li označení podobné (21)

$$\begin{aligned} N\alpha \,.\, c_0 &= b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3, \\ N\alpha \,.\, c_1 &= b_1 a_0 - b_0 a_1 + b_3 a_2 - b_2 a_3, \\ N\alpha \,.\, c_2 &= b_2 a_0 + b_3 a_1 - b_0 a_2 + b_1 a_3, \\ N\alpha \,.\, c_3 &= b_3 a_0 - b_2 a_1 - b_1 a_2 - b_0 a_3. \end{aligned}$$

Jak ze vzorce (39) patrno, jest *podíl dvou kvaternionů opět kvaternionem* a to určitým, pokud není

$$N\alpha \equiv a^2_0 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 = 0. \tag{40}$$

Jsouli a veličiny reálné, jako zde vesměs, vyhoví se této podmínce rovnicemi

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,$$

načež arci též musí býti

$$\alpha = 0;$$

při bikvaternionech však, kde veličiny a jsou soujemné, poskytuje rovnice (40) nekonečné množství hodnot této podmínce vyhovujících, úlohu nully zastupuje tu tedy celá řada čísel jinorodých.

Poněvadž úkon násobení není záměnným, jsou-li činitelé kvaterniony, nutno i zde vyšetřiti, jak se tu mají rozmanité stejniny krácením neb upravováním na jednodušší tvar povstávající.

Především patrno jak ze vzorce (38) tak i o sobě, že

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{K\alpha}{N\alpha},$$

z čehož tedy plyne

$$\beta \,.\, \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta K\alpha}{N\alpha} = \frac{\beta}{\alpha};$$

podobně bude podlé téhož vzorce

$$\alpha \,.\, \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \,.\, \frac{\beta K\gamma}{N\gamma} = \frac{\alpha\beta K\gamma}{N\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Dále obdržíme na témž základě

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} K\gamma}{N\gamma} = \frac{\alpha K\beta}{N\beta} \,.\, \frac{K\gamma}{N\gamma}$$

a tudíž podlé vzorce (32) a (34)

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\frac{\alpha K(\gamma\beta)}{N(\gamma\beta)}=\frac{\alpha}{\gamma\beta}; \tag{41}$$

týmž spůsobem poznáme, že především

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\frac{\alpha}{\frac{\beta K\gamma}{N\gamma}}$$

a znásobíme-li čitatele i jmenovatele kvaternionem γ a použijeme-li vzorce (31)

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma}{\frac{\beta K\gamma\,.\,\gamma}{N\gamma}}=\frac{\alpha\gamma}{\beta}. \tag{42}$$

Taktéž snadno poznáme, že

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha K\beta}{N\gamma}\cdot\frac{\beta K\gamma}{N\gamma}=\frac{\alpha K\gamma}{N\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma},$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=1 \quad \text{atd.}$$

Vedlé toho však na stejné cestě se dokáže, že

$$\beta\frac{\alpha}{\beta} \text{ není totéž co } \alpha;$$

neb podlé vzorce (38) platí

$$\beta\frac{\alpha}{\beta}=\beta\,.\,\frac{\alpha K\beta}{N\beta}=\frac{\beta\alpha K\beta}{N\beta}$$

a poněvadž $\beta\alpha$ není totéž co $\alpha\beta$, není též $\beta\alpha\,K\beta$ totéž co $\alpha\beta\ K\beta$ neb $\alpha N\beta$ a tudíž nepřijde se krácením na α.

§. 5.

O mocnění kvaternionů.

Jak z předešlého patrno, jest násobení i dělení kvaternionů úkolem dosti složitým, jelikož odvozené veličiny c vzorce (22) a (39) jsou velmi složité; tím obtížnějším musí tedy patrně býti mocnění, jelikož se tu opakuje složité násobení. I jest tudíž zjevno, že prospěšnější tvar kvaternionů *redukovaný* rychleji tu povede k cíli nežli tvar původní, jako u veličin soujemných, kde jest

$$a+bi=r\,(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)\,.$$

Abychom si pak zjednali tento tvar redukovaný i pro kvaterniony, položme i tu

$$\alpha = R\alpha + I\alpha = r\,(\cos\varphi + \iota \sin\varphi),$$

kdež ι prozatím značí neznámou jednotku ideální, načež bude, porovnáme-li části reálné a ideálné,

$$\begin{aligned} R\alpha &= r\cos\varphi \\ I\alpha &= \iota\, r \sin\varphi\,; \end{aligned} \tag{43}$$

uvedeme-li na druhou mocninu obě rovnice a odečteme-li, obdržíme především

$$R^2\alpha - I^2\alpha = r^2\,(\cos^2\varphi - \iota^2\sin^2\varphi),$$

a ustanovíme-li nyní, že

$$\iota^2 = -1, \tag{44}$$

a máme-li zřetel k známým vzorcům (8), (26) a (31), dále

$$M^2\alpha = r^2 \text{ neb } r = M\alpha\,. \tag{45}$$

Konečně nutno ještě ustanoviti hodnotu první mocniny veličiny ideálné ι ze vzorců (43); jdeť tu patrně z prvního

$$r\sin\varphi = \sqrt{M^2\alpha - R^2\alpha}$$

a tudíž z druhého, dělíme-li,

$$\iota = \frac{I\alpha}{\sqrt{M^2\alpha - R^2\alpha}} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{\sqrt{a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}}\,, \tag{46}$$

z čehož jde na jevo, že tato nová ideální jednotka ι *rovná se ideálné části kvaternionu dělené modulem téže části*, jelikož

$$\sqrt{M^2\alpha - R^2\alpha} = M(I\alpha)\,.$$

Máme-li zřetel ke vzorci (45) a povážíme-li, že ze vzorců (43), (45) a (46) plyne

$$\cos\varphi = \frac{R\alpha}{M\alpha} = \frac{a_0}{\sqrt{a_0{}^2 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}}\,, \tag{47}$$

$$\sin\varphi = \frac{M(I\alpha)}{M\alpha} = \frac{\sqrt{a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}}{\sqrt{a_0{}^2 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}}\,, \tag{48}$$

obdržíme konečně

$$\alpha = M\alpha\,(\cos\varphi + \iota\sin\varphi)\,, \tag{49}$$

což představuje redukovaný tvar kvaternionu α.

Podlé toho bude tedy pro kvaternion β podobně

$$\beta = M\beta\,(\cos\psi + \iota'\sin\psi)\,,$$

kdež podlé vzorce (47) a (48) platí

$$\cos\psi = \frac{R\beta}{M\beta}\,, \quad \sin\psi = \frac{M(I\beta)}{M\beta}\,,$$

takže znásobíme-li obě rovnice, obdržíme

$$\alpha\beta = M\alpha\, M\beta\,[\cos\varphi\cos\psi + \iota\iota'\sin\varphi\sin\psi]\,,$$

$$+ M\alpha\, M\beta\, (\iota \sin\varphi \cos\psi + \iota' \cos\varphi \sin\psi)\,, \tag{50}$$

z čehož jde pro ten případ zvláštní, že

$$\alpha = \beta\,, \text{ tedy } \iota = \iota',$$

$$\alpha^2 = M^2 \alpha\, (\cos 2\varphi + \iota \sin 2\varphi)\,. \tag{51}$$

Jak ze vzorce (50) patrno, jeví se tentýž rozdíl mezi veličinami soujemnými a kvaterniony, jako byl vytknut v §. 3. při násobení; za tou příčinou není možná součin n kvaternionů tvaru redukovaného tak jednoduše vyjádřiti, jako se děje při veličinách soujemných, kde platí o

$$\alpha_k = r_k (\cos\varphi_k + i \sin\varphi_k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \prod_{k=1}^{n} r_k \left[\cos \sum_{k=1}^{n} \varphi_k + i \sin \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right], \tag{52}$$

nýbrž jen n-tou mocninu kvaternionu a to vzorcem, který se postupně dá vyvinouti z (51), jelikož tu snadno se podobně obdrží dále

$$\alpha^3 = M^3 \alpha\, (\cos 3\varphi + \iota \sin 3\varphi)$$

$$\alpha^4 = M^4 \alpha\, (\cos 4\varphi + \iota \sin 4\varphi)$$

$$\vdots$$

$$\alpha^n = M^n \alpha\, (\cos n\varphi + \iota \sin n\varphi)\,, \tag{53}$$

což jest úplná obdoba tak zvané *poučky Moivre-ovy* a ukazuje jak se n-tá mocnina kvaternionu skládá, rovnajíc se n-té mocnině modulu a majíc n-násobnou amplitudu.

Poněvadž podle vzorce (44)

$$\iota^3 = -\iota,\ \ \iota^4 = 1$$

a tudíž všeobecně i tu platí

$$\iota^{4k} = +1,\ \ \iota^{4k+1} = \iota,\ \ \iota^{4k+2} = -1,\ \ \iota^{4k+3} = -\iota\,,$$

bude i možná vzorec (49) vyjádřiti tvarem

$$\alpha = M\alpha \,.\, e^{\varphi\iota} \tag{55}$$

a tudíž vzorec (54) podobně tvarem

$$\alpha^n = M^n \alpha \,.\, e^{n\varphi\iota}\,, \tag{56}$$

jako při obyčejných veličinách soujemných.

Jinak však zde vypadá mocnění binomů, trinomů, . . . , polynomů; poněvadž násobení není kommutativním, nutno psáti

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha + \beta\alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

a t. d.

takže pro ten případ, že exponenciální funkci určíme řadou

$$e^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!},$$

nesmíme souditi, jako při veličinách reálných, že

$$e^{\alpha} . e^{\beta} = e^{\alpha+\beta},$$

jelikož tu $\alpha\beta$ není totéž co $\beta\alpha$.

Konečně budiž ještě vyložen geometrický význam nové ideální jednotky ι.

Jako obyčejná imaginární jednotka

$$i = \sqrt{-1}$$

značí směr kolmo na přímku znázorňující řadu čísel reálných a jest tudíž v jistém smyslu *směrnicí rovinnou*, podobně určuje ι směr v prostoru a jest v stejném smyslu *směrnicí prostorovou.*

Zavedeme-li totiž do vzorce (46)

$$\begin{aligned} a_1 &= M(I\alpha) \cos\varrho , \\ a_2 &= M(I\alpha) \sin\varrho \cos\sigma , \\ a_3 &= M(Ia) \sin\varrho \sin\sigma , \end{aligned} \tag{57}$$

což vede k stejnině

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = M^2(I\alpha),$$

obdržíme ihned

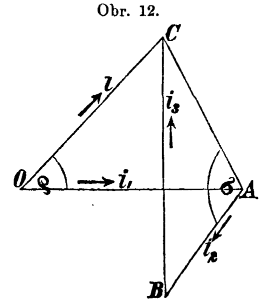
$$\iota = i_1 \cos\varrho + i_2 \sin\varrho \cos\sigma + i_3 \sin\varrho \sin\sigma . \tag{58}$$

Jmenujeme-li tedy směrnici pro směr OA krátce i_1, pro směr kolmý AB podobně i_2 a pro směr kolmo na tento v rovině OAB vedený, tedy pro BC konečně i_3, bude pro

$$OC = 1, \quad \sphericalangle COA = \varrho . \quad \sphericalangle CAB = \sigma$$

$$OA = i_1 \cos\varrho , \quad AB = i_2 \sin\varrho \cos\sigma , \quad BC = i_3 \sin\varrho \sin\sigma ,$$

Obr. 12.



takže pro směr OC bude podlé předešlého vzorce (58) směrnicí ι.

Kdybychom tedy ve vzorci (49) položili

$$\cos\varphi = 0, \text{ tedy } \sin\varphi = 1,$$

což nastává podlé vzorce (47) pro

$$a_0 = 0,$$

při čemž tedy se redukuje kvaternion na svou část ideální, obdržíme spojením vzorce (49) a (58)

$$I\alpha = M(I\alpha)(i_1\cos\varrho + i_2\sin\varrho\cos\sigma + i_3\sin\varrho\sin\sigma), \quad (59)$$

kterýmžto vzorcem určena jest v prostoru délka přímky i směr její; neb dáme-li dřívějším délkám všeobecnější význam a položíme-li

$$OA = a_1, \quad AB = a_2, \quad BC = a_3,$$

bude patrně značiti

$$OC = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = M(I\alpha)$$

vzdálenost bodu C od bodu počátečního O, a poněvadž každý bod na kouli poloměru OC má tutéž vzdálenost, nutno znáti směrnici jeho polohy, ana jest vyjádřena vzorcem (58), z čehož jde, že vzorec (59) oběma požadavkům vyhovuje.

Poněvadž tu ideální části kvaternionů hlavní hrají úlohu, nutno se blíže s nimi seznámiti a zvláštní zákony, jež se u nich jeví, vyšetřiti a vytknouti.

(Pokračování.)

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. **Karel Zahradník.**

(Pokračování.)

XIV. Souvislost mezi plochami dvou sdružených trojúhelníků.

25. Označíme-li plochu trojúhelníku daného ABC písmenem p, a plochu trojúhelníku sdruženého $A'B'C'$ zkrátka P, bude *)

---

*) Viz Dr. *Fr. Studnička*: „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech“. Časop. II. díl, pag. 70 a 72.