Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 1, R28--R32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121705

délka železné páky, jíž se píst uvádí v pohyb 128 *cm*. Stroj je celkem dobře zachován. Na jednom místě mosazného válce vznikl malý otvor a vlastní píst ulomil se od dřevěného táhla.

Vedle vývěvy této zachována jest ještě uvedená již vývěva chovaná od r. 1715 v Berlíně v Král. knihovně; r. 1908 byla odevzdána museu v Mnichově.

Druhý exemplář nalézá se v technice v Brunšvíku a liší se od vývěvy v Lundu ještě více než předešlý. Zakoupen byl r. 1791 z pozůstalosti rady Biedersee v Helmstädtu lékařem prof. Beireisem a od r. 1811 jest v Brunšvíku. Obě tyto vývěvy jsou z doby pozdější než původní vývěva v Lundu.

ÚLOHY.

Z matematiky.

1. V kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ sestrojme tětivy stejné délky d, jejich koncové body promítněme jeden do přímky $y = n$, druhý do $y = -n$. Je stanoviti rovnici obálky spojnic oněch průmětů.

Prof. *Jos. Dvořák* (Písek).

2. Mají-li rovnice

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0, \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

jeden kořen společný, jest utvořiti rovnici 2. stupně, která má za kořeny druhé dva různé kořeny daných rovnic.

Týž.

3. Dokažte správnost identit

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$
$$+ \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$$

pro $n = 0, 1, 2$. Dr. *Marian Haas.*

4. Sestrojte hyperbolu, známy-li směry obou asymptot a tři její body.

Týž.

5. Na pozemku za 100.000 Kč byl vystavěn dům za 150.000 Kč, jehož udržování a pojištění stojí 2000 Kč ročně. Daně, přirážky a dávky v obci obnášejí 50% hrubé (vybrané) činže. Dům se má amortisovati v 50 letech a vynášeti 5% dekursivně v celoročních obdobích (nikoliv ¼letních, v nichž se vybírá činže a daně).

a) Jak velkou třeba vybírati činži, kdyby se daně, přirážky a dávky ihned platily?

b) Novostavby však jsou osvobozeny od placení daní, přirážek a dávek nejméně 6 roků. Jak velkou činži třeba vybírati, užijeme-li uspořených daní, přirážek a dávek k mimořádné amortisaci tak, abychom nemuseli činži zvyšovati po šesti letech, až dům přijde do plné daňové povinnosti?

c) Jak velkou třeba vybírati činži, bude-li dům mimořádně osvobozen od daní, přirážek a dávek po prvých 25 roků (zákony o stavebním ruchu)?

Jaký vliv na činži by mělo v případech *a*) až *c*), kdyby daně, přirážky a dávky obnášely pouze 35% hrubé činže?

V. Hruška.

6. Trojúhelník dán dvěma stranami ($a < b$) a úhlem proti kratší z nich ležícím (α); při sestrojení vzniknou dva různé trojúhelníky. Za předpokladu, že plocha jednoho z nich jest n-kráte větší plochy druhého, dokažte nerovnost $\frac{b}{a} < \frac{n+1}{n-1}$.

Prof. *V. Charfreitag.*

7. Plocha dvojstředového čtyřúhelníka dá se vyjádřiti vzorcem

$$P = 4\varrho^2 r \frac{m+n}{mn},$$

jsou-li m, n jeho úhlopříčky, r poloměr kružnice opsané, ϱ vepsané.

Prof. *Karel Koutský.*

8. Před zrcadlící přímkou z dány kružnice k_1, k_2, k_3 a body A_1, A_2, A_3. Je sestrojiti takovou kružnici k, aby chordála $ch_i(k, k_i)$, ($i = 1, 2, 3$) po odrazu na přímce z procházela bodem A_i ($i = 1, 2, 3$).

Karel Lerl.

9. Odvoďte pro obecný trojúhelník vztahy obdobné větám Euklidovým:

$$a^2 = mc + ab \cos\gamma, \quad b^2 = nc + ab \cos\gamma, \quad v^2_c = mn + ab \cos\gamma,$$

kde m, n jsou průměty stran a, b na c.

Týž.

10. Určete geometrické místo středů hyperbol, v něž se rozpadá kissoida příslušná k bodům dané hyperboly jako středům transformace kissoidální.

Dr. *Jan Schuster.*

11. Kterou křivku naplňují vrcholy parabol, které jsou částí rozpadajících se kissoidálních křivek, příslušných k dané rovnoosé hyperbole, když se střed kissoidální transformace na této hyperbole pohybuje?

Týž.

12. Společná tětiva elipsy (hyperboly) a její kružnice křivosti protne přidruženou astroidu

$$x = a \cos^3\varphi,\ y = a \sin^3\varphi \quad (x = a \sec^3\varphi,\ y = b \operatorname{tg}^3\varphi)$$

v bodě patřícím témuž parametru φ. Průsečík dělí tětivu v poměru racionálním a kterém? *Týž.*

13. V bodě elipsy sestrojena společná tětiva s kružnicí křivosti, ve druhém průseku tětivy s elipsou konstrukce opakována a podobně dále. Kdy vytvoří tětivy uzavřený mnohoúhelník? *Týž.*

14. Nalezněte bod elipsy, v němž společná tětiva s kružnicí křivosti je nejdelší, a dále bod, v němž tato tětiva odchýlena od normály sestrojené k elipse o úhel nejmenší. *Týž.*

15. Určete nejdelší a nejkratší tětivu, jejímiž konci určené tečny svírají daný úhel, a naopak extrémní úhel, jejž svírají tečny elipsy v koncích tětivy dané délky sestrojené. *Týž.*

16. Když na přímky svazku, jež spolu svírají dané úhly (k, l), kde k, l jsou pořadové indexy paprsků, spustíme kolmice z pevného bodu, platí pro délky těchto d_k (d_k = kolmice spuštěná na k-tý paprsek)

$$\sum_{k=1}^{k=n} d_k \frac{\sin \frac{1}{2}[(k+1, k)-(k, k-1)]}{\cos \frac{1}{2}(k+1, k) \cos \frac{1}{2}(k, k-1)}=0,$$

a podobně, je-li $n = 2m$ (sudé),

$$\sum_{k=1}^{k=2m}(-1)^k d_k \frac{\sin \frac{1}{2}[(k+1, k)-(k, k-1)]}{\sin \frac{1}{2}(k+1, k) \sin \frac{1}{2}(k, k-1)}=0.$$

Týž.

17. Pro $s_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n^2}$ dokažte nerovnost

$$\tfrac{1}{6}(4n^3 - 3n^2 - n) < s_n < \tfrac{1}{6}(4n^3 + 3n^2 - n).$$

Prof. *Josef Široký.*

18. Sečtěte výraz:

$$V_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{1!\,(n-1)!}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2!\,(n-1)!}\cdot\frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)}.$$

Týž.

19. Dány dvě rovnoběžky P, Q, na P bod A, a mimo ně bod M. Veďte bodem M přímku R, jež protne P v bodě X, Q v bodě Y tak, aby $AX = XY$. Řed. *Alois Zdrahal.*

20. V trojúhelníku ABC dána příčka $AD = h$ půlící úhel α a rozdíly $AB - BD = n$, $AC - CD = m$. Určete strany, úhly a obsah trojúhelníka. *Týž.*

***Poznámka*: K úlohám 10.—14. nalezne řešitel potřebná další poučení ve článcích uveřejněných v X. ročníku těchto Rozhledů na str. 36, 108, 129 a násl.**

Z fysiky.

1. V jednom z obou ramen spojitých nádob, v nichž jest rtuť, je nad hladinou rtuti sloupec vzduchu délky a uzavřen pístem. Jak se změní polohy obou hladin, když se píst pošine o délku y,

a) mají-li obě ramena týž průřez; *b*) jsou-li průřezy o_1, o_2; *c*) mají-li spojité nádoby mimo rameno s pístem *n* ramen o průřezech $o_1, o_2, \ldots, o_n$?

2. Spojité nádoby mají ramena průřezů $o_1, o_2, \ldots, o_n$ uzavřena písty tak, že nad hladinami jsou délky sloupců vzduchu $a_1, \ldots, a_n$ o tlacích $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Když se písty pošinou o délky $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kterými rovnicemi se řídí pošinutí jednotlivých hladin?

3. Určiti zákon průřezu v nádobě, aby při výtoku kapaliny otvorem ve dně klesala horní hladina rovnoměrně.

4. Nádoba průřezu o_1 obsahuje kapalinu do výšky *a*, nad ní uzavřený prostor výšky *b*, kde je tlak *p*. Dole je druhá nádoba průřezu o_2 a výšky *c*, kde je tlak p'. Mezi oběma je ve stěně otvor zásuvkou uzavřitelný. Jak závisí výtoková rychlost na stavu kapalin? Kdy tok přestane?

5. Tenká kruhová trubice poloměru *R* přepažena v jistém místě a naplněna zčásti rtutí na oblouku se středovým úhlem ω. Když je přepážka nejvýše, mají hladiny výšky odpovídající úhlovým vzdálenostem α, β od přepážky. Která rovnice určuje otočení nutné, aby byly hladiny stejně vysoko? Který bude rozdíl hladin při otočení o φ, děje-li se rotace kladně na stranu vyšší hladiny?

6. Homogenní struna délky *l* se má rozděliti pražcem na dva díly s takovými napětími, aby měly dané kmitočty N_1, N_2 při vlnění příčném. Určete takovou polohu pražce, aby po jeho odstranění byl kmitočet celé struny minimální!

7. Nekonečně dobře vodivý kruhový drát nebo vodivá deska s kruhovým otvorem je jedním pólem proudovodu. Druhý pól *P* umístěn ve vzdálenosti *a* od středu kruhu (poloměru *r*). Bodem *P* veden rovný drát, jehož díly vodivostí ϱ_1, ϱ_2 připojeny ke kruhu. Jest určiti směr tohoto proudovodiče, při němž dá soustava odpor největší.

8. Mýdlová bublina poloměru *r* při teplotě *t* nabita elektrickým nábojem *Q* (znenáhla). Jak se změní její velikost? (Číselně: poloměr 3 *cm*, teplota 15°, udělen-li náboj 30 *abs. jednotek*, povrchové napětí mydlin 65 *dyn/cm*.)

9. Svítící bod *A* je v ústředí indexu lomu n_1 pevný a obraz *B* v zastavovací rovině v ústředí indexu lomu n_2 ve vzdálenosti $AB = L$. Ústředí oddělena nekonečně tenkou čočkou lomivosti *n*. Při přesném zobrazení může čočka zaujmouti dvě polohy. Rozhraní se pošine z jedné polohy do druhé o *D*. Které ohniskové dálky f_o, f_p má čočka?

10. Kotouč kruhový složen ze dvou výsečí specifických hmot s_1, s_2. Které musí býti jejich středové úhly ω_1 a ω_2, aby se kotouč kýval kolem svého středu s nejkratší dobou kyvu a jak velkou? Číselně provést pro $s_1 : s_2 = 1 : 2$. *R.*

Z deskriptivní geometrie.

1. Sestrojiti elipsu danou ohniskem F, délkou vedlejší poloosy b a dvěma body M, N. Prof. *Adolf Babuška.*

2. Určiti rotační plochu kuželovou, protínající rovinu ϱ v parabole a procházející dvěma body A, B, dán-li její vrchol V. *Týž.*

3. Rotační plocha válcová dána rovinou tečnou t, dvěma body na povrchu A, B a poloměrem r. Určiti osu plochy. *Týž.*

4. Sestrojiti plochu jednodílného rotačního hyperboloidu, dán-li jeho střed S, jedna povrchová přímka a a jeden bod na ploše A. *Týž.*

5. Rotační kužel sestrojte, jenž má vrchol na dané kouli, podstavu vzdálenou o v od koule, prochází bodem A na obvodu podstavy a dotýká se půdorysny. Prof. *Frant. Müller.*

Vypsání cen za řešení úloh.

Studujícím středních škol, kteří jsou odběrateli „Rozhledů", budou uděleny ceny za správné řešení úloh z matematiky, fysiky a deskriptivní geometrie, a to knihy vydané nákladem Jednoty. Kromě toho z fondu Jaromíra Mareše obdrží letos už po třinácté ceny studující středních škol za nejlepší řešení úloh; při stejné jakosti řešení náleží přednost řešitelům z české reálky a českého gymnasia v Českých Budějovicích a z české reálky v Praze III. Kromě toho obdrží odměnu nejlepší počtář z české školy obecné v Českých Budějovicích v Dlouhé ulici.

Řešení úloh, psané na čtvrtkách po jedné straně, každá úloha na zvláštním listě, buďte zaslána redaktoru do 1. dubna 1932 neodvolatelně. Úprava buď tato: Číslo úlohy, znění její a autor. Řešil p. (jméno, ústav). Řešení. Úplná adresa bytu. Vzory najde čtenář v posledním čísle minulého ročníku. Buď přiložen pro kontrolu seznam řešených úloh s podpisem a adresou. Zásilky nedostatečně frankované se nepřijímají.

Na řešení pozdě došlá není možno bráti zřetel.