Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Kostěnec

Poznámka k pořádání a řešení rovnic

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 1, 16--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121698

Poznámka k pořádání a řešení rovnic.

Pro žáky středních škol napsal

Ant. Kostěnec,
professor v Praze.

Pořádajíce dané rovnice užíváme zásady: Učiníme-li se stejnými výrazy stejné změny, obdržíme též výsledky sobě rovné. Zásada tato rozděluje se pak v podstatě na tolik zásad zvláštních, kolik jest způsobů početních.

Nastává však otázka, zda-li každá takto uspořádaná rovnice jest téhož významu jako rovnice původní čili s touto shodna (équivalente) t. j. má-li tytéž kořeny a týž počet jich jako rovnice daná.

Tuto otázku třeba si vždy náležitě zodpovídati, kdykoli jest nám řešiti uspořádanou rovnici, jinak budeme pokládati za kořeny i takové hodnoty neznámé, které sice vyhovují rovnici odvozené, nikoli ale dané, neb obdržíme po případě kořenů méně než jich býti má.

Přihlédneme-li k pořádání rovnic násobením, tu třeba míti na zřeteli pravidlo, *že rovnici smíme násobiti pouze veličinami od nully a nekonečného se lišícími, chceme-li, by odvozená rovnice s původní shodnou byla.*

Že tomu tak, dokáže se snadno způsobem následujícím:

Budiž dána rovnice

$$A = 0 \tag{1}$$

a jakákoli veličina M, která však nemůže se státi rovnou ani nulle ani nekonečnému, pak má rovnice

$$AM = 0 \tag{2}$$

tytéž kořeny jako rovnice (1), neboť každý kořen rovnice (1) činí $A = 0$, a poněvadž M není nekonečné, jest za týž kořen též $AM = 0$; naopak zase každý kořen rovnice (2) čině součin AM rovným nulle annuluje A, poněvadž M od nully se liší, takže tedy každý kořen rovnice (2) vyhovuje rovnici (1). Z toho jde tedy, že obě rovnice jsou spolu shodné.

Stane-li se však násobitel M nullou, tu sice všecky kořeny rovnice (1) vyhovují rovnici (2), kdežto z kořenů rovnice (2) jen některé rovnici (1) zadost činí, protože součin AM může se státi nullou, když jeden neb druhý činitel jeho nulle rovným se stane. Rovnice (2) rozštěpuje se tedy ve dvě rovnice

$$A = 0,\ M = 0.$$

Jsou-li A i M celistvé funkce neznámé x, možno tedy tvrditi, že rovnice (2) má zároveň kořeny rovnice (1) i rovnice $M = 0$; kdyby však činitel M byl celistvou, A lomenou funkcí veličiny x, tu neplatí vždy pravda právě vyslovená, ježto kořeny rovnice $M = 0$ mohouce učiniti A nekonečným, nemusí nezbytně annulovati též součin AM.*)

Též patrno, že násobitel M musí býti nesoudělný s jmenovateli zlomků rovnice $A = 0$, má-li míti rovnice (2) o kořeny rovnice $M = 0$ více než rovnice původní.

K lepšímu objasnění pravidla uvedeného stůjtež zde příklady tyto:

1. př. Znásobíme-li rovnici

$$A \equiv x^2 - 10x + 21 = 0,$$

kteráž má kořeny 7 a 3, veličinou $M = x$, obdržíme

$$AM \equiv x^3 - 10x^2 + 21x = 0$$

čili

$$x(x-7)(x-3) = 0,$$

kterážto rovnice má, jak viděti, mimo kořeny uvedené i kořen $x = 0$.

2. př. Znásobíme-li rovnici

$$A \equiv x^2 - 2x - 8 = 0,$$

jejíž kořeny jsou 4 a -2, činitelem $M = x - 5$, kterýž za $x = 5$ rovným nulle se stane, bude míti rovnice odvozená

$$AM \equiv x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = 0$$

čili

$$(x-4)(x+2)(x-5) = 0$$

nejen oba řečené kořeny, nýbrž i kořen $x = 5$.

3. př. Rovnici $7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

činitelem $x-1$ znásobivše obdržíme

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

kteréžto rovnici činí zadost kořeny $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, z nichž však toliko první dané rovnici vyhovuje.

Že rovnice odvozená má též kořen $x = 1$, ač se násobitel $x-1$ s jmenovateli obou lomených členů dané rovnice krátí, to má svou příčinu ve zvláštních hodnotách čitatelů těchto lomených

---

*) Srovnej Cours d'algèbre élémentaire par E. Combette. Paris, 1882.

členů, jak snadno jest poznati, jestliže oba lomené členy v jedno sloučíme a pak teprve jmenovatelem $x-1$ násobíme; vyjdeť nám

$$(x^2-1)-7(x-1)=0,$$

kteréžto rovnici vyhovuje patrně kořen $x=1$. Kdybychom však v dané rovnici znaménko jednoho neb druhého členu lomeného proměnili v protivné, neměla by rovnice odvozená více kořene $x=1$.

4. př. Rovnice

$$\frac{1+x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x^2}=\frac{2}{1+x}$$

byvši sproštěna zlomků znásobením nejm. spol. jmenovatelem $(1-x)^2(1+x)$, zní pak

$$5x-1=0$$

a má tedy jediný kořen $x=\frac{1}{5}$ a nikoli i kořeny rovnice

$$(1-x)^2(1+x)=0,$$

protože násobitel tento jest soudělný s jmenovateli členů lomených.

Již z krátkého výkladu tohoto jakož i připojených dvou posledních příkladů jest viděti, že, má-li odvozená rovnice býti shodnou s původní, třeba opatrně užívati pravidla, dle něhož se rovnice sprostí zlomků, znásobí-li se nejm. spol. násobkem jmenovatelů, a to zejmena tehdáž, jsou-li jmenovatelé lomených členů dané rovnice celistvé funkce neznámé x a za stejnou hodnotu její nulle se rovnají.

V případech podobných dlužno si počínati takto: Všecky členy dané rovnice převeďme na jednu stranu a uveďme je pak na nejm. společného jmenovatele, takže rovnice nabude pak tvaru $\frac{A}{B}=0$, kterýž jí možno vždy dáti, ježto A i B za celistvé funkce neznámé x se pokládají; po té zlomek $\frac{A}{B}$, pokud lze, skraťme.

Řešiti rovnici $\frac{A}{B}=0$ jest, nalézti takové hodnoty za x, které zlomek $\frac{A}{B}$ nulle rovným činí. Zlomek však může se státi rovným nulle toliko v těchto případech: *a)* je-li čítatel $=0$, jmenovatel však různým od nully; *b)* je-li jmenovatel nekonečný, čítatel však konečný, a posléze *c)* je-li čítatel i jmenovatel současně roven buď nulle buď nekonečnému a pravá hodnota zlomku $\frac{A}{B}$ nullou.

Jmenovatel B jsa celistvou funkcí veličiny x může se státi nekonečným jen za nekonečné hodnoty neznámé x a rovněž i čítatel a zlomek $\frac{A}{B}$ nabude pak neurčitého tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Tvar tento jest však jen tehdy $=0$, je-li jmenovatel stupně vyššího nežli čítatel, jakož jest tomu na př. ve výraze

$$\frac{x^2+x-1}{3x^3-4x^2+2} \text{ čili } \frac{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}},$$

kterýž za $x=\infty$ blíží se hodnotě $\frac{0}{3}=0$.

Čítatel A bude se rovnati nulle, dosadíme-li do něho kořeny rovnice $A=0$; kořeny této poslední rovnice budou pak současně kořeny rovnice $\frac{A}{B}=0$, jestliže byvše dosazeny do jmenovatele B neučiní ho $=0$ aneb, jestliže v případě opačném hodnota tvaru $\frac{0}{0}$, kterého pak zlomek $\frac{A}{B}$ nabude, nulle rovna jest; nerovná-li se tvar tento nulle, dlužno příslušný kořen zamítnouti.

Neurčitému tvaru $\frac{0}{0}$ se však vyhneme, jestliže zlomek $\frac{A}{B}$ náležitě skrátíme.

Abychom věc objasnili, uvádíme některé příklady:

Př. a. Dejme tomu, že bychom byli danou rovnici $P=0$ uvedli na tvar

$$\frac{(x-2)^2(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)^2(x+2)^2}=0$$

čili skrátivše na dobu

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)^2}=0.$$

Řešíce rovnici $(x-2)(x+1)=0$

dostaneme kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, kteréž oba vyhovují rovnici $P = 0$, poněvadž byvše dosazeny do jmenovatele nečiní jej rovným nulle. Kromě toho má rovnice odvozená i původní kořen $x_3 = \infty$, protože jest jmenovatel odvozené rovnice stupně vyššího než čitatel. Kdybychom však řešili neskrácenou rovnici

$$\frac{(x-2)^2(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)^2(x+2)^2} = 0$$

a tedy vlastně $(x-2)^2(x-3)(x+1) = 0$, kterážto rovnice má kořeny $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 2$, $x_4 = 3$, tu bychom musili si vésti takto:

Kořen $x = -1$ vyhovuje původní rovnici z příčiny již dříve uvedené; kořen $x = 2$ jest pochybný čině jmenovatele rovným nulle, ježto však pravá hodnota zlomku

$$\frac{(x-2)^2(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)^2(x+2)^2}$$

za $x = 2$ nulle se rovná, vyhovuje též tento kořen; kořen $x = 3$ jest patrně též pochybný, poněvadž ale zlomek právě uvedený za $x = 3$ není nullou, nýbrž nekonečně velký, tudíž nevyhovuje kořen tento.

Př. b. Chceme-li dáti rovnici

$$\frac{3+2x}{1+2x} - \frac{5+2x}{7+2x} = 1 - \frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$$

tvar celistvý, jako se to obyčejně stává, znásobíme ji výrazem

$$(1+2x)(7+2x) = 7+16x+4x^2,$$

načež obdržíme

$$(3+2x)(7+2x) - (5+2x)(1+2x) = 7+16x+4x^2 - (4x^2-2),$$

kterážto rovnice není nutně shodnou s rovnicí danou, ježto násobitel $7+16x+4x^2$ neznámou obsahuje; avšak každý kořen rovnice odvozené, který neannuluje násobitele, bude vyhovovati; násobitel $(1+2x)(7+2x)$ může však se státi nullou jen tehdy, je-li x buď $-\frac{1}{2}$ neb $-\frac{7}{2}$. Je-li tedy nalezený kořen rozdílný od těchto dvou čísel, činí zadost rovnici původní. Kořen tento jest $x = \frac{7}{8}$ a tudíž vyhovuje.

Lépe však jest uvésti takovouto rovnici na nullu a na nejm. spol. jmenovatele, jak už bylo pověděno, bychom mohli po případě skrátiti a kromě toho srovnavše stupeň jmenovatele se

stupněm čítatele posouditi, je-li i nekonečné kořenem rovnice. V příkladě tomto sice nelze krátiti, ježto rovnice daná po krátké redukci obdrží tvar

$$\frac{-8x+7}{(1+2x)(7+2x)}=0,$$

za to ale poznáváme, že jí vyhovuje též $x=\infty$, protože jest jmenovatel stupně vyššího než čítatel; že kořen tento dané rovnici vyhovuje, to potvrzuje též zkouška; třeba tu jen danou rovnici uvésti dříve na tvar

$$\frac{\frac{3}{x}+2}{\frac{1}{x}+2}-\frac{\frac{5}{x}+2}{\frac{7}{x}+2}=1-\frac{4-\frac{2}{x^2}}{\frac{7}{x^2}+\frac{16}{x}+4},$$

prve nežli do ní ∞ za x dosadíme; učinivše to dostaneme $1-1=1-1$ čili $0=0$.

Př. c. Rovnici

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=1-\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$$

nemohou vyhověti kořeny $x=-2$ ani $x=-1$, protože první činí nekonečnými členy $\frac{x-2}{x+2}$ a $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$, druhý pak mimo tento poslední člen též $\frac{x-1}{x+1}$ neb, protože oba činí násobitele rovnice t. j. součin $(x+1)(x+2)$ rovným nulle. Bychom pravý kořen rovnice té vypočítali, uveďme, řídíce se návodem dříve podaným, danou rovnici na nullu a zároveň na nejm. spol. jmenovatele, skraťme pak zlomek, jejž takto obdržíme, pokud lze. Učinivše to budeme míti

$$-\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}=0$$

čili

$$\frac{1}{x+1}=0,$$

kteréžto rovnici vyhovuje pouze a jedině kořen $x=\infty$, což také zkouška potvrzuje. V naší Sbírce úloh z algebry (2. vyd. př. 59., p. 86. a 213.) udán jest nesprávný kořen $x=-2$.

Př. d. Znásobíme-li rovnici

$$\frac{1}{x}-\frac{1-x}{x(1+x)}+3=0$$

součinem $x(1+x)$, dostaneme

$$5x+3x^2=0$$

čili

$$x(5+3x)=0,$$

kterážto rovnice má tedy kořeny $x_1=0$, $x_2=-\frac{5}{3}$, z nichž však první dané rovnici nevyhovuje čině násobitele $x(5+3x)$ rovným nulle. Dáme-li však rovnici této dobu

$$\frac{5x+3x^2}{x(1+x)}=0$$

čili

$$\frac{5+3x}{1+x}=0,$$

dostaneme toliko správný kořen $x=-\frac{5}{3}$.

Př. e. V rovnici

$$\frac{x^3-1}{x-1}=0$$

jest kořen $x=1$ vyloučen, ježto činí též jmenovatele rovným nulle, a neurčitý tvar $\frac{0}{0}$, kterého rovnice tato za $x=1$ nabude, není $=0$, nýbrž $=3$, jak se snadno přesvědčíme, jestliže čítatele jmenovatelem rozdělíme a do podílu takto obdrženého 1 za x dosadíme. Zde tedy nezbytno danou rovnici dříve skrátiti a pak teprve řešiti. Též jest patrno, že daná rovnice není stupně 3., nýbrž toliko stupně 2.

Př. f. Skrátivše levou stranu rovnice

$$\frac{x^2(x^3-1)}{x^2+\sqrt{x}}=56$$

jmenovatelem obdržíme

$$x(x^2-\sqrt{x})=56,$$

čili

$$x^3-\sqrt{x^3}-56=0,$$

odkudž plyne, že

$$\sqrt{x^3}=8,\ -7,$$

a tudíž jest

$$x=4,\ 4\,.\,\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

a

$$x=\sqrt[3]{49},\ \sqrt[3]{49}\,.\,\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Rovnice tato má tedy v celku 6 kořenů a nikoli 10, jak jest udáno ve zpomenuté Sbírce úloh z algebry (2. vyd., př. 31.,

p. 141. a 230.), neboť kořeny mimo tyto tam uvedené, totiž $0, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, které obdrženy řešením rovnice

$$x^2 + \sqrt{x} = 0,$$

dané rovnici nevyhovují, jak se jednoduchou zkouškou snadno přesvědčiti můžeme. Pochybeno tu, jak na jevě, proti pravidlu, že nevyhovují všeobecně dané rovnici o členech lomených takové kořeny, které násobitele (nejm. společného jmenovatele) — zde $x^2 + \sqrt{x}$ — annulují.*)

Př. g. Rovnice

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{s_n}{a_1} = 0,$$

kterou se určuje podíl q řady geometrické (1. stupně), jsou-li dány 1. člen a_1, počet členů n a součet jich s_n, udává se též v našich učebnicích mathematických za rovnici stupně $n.$, ač jest toliko stupně $n-1$. Rovnicí stupně n. stane se, znásobíme-li ji činitelem $q-1$, čímž však zavedeme do ní kořen $q=1$, kterýž jí nepřísluší a jenž by jen tehdy měl místa, kdyby všecky členy řady geom. sobě rovny byly. Zkrátivše však 1. člen hořejší rovnice obdržíme

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + \frac{a_1 - s_n}{a_1} = 0,$$

tedy nepopíratelně rovnici pouze stupně $n-1$.**)

Z podobné příčiny nejsou obě rovnice náležející do složeného počtu úrokového, totiž

$$q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = Q_n, \quad \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = U_n,$$

kdež $q = 1 + \frac{p}{100}$, stupně $n+1$, nýbrž toliko stupně n. Z kořene $q=1$, kterého tu, neskrátivše levou stranu rovnice, nabudeme, následovalo by, že procenta $p=0$, což však nemá žádného smyslu.

*) Srovnej *Baltzera* Základy mathematiky, přel. *M. Pokorný*, p. 192.

**) Viz *Heis* „Bemerkungen über die Lehre von den geometrischen Progressionen." Grunert's Archiv VI. Theil, 1845, pag. 104.