Josef Šolín

Kterak strojiti normály ellipsy bodem mimo křivku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 1, 1--7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121697

Kterak strojiti normály ellipsy bodem mimo křivku.

Sestavil

prof. Josef Šolín.

Ellipsa E buď úplně zobrazena; jest nám k ní vésti normály bodem p. Pomysleme si kterékoli dva sdružené průměry M, N ellipsy, pak paprsek M_1, jenžto procházeje bodem p jest pravoúhelný ke průměru N. Paprsky M, M_1 sekou se v bodě m, jehož místem měřickým jest známá hyperbola Apolloniova; ta seče ellipsu E ve čtyřech bodech q_1, q_2, q_3, q_4, kterými procházejí normály žádané. Svazky (M...), (M_1...) jsou zajisté projektivné a vytvořují tedy kuželosečku Φ, jež obsahuje středy obou svazků, t. j. střed o ellipsy E a daný bod p. Kuželosečka tato obsahuje mimo to nekonečně vzdálené body u_∞, v_∞ os A, B ellipsy (čemuž se snadně přesvědčíme zvolíce místo obecné dvojiny M, N sdružených průměrův osy A, B); Φ jest tedy hyperbola, jejíž asymptoty jsou stejnosměrny s osami A, B ellipsy E. Body o, p, u_∞, v_∞ jsou vrcholy úplného čtyřúhelníka vepsaného v hyperbolu; protější strany op a $u_\infty v_\infty$, ou_∞ a pv_∞, ov_∞ a pu_∞ sekou se v bodech t_∞, r_1, r_2 (t_∞ jest nekonečně vzdálený bod průměru op; r_1, r_2 jsou pravoúhelné projekce bodu p v osy A, B); body t_∞, r_1, r_2 jsou vrcholy polového trojúhelníka hyperboly Φ, přímka $r_1 r_2$ tedy polárou bodu t_∞ nebo-li průměrem hyperboly. Bychom odvodili jiný ještě průměr této křivky, sestrojme ještě jeden její bod m; k tomu pak užijme sdružených průměrův A′, B′, které jsou položeny souměrně vzhledem k osám A, B; jsou to úhlopříčny obdélníka, omezeného vrcholovými tečnami ellipsy. Kolmice bodem p ke průměru A′ seče průměr B′ v bodě m hyperboly Φ; užijeme-li pak bodu m s body o, u_∞, v_∞ tak, jako jsme před tím užili bodu p, t. j. promítneme-li bod m pravoúhelně v osy A, B, určují projekce n_1, n_2 průměr $n_1 n_2$ hyperboly Φ; průměry $r_1 r_2$, $n_1 n_2$ protínají se ve středu c této křivky. Středem c a body u_∞, v_∞ procházejí asymptoty hyperboly Φ; asymptotami a bodem o určena jest tato křivka úplně.

Jest-li q jeden ze průsečíků ellipsy E s hyperbolou Φ, jest paprsek pq pravoúhelný ke průměru, sdruženému s průměrem oq, a proto pravoúhelný k tečně ellipsy E v bodě q; pq jest normálou ellipsy E. Jde tedy o průsečíky ellipsy E a hyperboly Φ; hleďme je sestrojiti a nerejsovati při tom hyperboly Φ.*)

---

*) Velmi snadně dospíváme k těmto výsledkům analyticky. Dána-li ellipsa E rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

sluší normále její v bodě (x, y) rovnice

$$a^2y\xi - b^2x\eta = e^2xy, \tag{2}$$

kde $e^2 = a^2 - b^2$. Pokládáme-li ξ, η za souřadnice bodu p, jímžto má procházeti normála, vyplývají souřadnice průsečíku normály s ellipsou z rovnic (1), (2); jestliže pak v rovnici (2) pokládáme x, y za proměnné, jest (2) rovnicí hyperboly Apolloniovy. Hyperbola prochází bodem (0, 0) jakož i bodem (ξ, η); asymptoty její jsou stejnosměrny s osami X, Y nebo-li A, B; střed c má souřadnice

$$x_0 = \frac{a^2}{e^2}\xi, \quad y_0 = -\frac{b^2}{e^2}\eta. \tag{3}$$

Tyto výrazy snadně se strojí. Jest-li e jedno ohnisko, b pak vrchol ellipsy E položený na druhé ose B tak, že konečná úsečka $\overline{be}$ *není* obsažena v tom úhlu os A, B, v němžto jest obsažen bod p, veďme (viz obrazec) $01 \parallel be$, $1g \perp be$; tím dostaneme pravoúhelnou projekci g středu c v osu A. Pak sestrojme $p2 \perp be$, $23 \parallel be$ a dostaneme pravoúhelný průmět 3 středu c ve přímku pr_1 (místo toho můžeme přímo odvoditi pravoúhelnou projekci f středu c v osu B).

Sdružené průměry A′, B′, které jsou položeny souměrně vzhledem k osám A, B, svírají s osou A úhel ε; jest pak

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b}{a}.$$

Uvedeme-li úhel ε v rovnice (3), dostaneme

$$x_0 = \xi\,\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}, \quad y_0 = -\eta\,\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}. \tag{4}$$

Z toho vyplývá jiná konstrukce souřadnic x_0, y_0. Přenesme (viz obrazec) úsečku ξ na průměr A′ tak, že $\overline{o4} = \xi$, veďme $45 \perp$ A, $56 \perp$ B′; úsečka $\overline{o6}$ průměru A′ dává souřadnici x_0. Obdobně přenesme na průměr B′ úsečku $\overline{o4'} = \eta$, veďme $4'5' \perp$ B, $5'6' \perp$ A′ a dostaneme na průměru B′ úsečku $\overline{o6'}$, jež dává souřadnici y_0. Konstrukce takto provedená dává i znaménko souřadnic x_0, y_0; neboť úsečky $\overline{o4}$ a $\overline{o6}$ mají tu vždy směr stejný, úsečky $\overline{o4'}$, $\overline{o6'}$ směr protivný.

Společnými body ellipsy E a hyperboly Φ procházejí nesčíslné kuželosečky; soubor všech jest tak zvaný svazek kuželoseček. Místo hyperboly Apolloniovy lze užiti kterékoli jiné kuželosečky svazku; řešení bylo by nejvýhodnější, kdyby svazek obsahoval *kružnici*.

Nekonečně vzdálená přímka U_∞ roviny obsahuje dva body u'_∞, v'_∞, které jsou spolu sdruženy vzhledem ke všem kuželosečkám svazku; jest to společná dvojina všech involučních řad bodových, v nichžto přímku U_∞ protínají involuční svazky sdružených průměrův jednotlivých kuželoseček svazku. Body u'_∞, v'_∞ promítají se ze středu *každé* kuželosečky dvojinou sdružených průměrův příslušné křivky; znamenáme-li středy jednotlivých kuželoseček svazku písmeny o_1, o_2, ..., jsou $o_1u'_\infty$ a $o_1v'_\infty$, $o_2u'_\infty$ a $o_2v'_\infty$, ... stejnosměrné dvojiny průměrové kuželoseček svazkových.

Obsahuje-li svazek kružnici, jejížto střed buď s, jsou su'_∞, sv'_∞ sdružené průměry kružnice; tu jest nezbytno, by body u'_∞, v'_∞ položeny byly na paprscích *pravoúhelných*; stejnosměrnými dvojinami průměrovými jsou pak *osy* jednotlivých kuželoseček svazku.

Ve svazku (E, Φ, ...) nejsou osy kuželoseček stejnosměrny; stejnosměrné dvojiny průměrové jsou však realné. Patrno zajisté, že body u'_∞, v'_∞, sdružené spolu vzhledem k ellipse E, hyperbole Φ a tedy vzhledem ke všem kuželosečkám svazku, položeny jsou na dotčených svrchu průměrech A′, B′ ellipsy E; neboť tyto průměry, souměrně položené vzhledem k osám A, B, jsou stejnosměrny s dvěma sdruženými průměry pravoúhelné hyperboly Φ, jež má asymptoty stejnosměrné s osami A, B ellipsy E.

Poněvadž průměry A′, B′ jsou kosoúhelny, není kružnice ve svazku (E, Φ, ...); lze však jej přetvořiti po zákonech affinity ve svazek kuželoseček, jenž obsahuje kružnici.

Přetvoříme-li svazek (E, Φ, ...) po zákonech affinity, vznikne z ellipsy E ellipsa E′, z hyperboly Φ hyperbola Φ'; průměry sdružené křivek E, Φ přetvoří se ve sdružené průměry křivek E′, Φ'; ze stejnosměrných dvojin průměrových svazku původního vzejdou stejnosměrné dvojiny svazku přetvořeného.

Aby svazek přetvořený obsahoval kružnici, třeba tedy, by průměry A′, B′ ellipsy E přetvořily se v osy ellipsy E′.

Přetvořením nic bychom nezískali, kdyby nám bylo strojiti ellipsu E′. Lze však přetvořovati tak, aby ellipsa E přetvořila se v sebe samu; k tomu konci třeba jen středu o a koncovým bodům dvou sdružených poloměrů ellipsy E přisouditi střed o a koncové body kterýchkoli jiných poloměrů sdružených téže křivky. Výmince této a zároveň výmince svrchu položené vyhovíme, jestliže, pokládajíce střed o za bod samodružný, přisoudíme koncovým bodům a', b' poloměrů na A′, B′ položených dva rozličným osám A, B náležející vrcholy ellipsy E.

Což učiniti lze způsobem osmerým; čtyři způsoby vedou k affinitě centralné a involuční. Užijme jednoho z těchto způsobů: přisuďme bodům a', b' vrcholy a, b tak, aby $aa' \parallel bb'$; středem affinity jest společný bod paprsků aa', bb', osou affinity pak průměr L ellipsy sdružený s těmito paprsky.

Ellipsa E přetvořuje se takto v sebe samu; hyperbola pravoúhelná Φ přetvoří se v hyperbolu kosoúhelnou Φ', jejížto střed c' odvodíme ze středu c učiníce $cc' \parallel aa'$, $\overline{cc_0} = \overline{c_0c'}$; asymptoty hyperboly Φ' jsou stejnosměrné s průměry A′ B′ (a mohou sestrojiti se také z bodů h, k, v nichž asymptoty hyperboly Φ sekou osu L affinity); asymptotami a bodem o stanovena jest hyperbola Φ' úplně.

Ellipsa E a hyperbola Φ' určují přetvořený svazek kuželoseček; jde pak o to, bychom v něm sestrojili kružnici K. Asymptotu $c'h$ hyperboly Φ' seče svazek (E, Φ', . .) v involuční řadě; jeden samodružný bod u'_∞ této řady jest v nekončené dálce, druhý bod samodružný f' rozpoluje tedy konečné úsečky všech dvojin a proto i úsečku dvojiny stanovené ellipsou E; bod f' jest za tou příčinou na průměru B′ sdruženém s paprskem $c'h$. Bod f' rozpoluje také tetivu kružnice K, obsaženou ve přímce $c'h$; proto jest střed s této kružnice položen na kolmici vztyčené v bodě f' ku přímce $c'h$. Druhá asymptota $c'k$ hyperboly Φ' seče průměr A′ v bodě g', a vztyčíme-li v něm kolmici ku $c'k$, bude pro příčiny obdobné střed s kružnice K položen na této kolmici. Tím stanoven střed s.

Připomenutí. Body f', g', v nichž asymptoty hyperboly Φ' sekou příslušné průměry A′, B′ ellipsy E, odpovídají po zákonech affinity bodům f, g, v nichž asymptoty hyperboly Φ sekou osy A, B, t. j. pravoúhelným průmětům středu c v osy A, B. —

Bychom kružnici K úplně určili, užijme řad involučních, ve kterých svazek (E, Φ',..) seče přímky A′, B′. Poněvadž tyto přímky jsou stejnosměrny s asymptotami hyperboly Φ', jest o středem involuce v obou řadách; ellipsa E pak dává dvojiny $a'a'_1$, $b'b'_1$. Body a', a'_1, b', b'_1 jsou na kružnici středu o; kružnice tato, pak kružnice hledaná K určují svazek kružnic, který seče přímky A′, B′ v týchž involučních řadách, v nichž je seče svazek (E, Φ',..) kuželoseček. (Dvěma dvojinami stanovena jest zajisté involuční řada úplně.) Středová přímka svazku kružnic jest os, společná sečná $a+b+$ jde bodem o pravoúhelně k os.*) Body $a+$, $b+$, v nichžto kružnice $(a'b'a'_1b'_1)$ seče onu společnou sečnou, náležejí tedy hledané kružnici K, ježto středem svým s a jedním z bodů $a+$, $b+$ jest úplně stanovena.

Kružnice K seče ellipsu E ve čtyřech bodech q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 (v obrazci našem jsou jen dva realné); z těch odvodí se pak po zákonech centralné affinity příslušné body q_1, q_2, q_3, q_4, kterými procházejí hledané normály pq_1, pq_2, pq_3, pq_4. —

Tuto dojista výhodnou konstrukci normál možno však učiniti ještě snadnější a rychlejší, pokud se týče stanovení středu s kružnice K. Střed s sestrojen tím, že jsme z daného bodu p odvodili body f, g, z těch pak body f', g'; hleďme obejíti konstrukci těchto bodů a odvoditi z bodu p přímo body α, β os A, B, jimiž procházejí přímky $g's$, $f's$.

Úsečka $\overline{o\alpha}$ vychází zajisté z úměry

$$\frac{\overline{o\alpha}}{\overline{o5}}=\frac{\overline{og'}}{\overline{o6}};$$

leč

$$\overline{o5}=-\xi\cos\varepsilon,$$

$$\frac{\overline{og'}}{\overline{o6}}=\frac{\overline{og'}}{\overline{og}}=\frac{\overline{oa'}}{\overline{oa}}=\frac{\sec\varepsilon}{\sqrt{2}};$$

proto, píšeme-li kratčeji α za $\overline{o\alpha}$,

---

*) Ve trojúhelníku $f'g's$ sekou se kolmice A′, B′, spuštěné s vrcholů g', f' ku protějším stranám, v bodě o; proto jest i $so \perp f'g'$, $a+b+ \parallel f'g'$.

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sqrt{2}},$$

a obdobně bychom dostali

$$\beta = \frac{\eta}{\sqrt{2}},$$

znamená-li β úsečku $\overline{o\beta}$. Zároveň patrno, že $\alpha\beta \parallel op$.

Jest nám tedy strojiti střední úměrnou k úsečkám ξ, $\frac{1}{2}\xi$, pak střední úměrnou k η, $\frac{1}{2}\eta$, neboli přepony dvou pravoúhelných trojúhelníků rovnoramenných, jichž odvěsny jsou jednak $\frac{1}{2}\xi$, jednak $\frac{1}{2}\eta$.

Místo toho můžeme sestrojiti

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{2}} = \sqrt{\frac{\overline{op}^2}{2}},$$

t. j. střední úměrnou k úsečkám $\overline{op}$, $\frac{\overline{op}}{2}$, neboli přeponu pravoúhelného trojúhelníka rovnoramenného, jehož odvěsny se rovnají polovici úsečky $\overline{op}$, z ní pak odvoditi úsečky α, β, jak naznačeno v obrazci, kde

$$\overline{o7} = \overline{78} = \tfrac{1}{2}\overline{op}, \quad \overline{o8} = \overline{o9} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad 9\beta \parallel \mathrm{A}, \quad \beta\alpha \parallel op.$$

Připomenutí. Zvolena-li osa L affinity tak, jak ukazuje obrazec, mají úsečky α, ξ směr protivný, β, η směr stejný. Zvolena-li osa affinity jinak, snadně rozhodneme směr úseček α, β přihlédnouce k tomu, na kterých polovicích průměrů A′, B′ byly by obsaženy body g', f'. Snadně pak odvodíme si tu následující pravidlo: Obsažena-li osa L affinity v tom úhlu A′B′, kterýž obsahuje osu $\left\{\begin{matrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{B}\end{matrix}\right\}$, mají úsečky α, ξ směr $\left\{\begin{matrix}\text{stejný}\\ \text{protivný}\end{matrix}\right\}$, úsečky β, η směr $\left\{\begin{matrix}\text{protivný}\\ \text{stejný}\end{matrix}\right\}$.

Ze všeho vyplývá tato pohodlná konstrukce normál*): Označíce na osách A, B vrcholy a a a_1, b a b_1, veďme průměr A′ stejnosměrný s tetivou ab a vytkněme na něm jeden krajní bod a' tak, aby body a, a' byly položeny na protivných stranách osy B. Na to odvoďme z daného bodu p body α, β

---

*) Pro větší určitosť zvolili jsme tu ze čtyř možných os affinity určitou jedinou osu L.

konstrukcí svrchu vyloženou, šetříce toho, že body p, β jsou na téže straně osy A (body p, α na protivných stranách osy B); paprsky $\alpha s \perp a_1 b$, $\beta s \perp ab$ sekou se ve středě s kružnice K. Na to veďme bodem o kolmici ku přímce so a přenesme na ni $\overline{oa'} = \overline{oa^+}$; čímž sestrojíme bod a^+ kružnice K. Kružnicí K protněme ellipsu E v bodech $q'_1, \ldots$ a veďme jimi — stejnosměrně s paprskem aa' — tetivy $q'_1 q_1, \ldots$ ellipsy E; $pq_1, \ldots$ jsou pak normály žádané.

Historický rozvoj problemu tří těles.

Podává

A. Seydler.

Připomenutí. V ročníku IX. tohoto Časopisu podal jsem Dějiny všeobecné gravitace v řadě článků, jichž poslední jednal o tvaru země, načež měl následovati výklad o problemu tří těles. Z různých příčin nebyl tehdy článek ten podán; co tenkráte zmeškáno, budiž doplněno nyní, při čemž se ovšem obmeziti musím na stručné vytknutí nejdůležitějších stránek, nemá-li se z přítomného článku státi objemná kniha.

Oběžnice, mezi nimiž nejdůležitější pro nás místo zaujímá naše země, pohybují se kolem slunce v ellipsách dle zákonů Keplerových, jež jsou ve své větší složitosti prostým následkem jednoduššího zákona gravitace. Tento zákon Newtonem objevený a odůvodněný, vedl však ihned k nové otázce, jež zdála se, že uvede v pochybnost zákon samý. Je-li gravitace všeobecnou vlastností hmoty, nepřitahuje pouze slunce oběžnice a tyto své družice tak, aby první kolem slunce, druhé kolem oběžnic v elliptických drahách se pohybovaly; nýbrž oběžnice též vzájemně se mezi sebou přitahují a jsou i družicemi přitahovány, zkrátka každé těleso nebeské přitahuje každé jiné těleso, máme složitou osnovu vzájemných působení a přirozeně vzniká otázka: jaký jest skutečný pohyb těles nebeských následkem tohoto rozmanitého působení; může býti vyjádřen zákony Keplerovými, a je-li jimi vyjádřen, není to důkazem, že zákon gravitace jest poblouzněním ducha lidského?