Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 1, 34--40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121694

Úlohy.

Řešení úlohy 22. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Antonín Pleskot,* stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Ztrojmocníme-li stejninu $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, obdržíme

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2x;$$

zmocníme-li onu stejninu pěti, vyjde

$$\cos^{10} x + \sin^{10} x + 5\cos^2 x \sin^2 x (\cos^6 x + \sin^6 x) + 10\cos^4 x \sin^4 x = 1$$

čili

$$k + \tfrac{5}{4}\sin^2 2x\,(1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2x) + \tfrac{5}{8}\sin^4 2x = 1.$$

Spořádáme-li rovnici tuto, bude

$$5\sin^4 2x - 20\sin^2 2x + 16(1-k) = 0,$$

a odtud řešením

$$\sin^2 2x = \frac{10 \pm 2\sqrt{5 + 20k}}{5}.$$

Má-li býti x realné, může míti platnost jen spodní znaménko a mimo to musí býti

$$1 > \sin^2 2x > 0;$$

z toho plyne podmínka

$$\tfrac{1}{16} < k < 1.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Josef Kulhánek* ze VII. tř. realné v Hradci Králové, *Ant. Klír* ze VII. tř. a *Jan Hošek* ze VI. tř. české v. real. šk. v Praze, *Fr. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici a *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze.

Řešení úlohy 23. z roč. XIV.

(Podal p. *Josef Kulhánek,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

a) Podmínku danou lze upraviti takto:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2k\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

čili

$$\sin\alpha + \sin\beta = k(\sin\alpha - \sin\beta);$$

odtud obdržíme

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{k+1}{k-1},$$

a nahradíme-li poměr sinusů poměrem protějších stran, bude

$$\frac{a}{b} = \frac{k+1}{k-1} = \text{const.}$$

Hledané geom. místo jest tedy *kružnice.*

b) Uvedeme-li podmínku druhou na tvar

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2k\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

čili

$$\sin(\alpha+\beta)=k(\sin\alpha+\sin\beta),$$

a užijeme-li věty sinusové, obdržíme — označivše stálou půdici písmenem c —

$$a+b=\frac{c}{k}=\text{const.}$$

Tudíž jest v tomto případě geom. místem *ellipsa.*

c) Zde jest

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=k\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

čili

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=k\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

odtud plyne

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}:\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1-k}{1+k}$$

a tedy dle předešlého

$$a+b=\frac{1+k}{1-k}\cdot c=\text{const.}$$

Jest tedy opět geom. místem *ellipsa.*

d) Podobným způsobem jako v případě *b)* přijdeme k výsledku

$$a-b=\frac{c}{k},$$

značícímu, že žádané geom. místo jest *hyperbola.*

e) Z podmínky dané dostaneme podobným obratem jako v *c)*

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}:\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{k+1}{k-1}$$

a z toho dle předešlého

$$a-b=\frac{k-1}{k+1}\cdot c=\text{const.}$$

I zde jest geom. místem *hyperbola.*

Tutéž úlohu správně řešil p. *Antonín Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 24. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Antonín Klír*, stud. VII. tř. české real. šk. v Praze.)

Dána-li ellipsa rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

jsou stranami opsaného čtverce tečny tvořící s osami úhly $\pm 45^0$. Rovnice jedné z těchto tečen jest

$$x + y = \sqrt{a^2 + b^2},$$

a souřadnice bodu dotyčného jsou

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jest tedy plocha čtverce opsaného

$$P = 2(a^2 + b^2),$$

plocha pak obdélníka majícího vrcholy v bodech, v nichž se strany opsaného čtverce ellipsy dotýkají, jest

$$P_1 = 4x_1y_1 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Vrcholy vepsaného čtverce jsou průsečíky ellipsy s přímkami $y = \pm x$; souřadnice jednoho z nich jsou

$$x_2 = y_2 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

a proto jest plocha vepsaného čtverce

$$P_2 = 4x_2y_2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} = P_1.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Josef Kulhánek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku.

Řešení úlohy 25. z roč. XIV.

Budiž

$$\overline{a_1a_2} = a, \quad \overline{b_1b_2} = b, \quad \overline{c_1c_2} = c;$$

vzdálenosti bodu hledaného d od těchto přímek označme x, y, z.

Dle úlohy má býti

$$ax : by : cz = \alpha : \beta : \gamma.$$

Hledíme-li jen ku dvěma z těchto přímek, na př. a_1a_2, b_1b_2, má bod d vyhověti podmínce

$$x : y = ab : \beta a = \text{const.}$$

Geometrickým místem bodu takového jest dvé přímek procházejících průsečíkem přímek $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ a tvořících s nimi čtveřinu harmonickou; přímky ty — C_1, C_2 — snadně lze sestrojiti. Obdobně dostaneme dvě přímky A_1, A_2 jdoucí průsečíkem přímek $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ jakožto geom. místo bodu, pro který jest

$$y : z = \beta c : \gamma b,$$

pak přímky B_1, B_2 obsahující průsečík přímek $c_1 c_2$, $a_1 a_2$ a body činící zadost podmínce

$$z : x = \gamma a : \alpha c.$$

Těchto 6 přímek A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 protíná se po třech ve čtyřech bodech α_1, α_2, α_3, α_4 a každým z nich jest řešena daná úloha.

Analytické řešení této úlohy podal p. *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 26. z roč. XIV.

Souřadnice vrcholu proti straně P_3 ležícího jsou

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} p_1, & \sin\alpha_1 \\ p_2, & \sin\alpha_2 \end{vmatrix}}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & p_1 \\ \cos\alpha_2, & p_2 \end{vmatrix}}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

vzdálenosť jeho pak od této strany jest

$$v_3 = \frac{p_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + p_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + p_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)};$$

z toho patrno, že výška v_3 a obdobně též ostatní výšky daného trojúhelníka mají racionálné hodnoty. Z rovnic stran lze obsah trojúhelníka známým vzorcem vyjádřiti*); v naší úloze jest

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \sin\alpha_1, & p_1 \\ \cos\alpha_2, & \sin\alpha_2, & p_2 \\ \cos\alpha_3, & \sin\alpha_3, & p_3 \end{vmatrix}}{2\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\sin(\alpha_3 - \alpha_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}$$

a tudíž obsah trojúhelníka racionálný; z racionálnosti obsahu i výšek následuje též racionálnosť stran.

Trojúhelník pak, jehož strany i obsah jsou racionálné, slove racionálným.

Částečné řešení podali pp.: *Ant. Pleskot* ze VII. tř. gym.

---

*) Viz: „Časopis pro pěst. math. a fys.“ Ročník XI. str. 302.

v Chrudimi a *Boh. Mašek* ze VI. tř. gymn. na Novém Městě v Praze.

Řešení úlohy 27. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Boh. Mašek,* stud. VI. tř. g. na N. Městě v Praze.)

Dán-li na parabole $y^2 = 2px$ bod (x, y), má příslušný k němu střed křivosti souřadnice

$$x' = p + 3x, \quad y' = -\frac{2xy}{p};$$

úloha vyžaduje, aby bylo $y'^2 = 2px'$. Vyloučením x', y', y z těchto čtyř rovnic plyne podmínka

$$4x^3 - 3p^2x - p^3 = 0,$$

z které řešením obdržíme

$$x_1 = p, \quad x_{2,3} = -\frac{p}{2}.$$

Jsou tedy na parabole 4 body žádané vlastnosti; 2 z nich jsou realné, 2 imaginarné. Poloměr křivosti v bodech realných jest pak

$$r_1 = 3p\sqrt{3}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Antonín Klír* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Josef Kulhánek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové a *Antonín Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 28. z roč. XIV.

(Zaslal p. *J. Jiřík,* stud. g. v Č. Budějovicích.)

Označíme-li stranu daného trojúhelníka písmenem s, můžeme jej umístiti v pravoúhlé soustavě tak, aby vrcholy jeho byly

$$a\left(-\frac{s}{4}\sqrt{3},\ 0\right); \quad b\left(\frac{s}{4}\sqrt{3},\ \frac{s}{2}\right); \quad c\left(\frac{s}{4}\sqrt{3},\ -\frac{s}{2}\right).$$

Parabola dotýkající se stran ab, ac v bodech b, c má pak rovnici

$$y^2 = \frac{s\sqrt{3}}{3}\,x.$$

Protíná-li osa Y strany tyto v bodech d, e, stanoví přímky cd, be — výšky to daného trojúhelníka — v parabole body f, g. Plocha P, o níž jednáme, skládá se z rovnostranného trojúhelníka T nad stranou fg sestrojeného a ze tří úsečí parabolických

U shodných s tou, kterou tětiva fg v hořejší parabole odtíná. Snadným výpočtem najdeme souřadnice bodu $f\left(\frac{s}{36}\sqrt{3}, \frac{s}{6}\right)$; jest tedy

$$T = \frac{s^2}{36}\sqrt{3}, \quad U = \frac{s^2}{162}\sqrt{3},$$

pročež

$$P = T + 3U = \tfrac{5}{108}s^2\sqrt{3}.$$

Jelikož však jest plocha daného trojúhelníka $P' = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$, bude

$$P : P' = 5 : 27.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici, *Josef Kulhánek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Klír* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze a *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 29. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Antonín Pleskot*, stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Souřadnice libovolného bodu ellipsy lze vyjádřiti takto:

$$x_1 = a\cos\omega, \quad y_1 = b\sin\omega;$$

bod tento leží na určitém průměru, jehož sdružený prochází bodem

$$x_2 = -a\sin\omega, \quad y_2 = b\cos\omega.$$

Jelikož jest poloměr křivosti ellipsy

$$r = \frac{1}{ab}\sqrt{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^3},$$

bude

$$r_1 = \frac{a^2}{b}\sqrt{(1 - \varepsilon^2\cos^2\omega)^3}, \quad r_2 = \frac{a^2}{b}\sqrt{(1 - \varepsilon^2\sin^2\omega)^3};$$

vyjádříme-li odtud $\cos^2\omega$ i $\sin^2\omega$ a užijeme-li vzorce

$$\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1,$$

obdržíme

$$r_1^{\frac{2}{3}} + r_2^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)\, a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}.$$

Výraz tento má hodnotu stálou, nezávislou na pomocném úhlu ω.

Tutéž úlohu správně řešil p. *Antonín Klír* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze.

Úloha 1.

Budiž ustanoven součet všech celistvých členů řady, jejíž součet n členů jest $s_n = (3^n - 2^n) : 2^{n-8}$. Prof. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Řešiti trojúhelník, dán-li obsah jeho $\Delta = 210\, dm^2$ a dva úhly podmínkami $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{3}{7}$. *Týž.*

Úloha 3.

Povrch kolmého jehlanu o čtvercové základně jest

$P = 360\, dm^2$,

obsah jehlanu jest $O = 400\, dm^3$;

jest stanoviti jeho rozměry a poloměr vepsané koule. *Týž.*

Úloha 4.

Utneme-li od čtyrbokého jehlanu o pobočných stěnách A, B, C a D rovinou ku podstavě nakloněnou čtyrboký jehlan o témž vrcholu a pobočných stěnách potažně a, b, a c, jak velká bude čtvrtá jeho pobočná stěna d?

Prof. *Vavřinec Jelínek.*

Úloha 5.

Do parabolické úseče souměrné k ose vepsati jest kružnici která se paraboly ve dvou bodech dotýká. Prof. *A. Strnad.*

Úloha 6.

Dvěma body danými na ploše kužele kruhového stanoviti jest rovinu, protínající plochu kuželovou v parabole. *Týž.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Program c. k. středních škol v Přerově, vydaný na konci školního roku 1885, přináší článek: