Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Koláček

O křemenových klínech s osou souběžné broušených. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 225--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121691

O křemenových klínech s osou souběžně broušených.*)

Sepsal

prof. Dr. **Fr. Koláček** v Brně.

(Dokončení.)

Tato methoda již z té příčiny se odporučuje, že nevyžaduje počítání.

Známá-li takto poloha os, možno excentricitu ellipsy velmi jednoduše vypočísti, když se klíny do jedné osy elliptické položí a úhel χ změří. Vycházíť z vzorce (5) praktická formulka

$$tg\,\chi = \pm\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}, \text{ položí-li se } \varphi = 0.$$

Budiž nyní obrácen zřetel na jednotlivé druhy polarisace. Ve světle cirkularném, kdež $a = b$, $R = R_1$ jest

$$tg\,\chi = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} = tg \pm 45^0$$

Polohy $\pm\chi$ svírají vždy úhel 90^0 mezi sebou, ať klíny jakkoliv leží. Snadně odtud vyvozeno bude pravidlo, kterým cirkularní polarisaci poznati možno.

K světlu linearně polarisovanému, kdež $b = 0$, náleží

$$tg\,\chi = \pm\, tg\,\varphi \ldots (7).$$

Místa klínů, ve kterých se interference jeví, obsažena jsou v rovnici

$$\frac{0\,.\,b}{RR_1} = \pm\, sin\,\frac{2\pi}{\tau}\,(D-d)\left(\frac{1}{v_e}-\frac{1}{v_0}\right), \text{ vzniklé z rovnice (3).}$$

Položí-li se v rovnici (3) mimo to $\varphi = 0$ aneb 90^0 do výrazů R a R_1, shledá se z poslední rovnice, že místa řečená splňovati budou rovnici neurčitou

$$\frac{0}{0} = \pm\, sin\,\frac{2\pi}{\tau}\,(D-d)\left(\frac{1}{v_e}-\frac{1}{v_0}\right) \ldots . (8)$$

Význam rovnic . . (7) a . . (8) jest: Ve světle linearně polarisovaném musí hlavní řez nikolu kolmo státi na směru $+\varphi$, aneb $-\varphi$, kdež φ azimut světla dopadajícího znamená. V témže světle naleznou se dvě polohy klínů, které pruhů interferenčních nedávají, budiž Nikol jakkoliv situován. Osa klínu jednoho aneb druhého udává polarisační rovinu.

Výsledek poslední vychází z neurčitosti rovnice $\frac{0}{0}$. Snadná rozvaha fysikalní stvrdí tento výsledek.*) Schází příčina interference, jež vždy záleží v rozstupu a sloučení rozstoupivších se se komposant po proměnách, jichž se různě oběma složkám dostalo. Neboť kmitá-li éther ve směru osy $O\xi$ aneb $O\eta$, nenastane rozklad kmitů ve složky, jež jsouce v klínech různě zpozděny, vystupujíce interferují.

Spůsob tento, určiti přítomnost světla linearně polarisovaného, jest nad míru zevrubný, neboť vymizení pruhů dá se s velikou jistotou usouditi, kteráž daleko onu předčí, s kterouž intensitu úplně nulle rovnou od téměř nulle rovné rozeznáváme, používajíce hranolu Nikolova.

Podrobný popis výjevu, kterýž klíny skytají, snadným se stává, známo-li již ε a φ. Třeba se jen vrátiti ke vzorci (3), jenž polohu pruhů udává

$$\frac{ba}{RR_1} = \sin\frac{2\pi}{\tau}(D-d)\left(\frac{1}{v_e}-\frac{1}{v_0}\right):(-1)^{n+1}$$

Veličina $\frac{ba}{RR_1}$ přejde snadnou proměnou ve výraz jednodušší, totiž

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\;\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}.$$

Nápodobně přemění se výraz

$$\left(\frac{1}{v_e}-\frac{1}{v_0}\right).\frac{1}{\tau}$$

ve výraz $\frac{1}{\lambda}(N_e - N_0)$, ve kterém λ délku vlny, N_e a N_0 indexy lomu barvy téže znamenají.

Vzorec ... (3) má pak podobu následující:

*) *Poznámka.* Druhá věta vychází také z vzorce pro J v poznámce první, kdež, položíme-li $\varphi = 0$, 90^0, J nutně kladným, tudíž od nully rozdílným se stává. Nelze tedy nalézti polohu Nikolu, v kteréž se pruhy jeví.

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}\ \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} = (-1)^{n+1}$$
$$\times \sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-d)(N_e-N_0).$$

Ve světle linearně polarisovaném objeví se tudíž pruhy v místech vyjádřených rovnicí $0 = \sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-d)(N_e-N_0)$.

Kořeny této rovnice jsou

$$D-d=0,$$

$$\pm 2.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)},\ \pm 4.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)},\ \pm 6.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0}\dots \quad (\alpha)$$

....

$$\pm 1.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)},\ \pm 3.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)},\ \pm 5.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)}\dots \quad (\beta)$$

Světlo prošlé místy, udanými řadou... (α) má azimut tentýž jako světlo dopadající, t. j. φ, kdežto místům v řadě.. (β) azimut $-\varphi$ odpovídá. Nařídí-li se tedy hlavní řez analyseurův kolmo na azimut světla dopadajícího, objeví se tmavé pruhy v místech... (α). Ve světle různorodém bude patrně místo $D-d=0$ úplně černé, jelikož paprsky všech barev v něm mají své minimum $=0$. Ve světle bílém, jakž jej jasný oblak dává, uzříti možná nad míru jemnou, leskle černou čáru, v místech kde klíny svými stejnými tloušťkami se pokrývají.

Vedlejší pruhy

$$D-d=\pm 2.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)}$$

jsou již sbarveny. — Vymizíť, středu nejblíž, napřed světlo, pro kteréž

$$\frac{\lambda}{N_e-N_0}$$

má hodnotu nejmenší, tedy světlo nejlomivější, pak světlo méně lomivé. V místech

$$\pm 4.\frac{\lambda}{2(N_e-N_0)}$$

jest druhé podobné, v barvách však živější spektrum. Čím však dál od středu $D-d$ jdeme, tím mdlejšími se stávají barvy a výjev se stává neurčitým, až vymizí zdánlivě, jako u každé jiné interference. V takovýchto místech, kterými zdánlivě jen bílé světlo prochází, panuje ještě interference úplná. Projde-li totiž světlo takové, než do analyseuru vedeno bylo, hranolem, obdrží se spektrum, proryté tmavými čarami. Tyto dle Müllera nazvané pruhy možno velmi krásně pozorovati, vloží-li se na vidmojevu do roury kollimatorové a dalekohledové po Nikolu, skřižují-li se tyto Nikoly, a upevní-li se na objektivu kollimatoru klíny tak, že světlo místem již nesbarveným prochází. Z příčin pochopitelných bude výjev nejčistější, kdy osa klínů s Nikoly úhel 45^0 svírá.

Uvede-li se analyseur kolmo na polohu $-\varphi$, nastanou pruhy na místech řady (β). Střed jest bílý, nesbarvený; o ostatních pruzích platí, co nahoře řečeno bylo.

Ve světle cirkularném přísluší tmavé pruhy místům

$$1 = \sin \frac{2\pi}{\tau}(D-d).(N_e-N_0).(-1)^{n+1}$$

K sudým n, t. j. ku kladným χ náleží pak rovnice

$$-1 = \sin \frac{2\pi}{\tau}(D-d)(N_e-N_0),$$

jejížto kořeny jsou

$$D-d = -\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};\ -5.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};\ -9.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)}\ldots$$

$$+3\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};\ +7.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)},\ldots$$

K lichým n nebo k zápornému χ patří pruhy tmavé v místech;

$$d-D = -\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};\ -5.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};\ -9.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)};$$

$$+3.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)},\ +7.\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)}.$$

Pruh nejvnitřnější bude v obou případech $\pm\chi$ od místa $D-d$ na levo neb na pravo vzdálen o $\frac{\lambda}{4(N_e-N_0)}$, veličinu to dosti nepatrnou a pro všechny téměř barvy stejnou. Obnášíť rozdíl této veličiny pro světlo B a G v označení Frauenhoferském:

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda}{N_e-N_0}\right)_G - \left(\frac{\lambda}{N_e-N_0}\right)_B\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{0.000687}{0.00943} - \frac{0.000428}{0.00903}\right]^{mm} = 0.0063^{mm}.$$

Protož se u klínů, ne přes příliš ploských, objeví pruh na místě tomto skoro úplně černý, jelikož se v něm minima všech téměř barev kryjí.

Pruhy ostatní budou sbarveny, a pořádek barev tentýž jako u světla linearného.

V světle elipticky polarisovaném nalezti možno pruhy z rovnice všeobecné. Výjev je podobný. V případech $\varphi = 45^0$ anebo $\varphi = 0$ jest diskusse snadná.

Detail výjevu samého probrán na tomto místě, jelikož z něho nalezti možno třetí konstantu světla elipticky polarisovaného. Jest to směr, kterým molekul étherový v ellipse neb kruhu obíhá.

Předpokládá-li se pohyb eliptický za složený z komposant $\alpha = a \sin \frac{2\pi}{\tau} t$, $\beta = b \cos \frac{2\pi}{\tau} t$, děje se obíhání osy β k ose α, prvním kvadrantem. Neboť rostoucímu času odpovídá mizící β a vzrůstající α. Kdyby se však a nebo b záporným stalo, obrátí se směr pohybu toho, aniž by ellipsa se proměnila. Avšak i ve výjevu změna nastane. Neboť výraz $\frac{ab}{RR_1}$, ve kterémž R a R_1 veličiny absolutné znamenají, přejde v rovně veliký, záporný. Výjev, který kladnému χ náležel, náležeti bude χ zápornému a naopak. Výjev sám zajisté nejurčitěji karakterisován jest polohou nadzmíněného pruhu černého. Naskytuje-li se tento na místech, ve kterých $d > D$, bude rotace étherového molekulu protivna směru rafij hodinových, kdežto s ním se shodovati bude, platí-li pro onen pruh relace $D > d$.

Doložiti třeba, že kladný směr osy zmíněné rotace jde od klínů k nikolu.

Praktickému upotřebení této vlastnosti pruhu černého nic v cestu se nestaví.

Viděti téměř, jak pruh ten ze strany jedné na stranu druhou přechází, jest-li se nikol z polohy $+\chi$ do polohy $-\chi$ pohybuje.

Zbývá ještě doložiti, jakým způsobem možno bude poznati polarisaci částečnou. Světlo částečné dá se považovati za směs přirozeného a polarisovaného světla. Prvé nemění svou povahu, klíny prostupujíc, kdežto polarisovaná část pruhům vznikati dává. Tyto nemohou tedy nikdy úplně jasné býti. Neboť místy, která úplně tmavá býti mají, prochází vždy také světlo přirozené, seslabujíc určitost interference. Z větší nebo menší určitosti pruhů souditi se bude na větší nebo menší množství světla polarisovaného v směsi dané.

Tak na př. jsou pruhy ty, pozorovány jsouce ve světle, kteréž Nikolem prošlo, určité, barev živých, kdežto ve světle, jež stůl, papír odráží, jen neurčitě stíny se ukazují.

Chceme-li dále určiti kvalitu světla, kteréž jsme částečně polarisovaným shledali, říditi se budeme týmiž pravidly, jaké vysloveny byly u polarisace úplné.

Připojeny jsou zde dvě analytické tabulky k rozlišení druhů polarisačních pomocí klínů křemenových a slídové čtvrtvlnové desky, ku kterýmž dokladu širšího netřeba připojiti.

Porovnáme-li tabulku *B* (prof. E. Machem danou) s tabulkou *A*, nalezneme vesměs, že intensitě nulle rovné v jedné poloze slídové desky odpovídá úplná určitost a jasnost pruhů, kdežto pouhému minimum svědčí pruhy mdlé a neurčité.

Citlivost křemenových klínů pro světlo polarisované jest veliká. I slabě polarisované světlo prozrazuje se v přítomné interferenci. Klíny děkují citlivost svou této interferenci, výjevu samostatnému, a sdílí ji se všemi polariskopy, ve kterýchž podobný nový výjev se naskytuje. Přibere-li se na př. Nikolu na pomoc jen lístek sádrový, aneb křemen k ose kolmý, zjistí se soud o přítomnosti světla polarisovaného nemálo. Samo sebou se rozumí, že v těch případech, ve kterých se přítomnost polarisace Nikolem jistě usouditi nedá, slídová deska $\frac{\lambda}{4}$ k rozlišení kvality upotřebena býti nemůže.

Nikol		
jeví v jedné poloze intensitu rovnou nulle:	nejeví v žádné poloze intensitu nulle rovnou	
	1) minimum intensity	2) intensitu stálou
I) Světlo linearně polarisované.	A) Pomocí klínů křemenových.	
	a) Pruhy úplně určité, jasné: Světlo elipticky polarisované. b) Pruhy mdlejší: Světlo částečně elipticky polarisované. c) Pruhy mdlé: V jedné poloze klínů nepovstanou pruhy v nižádné poloze hranolu Nikolova: Světlo částečně linearně polarisované.	d) Pruhy jasné, úhel 2χ v každé poloze klínů $= 90^{0}$. Světlo cirkularně polarisované. e) Pruhy mdlé, a totéž o 2χ. Světlo částečně cirkularně polarisované.
	B) Pomocí desky slídové $\frac{\lambda}{4}$.	
	ad a) V jedné poloze desky $\frac{\lambda}{4}$ intensita nulle rovná. ad b) V žádné poloze intensita nulle rovná, avšak minimum	ad c) V jedné poloze desky $\frac{\lambda}{4}$ intensita stálá. ad d) V jedné poloze intensita rovná nulle. ad e) V žádné poloze intensita nulle rovná, avšak minimum.

Když jest světlo velmi silně polarisováno, tak že je ledva od úplně polarisovaného rozeznáváme, — druh jest lhostejný — zdají se klíny ustupovati desce slídové, která vyžaduje jen minimum intensity, nikoliv intensitu nulle rovnou, takto chtíc rozeznávati částečnou i úplnou polarisaci. A však snadno se pozná, že soud o intensitě úplně nulle rovné a málo od ní rozdílné neméně nesnadným jest než onen o úplné určitosti. Avšak i pruhy interferenční obsahují v jedné z markantních poloh klínových, (ve kterých se $2\chi = 90$) pruh úplně černý, jenž jest na těchže místech, na kterých klíny jsou deskou $\frac{\lambda}{4}$.

Otázka, jak větší nebo menší určitost pruhů rozeznati, podřízena jest jiné, širší: „V jakém poměru jest světlo polarisované s přirozeným smíšeno?" K této otázce odpovídá fotometrie. Považujeme-li totiž světlo přirozené za světlo, jehož azimuty a fáse v prostoru i času napořád se mění, shledáme, že ve své intensitě nikterak seslabeno býti nemůže interferováním se světlem polarisovaným, kteréž mu přidělíme. Touto větou jest řešení otázky uvedené naznačeno. Mějme na př. světlo částečně linearně polarisované,*) a vyhledejme Nikolem polohu maxima a minima intensity, a oceňme, oč první převyšuje druhé v procentech maxima.

Praktickému provedení operace této staví se mimo jiné překážky hlavně v cestu, že intensity, které se porovnati měly, nejsou prostorně vedle sebe. Této vadě dá se odpomoci, rozdělí-li se Nikol na dvě části, jež se sbrousí a tak na sebe přilepí, že hlavní řezy obou částí úhel svírají.

Zdá se mi, že tímto spůsobem intensity maxima a minima pomocí Wildova fotometru polarisačního velmi dobře by porovnávati se daly. Zastupujíť polovice dvojnikolu dvě plochy, různě osvětlené. Nemám Wildova fotometru po ruce, protož jsem se sám přesvědčiti nemohl, jakých výhod by použití tohoto stroje v případě daném poskytovalo.

Podnikl jsem několik pokusů na Nörrembergově stroji, z kterýchž podrobné stvrzení výsledků theoreticky nalezených plyne.

Analyseurem byl Nikol, jenž především tak situován býti musil, aby hlavní řez jeho na polarisační rovině světla zrcadlem odraženého kolmo stál. Nedostačí nikterak, má-li se Nikol správně naříditi pouhým vymizením světla, od zrcadla odraženého. Chyby o jeden, dva i více stupňů jsou dosti snadno možné. Použito k tomu účelu Senarmontova polariskopu křemenového, při čemž Nikol byl tak dlouho točen, až pruhy stejně barvené se setkaly.

*) Částečně elliptické by se musilo slídovou deskou napřed proměniti v částečně linearní.

Světla ellipticky polarisovaného docíleno slídovou deskou $\frac{\lambda}{4}$, jejížto konstanty následovně určeny jsou.

Napřed položena slídová deska na stolek Nörrenbergova přístroje, a na ni klíny. Vzájemná poloha těchto i ona, jež k azimutu světla zrcadlem polarisovaného hledí, tak dlouho se měnila, až se na klínech v žádné poloze nikolu pruhy nejevily. Tím nabyta vědomost o osách pružnosti v desce slídové. Klíny (osy jejich) je bezprostředně na slídové desce naznačovaly.

Po zaznamenání těchto poloh na desce samé položena tato na negativní krystal jednoosý, při čemž použito světla konvergentního a Airyho okůlaru. Ze známého výjevu určeno pak, který z oněch dvou známých směrů optické osy slídy obsahuje.

Elliptické světlo jakékoliv povstane pak, položí-li se slídová deska do procházejících paprsků linearně polarisovaných a excentricita, jakož i poloha ellipsy určí se velmi snadno, když se klíny položí podél jedné neb druhé z čar osových, na desce poznamenaných. Třeba jen určiti jednu polohu nikolu, ve které pruhy právě vymizí. Hlavní řez Nikolu označuje na dělení kruhovém velmi zevrubně polohy hlavních os světla ellipticky polarisovaného. Snadno se k tomu nalezne směr pohybu v elipse i její excentricita. Na to odkloněny klíny v úhel φ a ze známé již excentricity ε vypočten úhel χ, o který se třeba na levo neb na pravo s Nikolem vzdáliti, aby interference největší určitosti nabyla.

Výpočtěné

$$\chi \left(\text{ze vzorce } tg\,\chi = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}\right)$$

porovnáváno s χ pozorovaným, a nalezeno s ním v takovém souhlasu, jaký dovolen jest obtíží při zjišťování nejurčitější interference.

Arciť bylo zapotřebí všechno vedlejší světlo odstraniti a výjev s velikou pozorností stopovati, až se nejurčitějším stal. Při tom hleděno na střední tmavý pruh a pak na okraj, již jen slabě sbarvený. Takto se dalo χ až na 1^0 ustanoviti. Rozumí se samo sebou, že upotřebením světla úplně rovnoběžného i dalekohledu, jenž se na výjev nařídíti dá, citlivost přístroje zvýšena býti může.

Mělo-li světlo, jehož polarisace se skoumati měla, jen částečně polarisovaným býti, uvedeno zrcadlo do polohy, jež se více méně od polarisačního úhlu odkloňovala. — Takto docíleno částečné polarisace linearné, jež se pomocí slídové desky vhodně proměniti mohla na eliptickou a kruhovitou. Klíny křemenové jsou i bez vší úpravy přístrojem dosti pohodlným, pokud se jedná o určení kvality světla. Jak daleko daná methoda k zevrubnému měření upotřebena býti mohla, vysvítá z následující úvahy:

Jedná-li se o určení rozdílu měn dvou paprsků kolmo k sobě polarisovaných, může se pomocí šroubu mikrometrického na kompensatoru Babinetově taková tloušťka vřaditi, že kompensuje i rozdíl, jenž $\frac{1}{1886}$ délky vlny obnáší. Taková citlivost jest proto možná, poněvadž šroub vsouvání i $\frac{1}{1886}$ délky vlny ještě dovoluje. Zdali však oko změnu v intensitě vsouvnutím $\frac{1}{1886}$ délky vlnkové skutečně pozoruje, řečeno není. Předpokládáme-li, že by oko i sebe nepatrnou změnu intensity pozorovati dovedlo, nalezneme, že žádá citlivost $\frac{1}{1886}$ d. v., aby dělení kruhové udávalo ještě zevrubně asi 6 minut při použití methody úhloměrné, což zajisté požadavkem velikým není.

Podotýkám ku konci, že klíny mohou i jiným účelům sloužiti.

O pruzích Müllerových bylo již mluveno.

Položí-li se klíny v druhé poloze tak na sebe, že optické osy na sobě ještě kolmy jsou, obdrží se v rovnoběžném pol. světle plocha skoro stejně sbarvená, kteráž svou barvu jak posouváním klínů na sobě, tak pohybem analyseuru mění. Klíny musí býti arci dosti ploché. V světle konvergentním ukazují se pak známé hyperboly v barvách krásných. Klíny tedy dovedou zastoupiti dvě rovnoběžné k ose řezané desky křemenové v malé differenci tlouštěk.

K měření délek vln světla monochromatického jich možno užiti s výhodou dosti velikou. Osvětlíme-li na př. přístroj Nörrembergův světlem sodíkovým, objeví se již v jednom klínu množství černých čar, které sčítati dlužno. Počet jich k, udává, že veličina $\frac{\lambda}{N_e - N_0}$ jest k krát obsažena v differenci tloušťěk na obou koncích klínových.

Tato difference se dá sférometrem změniti a poskytuje pak hodnotu pro λ, již jsem měřením ne přes příliš opatrným až na 1.5% nalezl v souhlasu s výsledky jiných. (Hlavní váha spočívá na čísle k).

I k měření úhlu, o který se pol. rovina v křemenu neb cukru stočí, dá se klínů velmi dobře upotřebiti. Užil jsem světla sodíkového, a položil jsem klíny tak, že v nižádné poloze Nikolu pruhy pozorovati se nedaly. Na to jsem podložil desku křemenovou, a vytočil klíny tak dalece, až totéž nastalo. Odstraniv pak desku, aniž bych byl polohu klínů změnil, nalezl jsem novou polohu klínů na hořejším dělení kruhovém dle návodu často již jmenovaného.

O trojúhelnících racionálních.

Napsal

Augustin Pánek.

Schumacher a *Gauss* pojednávají ve dvou dopisech svých o úloze z *analytiky neurčité*, totiž:

„Má se ustanoviti rovinný trojúhelník kosoúhelný, jehož strany a ploský obsah vyjádřeny jsou čísly racionálními.“ [1])

Při všech řešeních úlohy této, která byla podána v *Grunertově* žurnálu svaz. 45., pag. 220., roku 1866 od professorů: *Rosenberga* (Halle a. d. S.), *Gretschela* (Leipzig), *Lehra* (Königs-

[1]) Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schumacher.* Herausgegeben von *C. A. F. Peters.* V. Band. Altona, 1863. Seite 375. — *Schumacher-ův* dopis *Gaussovi* jest datován 17. října 1847, *Altona,* a *Gaussův Schumacher-ovi* v témž roce 21. října, *Göttingen.*

Srovnej „Časopis pro pěstování mathem. a fysiky r. VI. p. 200, *Gaussiana od* dr. *Studničky.* — Tytéž dva dopisy uvedeny jsou také v *Grunert's* Archiv der Mathem. u. Physik. 44. Theil 1865. pag. 504.

Jak ale vlastně tento úkol *zněl* a jak jest v dotčeném psaní *Gaussem všeobecně* řešen, o tom viz v zmíněných *Gaussianech,* kdež i několik jiných zajímavých problémů *Gaussem* řešených se uvádí.