Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O mathematické a morální nadějí. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 218--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121689

„Ještо nelze děti o *dobrém přesvědčiti*, třeba je k *tomu vésti a navykati.*"

„Nemám rád lidí, kteří své dobré skutky *váží.*"

„Velmi málo jest těch na světě, kteří po smrti zůstavují po sobě *stopy, že zde byli.*"

Zajisté, že mi nikdo nebude vytýkati smělost, dím-li, že *Malus*, jehož jmeno s polarisací světla na věky zůstane sloučeno, mezi skrovný počet těchto vyvolencův náleží!

O mathematické a morální naději.

Sepsal

Augustin Pánek.

(Dokončení I. části.)

§. 4.

Porovnáme nyní hodnotu mathematické naděje, s kterou zisk neb ztráta souvisí, s majetkem osoby, kteráž chce se na podniku súčastniti, na jehož výsledku závisí zisk neb ztráta určité sumy.

Je-li majetek jisté osoby J, očekávaná výhra v, sázka čili možná ztráta s, pravděpodobnost výhry p a ztráty $1 - p = q$, pak má ona osoba před provedením hry, když sázku zapraví, majetek $J - s$.

Uskuteční-li se tato hra nebo podnik, jest majetek osoby

$$J - s + v = J + V,$$

protož hodnota očekávání

$$N_1 = p(J - s + v) = p(J + V); \qquad (1)$$

nezdaří-li se hra, jest hodnota očekávání

$$N_2 = q(J - s). \qquad (2)$$

Jeden z těchto případů nastane a proto jest hledaná naděje

$$N = N_1 + N_2 = p(J - s + v) + q(J - s) = J - s + pv, \qquad (3)$$

poněvadž

$$p + q = 1.$$

A poněvadž dle vzorce (2) §. 1., $s = pv$, jest zřejmo, že jmění téže osoby se nezmění, t. j. *hodnota naděje mathematické nemá dle výminek svrchu uvedených žádného vlivu na jmění osoby, a tedy nelze z ní poznati ani výhody ani škody.*

Ale poněvadž obyčejně kýžená výhra zmenšena bývá podnikatelem neb společností aneb státem o určitou srážku, takže tedy $pv < s$, proto jest každý podnik za těchto podmínek předsevzatý škodným jmění osoby, a tudíž každý uvádí takto své jmění v nebezpečí poškození. Je-li však $pv > s$, může se takový podnik nazvati výhodným.

Tytéž výsledky obdržíme, když sázku zapravíme teprv po hře.

V případě výhry jest majetek osoby $J + V$ a hodnota očekávání

$$N_1 = p(J + V), \tag{4}$$

a v případě prohry jest majetek téže osoby $J - s$ a očekávání

$$N_2 = q(J - s)., \tag{5}$$

tedy naděje mathematická

$$N = N_1 + N_2 = J + pV - qs. \tag{6}$$

Tato rovnice vyjadřuje opět větu naznačenou vzorcem (3), neboť nejeví se i zde žádná změna v jmění osoby, přihlížíme-li k rovnici (10) §. 3., $pV = qs$.

Jaký poměr se jeví mezi mathematickou nadějí a sumou, kterouž chceme na podnik věnovati?

Jistá osoba súčastní se při podniku sumou rs; vyhraje-li, obdrží $k$násobnou sázku co absolutní výhru, platí-li pravděpodobnost p, že se vyhraje, a pravděpodobnost $q = 1 - p$, že se prohraje sázka.

Jest výhodnější, aby se táž osoba súčastnila sumou rs v jednom pokusu aneb aby se súčastnila v r postupných čili soudobných pokusech, kdež na jednotlivé pokusy připadá suma s?

Věnuje-li ona osoba na jeden pokus rs a vyhraje-li, obdrží sumu krs, tedy mathematická naděje dle (2) §. 1.,

$$N = pkrs. \tag{7}$$

Věnuje-li ale ona osoba sumu rs na r pokusů, pak může vyhráti ve všech, neb $(r - 1)$, $(r - 2)$, ..., 2, aneb v 1 pokusu.

Vyhraje-li ve všech pokusech, obdrží sumu krs, a pravděpodobnost pro všechny výhry jest p^r, tedy mathematická naděje

$$N_r = p^r \,.\, k\, r\, s\,. \qquad (\alpha)$$

Vyhraje-li v $(r - 1)$ pokusech, předpokládáme, že v 1 pokusu prohrála, a tedy obdrží sumu $k(r - 1)s$, a pravděpodobnost jest $r\,p^{r-1}q$, tudíž mathematická naděje

$$N_{r-1} = r\,p^{r-1}q \,.\, k(r-1)s\,. \qquad (\beta)$$

Vyhraje-li v $(r - 2)$ pokusech a prohraje-li ve 2, obdrží sumu $k(r - 2)s$ a pravděpodobnost příslušná jest $(r)_2\, p^{r-2}q^2$, tedy mathematická naděje

$$N_{r-2} = (r)_2\, p^{r-2}\, q^2 \,.\, k(r-2)s\,, \qquad (\gamma)$$

atd. až posléze obdržíme

$$N_1 = r\,p\,q^{r-1}\,k\,s\,. \qquad (\delta)$$

Hledané očekávání jest součet všech N od (α) do (δ), tedy

$$N = p\,k\,r\,s\,[p^{r-1} + p^{r-2}\,q(r-1)_1 + \ldots + q^{r-1}]$$
$$= p\,k\,r\,s(p+q)^{r-1}\,;$$

a poněvadž $\qquad p + q = 1\,,$

konečně $\qquad N = p\,k\,r\,s\,, \qquad (8)$

kterážto hodnota se úplně shoduje s (7).

Zde platí tedy věta, kterou nejprvé *Lacroix* dokázal:

Mathematická naděje se nezmění za stejné pravděpodobnosti, věnuje-li se jistá určitá suma na **jeden** *podnik aneb rozdělí-li se táž suma na stejné díly pro* **několik** *pokusů.*)*

§. 5.

Přikročíme nyní k otázce: má-li pořádek, v jakém by osoby své nároky na očekávanou výhru činily, vliv na jejich naději mathematickou čili nic?

Tuto otázku si takto znázorníme:

V osudí nalezá se n kuliček a sice $(n - 1)$ černých a 1 bílá a každá z n osob $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vytáhne v uvedeném pořádku jednu z nich, aniž by ji dříve viděla; která z týchž osob vyndá kuličku bílou, vyhraje na ni sazenou sumu S. Jak velká jest mathematická naděje jednotlivých účastníků?

Bílou kuličku vytáhne jistě jedna z osob.

---

*) *Lacroix,* Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von *Unger.* §. 75. — *Oettinger,* „Beiträge zur Wahrscheinlichkeits-Rechnung." Grunert's Archiv d. Mathematik u. Physik. I. Band 1841

Pravděpodobnost, že ji vytáhne osoba A_1, jest $\frac{1}{n}$ a tudíž její naděje

$$N_1 = \frac{S}{n}. \qquad (1)$$

Pravděpodobnost, že ji osoba A_2 vytáhne, předpokládaje, že předchozí osoba černou kuličku vyňala, jest

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

a tedy očekávání pro A_2,

$$N_2 = \frac{S}{n}. \qquad (2)$$

Přijmeme-li, že bílou kuličku ani osoba A_1 ani A_2 nevyňala, nýbrž že ji osoba A_3 vytáhne, jest pravděpodobnost

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n},$$

a proto očekavání pro A_3,

$$N_3 = \frac{S}{n}, \qquad (3)$$

a t. d.

Z toho plyne věta:

Má-li se premie S tímto spůsobem jedné z n osob uděliti, jest mathematická naděje všech účastníků přede hrou stejna.

Je-li již r kuliček vyňato a bílá posud nikoliv, jest mathematická naděje onoho hráče, který nyní ke hře přijde,

$$N = \frac{S}{n-r}. \qquad (4)$$

Tento vzorec platí však pro každého hráče stejně, neboť k losování může na místě uvedené osoby přijíti jiná, aniž by se co na předchozí větě změnilo.

Z toho plyne další věta:

*Má-li premii S jedna z n osob vyhráti, jest pořádek úplně jednostejný, ve kterém se tyto osoby losování súčastní.**)

Máme-li v osudí $(n-3)$ kuliček černých a tři bílé, označené číslicemi 1, 2, 3, a jest-li se při losování súčastní n osob $A_1, A_2, \ldots, A_n$, z nichž každá vytáhne jednu kuličku, obdrží

*) *Oettinger*, „Beiträge zur Wahrscheinlichkeits-Rechnung." Grunert's Archiv der Mathematik u. Physik. I Theil 1841.

osoba, která vytáhne kuličku 1, premii S_1, která 2, obdrží S_2 a která 3, obdrží S_3. Jakou hodnotu má mathematická naděje každé osoby?

Očekávání osoby A_1, že vyhraje premii S_1, jest dle (1)

$$l_1 = \frac{S_1}{n},$$

že vyhraje S_2,

$$l_2 = \frac{S_2}{n},$$

aneb že vyhraje S_3,

$$l_3 = \frac{S_3}{n}.$$

Protož jest očekávání osoby A_1 vzhledem ke všem výhrám

$$N_1 = \frac{S_1}{n} + \frac{S_2}{n} + \frac{S_3}{n}. \tag{5}$$

Totéž platí pro každou jinou osobu λ, tak že

$$N_\lambda = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{n}. \tag{5'}$$

Všeobecně tedy bude, je-li n osob a výhry $S_1, S_2, \ldots, S_u$, mathematická naděje každé osoby přede hrou dle (5)

$$N = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_u}{n}, \tag{6}$$

při čemž $u \leqq n$.

Z toho poznáváme i zde platnost obou svrchu vytknutých vět. Jsou-li některé výhry stejné, nemění se na těchto větách ničeho.

Tytéž zákony mají platnost, rozdělují-li se *břemena* losem.

Zde podán jest důkaz o tom, že obyčejný spůsob rozdělolování výher a břemen losem děje se po právu. Sledováno při tom přirozeného jakéhos citu a jednáno správně, aniž příčiny známými byly. Vypočítávání *průměrných hodnot* kýžených statků zakládá se právě na těchto větách, a není možno vypočítati nějakému účastníku hodnotu mathematické naděje, neustanoví-li se dříve jistý pořádek aneb nedokáže-li se, že pořádek při losování jest úplně jednostejný.

§. 6.

Mathematická naděje ve výhru nebo ztrátu, když již sázka *učiněna byla, sluje též* **mathematickým risikem** *neb* **mathematickou odvahou.***)

Možná výhra nějakého hráče dle (1) §. 3. jest $v-s$, a nazveme-li p pravděpodobnost, že tato událost nastane, jest mathematická naděje hráče

$$N=p(v-s), \qquad (1)$$

t. j. mathematické risiko protivníka čili obnos, s kterým se protivník hráčův odvážil.

Mathematická naděje ve ztrátu s, po které protivník baží,

$$N_1=(1-p)s, \qquad (2)$$

t. j. mathematické risiko hráče čili obnos, s kterým se hráč odvážil.

Nazveme-li v případech příznivých výhry $v_1, v_2, v_3, \ldots$ pro kteréž jsou pravděpodobnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots$, jest učiněná sázka dle (10) §. 1.,

$$s=p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3+\ldots \qquad (3)$$

Mají-li býti veškeré ztráty naznačeny, nutno též vytknouti výhry, pro které není cena určena, a které dlužno považovati za nully a přičísti je k cenám $v_1, v_2, v_3, \ldots$ Protož jsou všechny možné výhry cenami označeny, tedy musí

$$p_1+p_2+p_3+\ldots=1. \qquad (4)$$

Násobíme-li poslední rovnici veličinou s, vznikne

$$sp_1+sp_2+sp_3+\ldots=s,$$

kterouž odečteme od (3), takže pak obdržíme

$$p_1(v_1-s)+p_2(v_2-s)+p_3(v_3-s)+\ldots=0. \qquad (5)$$

Jednotlivé členy v této rovnici, které jsou positivní, značí možné výhry a negativní možné ztráty. Označíme-li součet positivních členů, udávajících mathematickou naději ve výhru N, a součet negativních členů, naznačujících mathematickou naději ve ztrátu N_1, pak plyne z (5)

$$N-N_1=0$$

nebo

$$N=N_1, \qquad (6)$$

t. j. *jsou-li pro uskutečnění několika výjevů na sobě nezávislých určeny ceny, kterých možno získati, podána-li jest sázka rovná mathematické naději příslušné ceny, pak se rovná mathematická naděje výhry mathematické naději ztráty, čili mathematické risiko jest oběma stranám rovné.*

---

*) Pojem mathematického risika podal *Tetens* r. 1786.

Pro jednu cenu obdržíme z (1) a (2) podle rovnice (2) §§. 1. ihned

$$N = N_1 = p\,(1-p)\,v\,. \qquad (7)$$

V příkladu 2. §. 1. jest podle toho mathematická naděje ve výhru, když sázka hráče jest $3^1/_2\ s$,

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\,.\,s + 1\,\frac{1}{2}\,.\,s + 2\,\frac{1}{2}\,.\,s\right) = \frac{3}{4}\,.\,s$$

a táž mathematická naděje platí i v případě ztráty. Mathematické risiko jest tudíž pro obě osoby rovné.

Když hra, na kterou jest dána sázka rovná mathematické naději ceny, **mnohokrát** *se opakuje, jest pravděpodobno, že při ukončení řady týchže her na žádné straně ani výhra ani ztráta se neobjeví.*

Dle *zákona o velkých číslech* *) jsou totiž čísla, která se při výjevech opakují, úměrna pravděpodobnostem p_1, p_2, p_3, . . . týchže výjevů, a tedy můžeme tyto pravděpodobnosti v rovnici (5) nahraditi těmito čísly.

Když tedy dle této věty při opakování hry výhry a ztráty se vyrovnávají, následuje z toho, že podnikatel hry může i několik účastníků ke hře připustiti, v čemž právě vězí jistota a výhodnost jeho podniku. Totéž platí o *pojišťovacích ústavech*, jichž trvání jen tehdáž dostatečně pojištěno jest, mají-li zároveň větší počet účastníků.

Známo však, že nepřihlížeje ani k hořejší větě, má každý podnikatel *zvláštní srážky.*

*) *Poisson*, Lehrbuch d. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch v. *Schnuse* Braunschweig, 1841. Vorrede des Verfassers, pak §. 52. *Quetelet*, Lettres sur la théorie de probabilités. Bruxelles, 1846. Důkaz o *zákonu velkých čísel* vede se nejsnadněji *methodou nejmenších čtverců.*