František Josef Studnička

Počátkové nauky o determinantech. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 201--211

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121687

Počátkové nauky o determinantech.

Pro žáky středních škol

píše

Dr. F. J. Studnička.

(Dokončení).

Majíce vyvinouti nejdůležitější vlastnosti determinantů způsobem co možná jednoduchým, budeme postupovati od nižších, kde se obyčejnými obraty přijde k cíli, k determinantům vyšším, jež možná uvésti na nižší.

Jak bylo pag. 104 vzorcem (11) vyloženo, znamená symbol

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

determinant stupně třetího, jejž vyjádřiti možná podlé známého pravidla algebraickým součtem

$$\varDelta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2 . \tag{14}$$

Při tom slují jednotlivé veličiny, jež se tu vyskytují, *prvky* neb *elementy*, soubor všech vedle sebe ve čtverci stojících prvků *řádek*, soubor pak pod sebou stojících prvků *sloupec* a konečně soubor šikmo ležících prvků *příčka*, a sice jest $a_1b_2c_3$ *hlavní,* $a_3b_2c_1$ *vedlejší* příčkou; prvky, které jsou v stejné řadě jako na př. a_1, a_3 neb b_2, c_2, slují *soulehlé,* a které mají opačné položení jako na př. c_1, a_3 neb c_2, b_3, slují *protilehlé.*

Ze vzorce (14) možná bezprostředně vyvinouti některé vlastnosti tohoto zvláštního výrazu a sice:

a) Vyměníme-li v determinantu (13) řádky za sloupce aneb naopak, obdržíme tentýž součet (14); *hodnota determinantu se nemění, učiníme-li z řádků sloupce a naopak, nerušíce příčku.*

I jest tedy též, jako ve vzorci (13),

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \varDelta .$$

Podobným spůsobem se přesvědčíme, že

b) výměnou řádku za řádek nebo sloupce za sloupec se změní jen označení determinantu, z čehož jde dále, že výměnou *sudého* počtu řádků neb sloupců se nezmění ani označení. Determinant jest tedy *střídavým* úkonem svých prvků. Z determinantu (13) obdrží se na př. takovými výměnami

$$\begin{vmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3, & a_2, & a_1 \\ b_3, & b_2, & b_1 \\ c_3, & c_2, & c_1 \end{vmatrix} = -\Delta,$$

$$\begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ c_1 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \Delta.$$

A taktéž pomocí vzorce (14) snadno se přesvědčíme, že

c) hodnota determinantu (13) *uvede se na* 0, *stanou-li se identickými dvě řady rovnoběžné*, tedy buď dva řádky nebo dva sloupce; i bude podlé toho na př.

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zároveň tu patrno, což i dříve bylo již poznamenáno, že determinant stupně třetího možná vyjádřiti pomocí determinantů stupně druhého. Přiměřeným spořádáním členů obdrží se totiž ze vzorce (14) buď

$$\Delta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

nebo $\Delta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 a_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$

atd., což se pomocí podobného symbolu vyjadřuje též vzorcem

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

nebo

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}.$$

V prvním případě rozložili jsme determinant podlé prvků prvního sloupce, v druhém pak podlé prvků prvního řádku; a co platí o prvním sloupci nebo řádku, platí o kterém koli, poněvadž výměnou můžeme každou řadu uvésti na místo první, takže podlé těchto dvou vzorců možná determinant stupně třetího rozložiti šesterým spůsobem. Mimo předešlé dva vzorce obdržíme totiž, vyměníme-lí druhý sloupec za první,

$$-\Delta = b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix},$$

a vyměníme-li podobně druhý řádek za první,

$$-\Delta = a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix};$$

vyměníme-li konečně třetí sloupec za druhý a pak druhý za první, čímž se označení podlé pravidla *b)* nezmění, bude

$$\Delta = c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix},$$

a provedeme-li totéž s třetím řádkem,

$$\Delta = a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Tyto determinanty stupně druhého, any jsouce *podřízeny* determinantu stupně třetího slují též *subdeterminanty*, označují se obyčejně velikými písmenami stejného znění, jakého jsou jich součinitelové, takže se šest těchto vzorců rozkladných píše takto:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1, \\ -\Delta &= b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3 = a_2 A_2 - b_2 B_2 + c_2 C_2, \quad (15) \\ \Delta &= c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3 = a_3 A_3 - b_3 B_3 + c_3 C_3. \end{aligned}$$

A chceme-li naopak jednotlivé subdeterminanty, které se tu vyskytují, vyjádřiti příslušnými prvky, vynechme v původním neb hlavním determinantu řádek a sloupec, v němž se stejně označený prvek vyskytuje, a co zbude, představuje hledaný subdeterminant; hodnotu A_2 na př. určíme, vynecháme-li v determinantu (13) řádek druhý, totiž a_2, b_2, c_2 a sloupec první, totiž a_1, a_2, a_3, takže tu zbude

$$\begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ | & & \\ a_2 & - b_2 & - c_2 \\ | & & \\ a_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A_2.$$

Vzorce soustavy (15) vyjadřují determinant (13) algebraickým součtem součinů, kdež prvním faktorem jsou prvky některé řady, druhým pak faktorem subdeterminanty příslušné neb stejnými písmenami označené, při čemž se znamení střídají. Totéž arci platí o determinantu stupně druhého

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = -(\beta\gamma - \delta\alpha),$$

jelikož tu $\left\{ \begin{matrix} \delta \\ \gamma \end{matrix} \right\}$ značí subdeterminant prvku $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$ a naopak.

Rozkladné vzorce (15) jsou nanejvýš důležity, ba v nich spočívá největší část prospěšnosti, jakou vynikají determinanty v theorii i praksi.

Především jde z jich složení na jevo, že

d) každý podobný součet, který obsahuje členy s faktory nestejnými písmenami označenými, musí míti hodnotu 0, poněvadž tu pochází z determinantu, majícího dvě identické řady. Podlé toho jest na př.

$$\begin{array}{l|l} a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = \varDelta & b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0 \\ a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0 & b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3 = -\varDelta \\ a_1 C_1 - a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0 & b_1 C_1 - b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0 \\ c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0 \\ c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3 = \varDelta \end{array}$$

Dále jde z rozkladného vzorce

$$\varDelta = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1, \tag{16}$$

jestli tu $b_1 = c_1 = 0$, patrně

$$\varDelta = a_1 A_1,$$

což znamená, že

e) determinant, v němž obsahuje řada jedna samé nully, vyjmouc jedno místo, rovná se součinu prvku na tomto místě stojícího, znásobeného příslušným subdeterminantem. Podlé toho jest na příklad

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 2, & 0 \\ 3, & 2, & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4, & 2 \\ 3, & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Jestli ve vzorci (16)

$$a_1 = p\alpha_1, \; b_1 = p\beta_1, \; c_1 = p\gamma_1,$$

bude
$$\varDelta = p(\alpha_1 A_1 - \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1),$$

z čehož jde na jevo, že

f) společný faktor prvků jedné řady jest faktorem celého determinantu, a naopak, *násobíme-li všechny prvky jedné řady stejným faktorem, musíme celý determinant touto veličinou zároveň děliti.* Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1/_2 & 1 & 3 \\ 1/_3 & 2 & 1/_2 \\ 1/_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zavedeme-li do téhož vzorce (16)

$$a_1 = pa_2, \quad b_1 = pb_2, \quad c_1 = pc_2,$$

bude podlé vlastnosti dříve pod *d)* vytknuté

$$\Delta = p\,(a_2 A_1 - b_2 B_1 + c_2 C_1) = 0,$$

což vyjadřuje všeobecnou vlastnost, že

g) hodnota determinantu rovná se 0, *mají-li prvky dvou rovnoběžných řad stejný poměr.* I jest na př.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

A zavedeme-li konečně do vzorce (16)

$$\begin{aligned} &a_1 + pa_2 + qa_3 \text{ místo } a_1 \\ &b_1 + pb_2 + qb_3 \quad „ \quad b_1 \\ &c_1 + pc_2 + qc_3 \quad „ \quad c_1, \end{aligned}$$

obdržíme, pořádajíce podlé prvků stejně označených,

$$\begin{aligned} &a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 \\ &+ p\,(a_2 A_1 - b_2 B_1 + c_2 C_1) \\ &+ q\,(a_3 A_1 - b_3 B_1 + c_3 C_1) = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 = \Delta, \end{aligned}$$

což možná slovy všeobecně vyjádřiti takto:

h) Hodnota determinantu se nemění, připočítá-li se k prvkům které koli řady p-násobná hodnota prvků některé řady souběžné, při čemž p může i negativním býti. Podlé tohoto pravidla uvádějí se prvky determinantů na hodnoty co možná nejmenší; na př. jest

$$\begin{vmatrix} 4, & 6, & 7 \\ 5, & 8, & 10 \\ 8, & 12, & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & 6, & 7 \\ 1, & 2, & 3 \\ 3, & 4, & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 4 \\ 1, & 2, & 3 \\ 2, & 2, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & 3 \\ 1, & 0, & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Konečně jde ze vzorce (16) pro ten případ, že

$$a_1 = a + \alpha, \quad b_1 = b + \beta, \quad c_1 = c + \gamma,$$

$$\Delta = (a + \alpha) A_1 - (b + \beta) B_1 + (c + \gamma) C_1$$
$$= (a A_1 - b B_1 + c C_1) + (\alpha A_1 - \beta B_1 + \gamma C_1);$$

i) hodnota determinantu, v němž prvky některé řady se skládají ze dvou částí, rovná se dvěma determinantům, z nichž první má v oné řadě jen první části, druhý pak jen druhé části složených těchto prvků. Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} a_1 + x, & b_1, & c_1 \\ a_2 + y, & b_2, & c_2 \\ a_3 + z, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x, & b_1, & c_1 \\ y, & b_2, & c_2 \\ z, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 5 \\ 4, & 5, & 7 \\ 6, & 4, & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

A z této vlastnosti plyne dále, že

k) hodnota determinantu, v němž jsou prvky některé řady stejny, neměnú se, připojíme-li ku prvkům které koli řady rovnoběžné veličiny libovolné, ale stejné. Neb tu platí patrně na př.

$$\begin{vmatrix} a_1 + k, & b_1, & c \\ a_2 + k, & b_2, & c \\ a_3 + k, & b_3, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c \\ a_2, & b_2, & c \\ a_3, & b_3, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k, & b_1, & c \\ k, & b_2, & c \\ k, & b_3, & c \end{vmatrix},$$

kdež poslední determinant má podlé c hodnotu 0.

Znajíce tyto vlastnosti determinantu stupně třetího, můžeme přikročiti k vyčíslení determinantu stupně čtvrtého, pátého a t. d.

Především patrno, že podlé vzorce (16) možná rozložiti determinant stupně čtvrtého v algebraický součet členů, kdež prvním faktorem jsou prvky prvního řádku, druhým pak příslušné subdeterminanty, které obdržíme, vynecháme-li v determinantu původním sloupec a řádek, v němž příslušný prvek stojí. Podlé toho bude tedy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 - d_1 D_1, \quad (17)$$

kdež znamená

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} a_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix},$$

aneb zavedeme-li *Binetovo* označení pomocí příčky,

$$A_1 = (b_2 c_3 d_4),\ B_1 = (a_2 c_3 d_4),\ C_1 = (a_2 b_3 d_4),\ D_1 = (a_2 b_3 c_4).$$

Poněvadž známe spůsob, jakým se determinant stupně třetího vyčíslí, můžeme pomocí tohoto vzorce provésti i vyčíslení determinantu stupně čtvrtého. Ostatně možná i tyto subdeterminanty rozložiti a si zjednati napřed vzorec

$$\begin{aligned} \varDelta = & a_1 [b_2 (c_3 d_4) - c_2 (b_3 d_4) + d_2 (b_3 c_4)] \\ & - b_1 [a_2 (c_3 d_4) - c_2 (a_3 d_4) + d_2 (a_3 c_4)] \\ & + c_1 [a_2 (b_3 d_4) - b_2 (a_3 d_4) + d_2 (a_3 b_4)] \\ & - d_1 [a_2 (b_3 c_4) - b_2 (a_3 c_4) + c_2 (a_3 b_4)] \end{aligned}$$

a pak spojením dvou členů stejným subdeterminantem znásobených vyvésti nový vzorec

$$\begin{aligned} \varDelta = & (a_1 b_2)(c_3 d_4) - (a_1 c_2)(b_3 d_4) + (a_1 d_2)(b_3 c_4) \\ & + (b_1 c_2)(a_3 d_4) - (b_1 d_2)(a_3 c_4) \\ & + (c_1 d_2)(a_3 b_4). \end{aligned} \tag{18}$$

Determinant stupně čtvrtého jest tu vyjádřen algebraickým součtem součinů, kdež každý člen skládá se ze dvou subdeterminantů stupně druhého, které se vzájemně doplňují a tudíž *doplňkovými* neb *komplementárními* determinanty slují. Takový subdeterminant vytkne se z determinantu původního, vynechají-li se v něm řádky a sloupce, v nichž prvky subdeterminantu daného stojí. Podlé toho obdržíme doplněk subdeterminantu $(b_1 d_4)$, vynecháme-li v původním determinantu první a čtvrtý řádek, pak druhý a čtvrtý sloupec, takže z determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1, & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2, & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, & d_3 \\ a_4 & -b_4 & -c_4, & -d_4 \end{vmatrix} \text{ zbude } \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Zákon, podlé kterého se zde rozkládá, jest velmi jednoduchý a na první pohled patrný; pro skutečné vyčíslení budiž jen poznamenáno, že dobře jest odděliti čárou první dva řádky, z nichž se vybírají první faktorové, od řádek ostatních. Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ \hline 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{vmatrix} = \left.\begin{array}{r} (-2).2 - 0.0 \quad + (-2).2 \\ + 2.(-2) - \quad 0.0 \\ + (-2).2 \end{array}\right\} = -16.$$

Že i zde platí pravidla dříve vytknutá, není třeba zvláště dokazovati; postačiť jen poukázati ke vzorci (17), podlé něhož se determinant stupně čtvrtého vyjadřuje součtem součinů, v nichž se vyskytují co činitelé determinanty stupně třetího.

Podobně bychom mohli determinant stupně pátého

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4 \\ a_5, & b_5, & c_5, & d_5, & e_5 \end{vmatrix}$$

rozložiti podlé prvků první řady, dejme tomu kolmé, v součet

$$\varDelta = a_1 (b_2\, c_3\, d_4\, e_5) - a_2 (b_1\, c_3\, d_4\, e_5) + a_3 (b_1\, c_2\, d_4\, e_5)$$
$$- a_4 (b_1\, c_2\, d_3\, e_5) + a_5 (b_1\, c_2\, d_3\, e_4);$$

a kdybychom determinanty stupně čtvrtého podobně rozložili a pak podlé společných determinantů stupně třetího vždy dva členy spojili, obdrželi bychom, jako při vzorci (18),

$$\begin{aligned} \varDelta = (a_1 b_2)(c_3 d_4 e_5) - (a_1 b_3)(c_2 d_4 e_5) + (a_1 b_4)(c_2 d_3 e_5) - (a_1 b_5)(c_2 d_3 e_4) \\ + (a_2 b_3)(c_1 d_4 e_5) - (a_2 b_4)(c_1 d_3 e_5) + (a_2 b_5)(c_1 d_3 e_4) \\ + (a_3 b_4)(c_1 d_2 e_5) - (a_3 b_5)(c_1 d_2 e_4) \\ + (a_4 b_5)(c_1 d_2 e_3). \end{aligned}$$

Zde jest vyjádřen determinant součtem součinů, kde první faktor jest determinantem stupně druhého, druhý pak faktor determinantem stupně třetího co jeho doplňkem. Jak se tu znamení střídají, jde ze vzorce na jevo; ostatně možná se i říditi počtem převratů, jaký se jeví v příponách, takže počet jich lichý spůsobuje znamení negativní.

A co platí všeobecně o determinantech stupně třetího, čtvrtého a pátého, platí též o determinantech stupňů vyšších, takže jestli na příklad

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \tag{19}$$

determinantem stupně n-tého, bude i zde podlé vzorce (17) buď

$$\Delta = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 - \ldots \pm l_1 L_1, \qquad (20)$$

nebo $$\Delta = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 - \ldots \pm a_n A_n, \qquad (21)$$

kdež značí velké písmeny determinanty stupně o 1 nižšího. A tyto subdeterminanty možná dále podlé stejných pravidel rozložiti a takto stále v rozkladu pokračovati, až se přijde na subdeterminanty stupně čtvrtého nebo třetího, jež podlé předcházejících vzorců snadno již se vyčíslí. Ostatně nevyskytují se v praktických úlohách determinanty vyšší nežli stupně čtvrtého.

Poznamenání 1. Znajíce tyto vlastnosti determinantů, můžeme přikročiti k přímému řešení soustavy rovnic stupně prvního. Má-li se totiž určiti n neznámých $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, kteréž vyhovují n podmínkám

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + l_1 x_n = n_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + l_2 x_n = n_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \ldots + l_n x_n = n_n, \end{array}\right\} \qquad (22)$$

násobme rovnice, jak po sobě jdou, napřed subdeterminanty A_1, $-A_2$, A_3, ..., $\pm A_n$ a sečtěme podlé členů pod sebou stojících; obdržíme tu, majíce zřetel ke vlastnosti pod *d)* vytknuté a ke vzorci (21)

$$x_1 (a_1 A_1 - a_2 A_2 + \ldots \pm a_n A_n) = n_1 A_1 - n_2 A_2 + \ldots \pm n_n A_n$$

nebo $$x_1 \Delta = {}^a|^n \Delta.$$

Pak násobme tutéž soustavu subdeterminanty B_1, $-B_2$, B_3, ..., $\pm B_n$ a sečtěme podobně; zjednáme si tím

$$x_2 (b_1 B_1 - b_2 B_2 + \ldots \pm b_n B_n) = n_1 B_1 - n_2 B_2 + \ldots \pm n_n B_n$$

nebo $$x_2 \Delta = {}^b|^n \Delta.$$

A tímto způsobem pokračujíce, obdržíme po sobě hodnoty všech neznámých, jak byly vzorcem (11) dříve již vyznačeny.

Poznamenání 2. Zcela stejným spůsobem řeší se úloha, vyloučiti z n rovnic n neznámých, které se tu po jedné vyskytují při každém členu, takže výraz příslušný činí *stejnoměrným* (homogen). Soustavu takovou obdržíme ze soustavy (22), položíme-li tam

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_n = 0.$$

Na to bude čitatel každého řešení 0, tedy nutně i jmenovatel hodnoty 0, jelikož neznámá x_k vůbec není hodnoty 0; výsledek eliminace jest tedy

$$\Delta = 0.$$

Z toho plyne pravidlo: *Z n stejnoměrných rovnic stupně prvního vyloučí se všech n neznámých a výsledek tohoto vyloučení jest, že determinant soustavy těchto rovnic rovná se 0.*

Kdybychom pak v soustavě stejnoměrných rovnic všechny neznámé dělili jednou, dejme tomu poslední, objeví se nám co neznámé pak tyto podíly nebo poměry; výsledek eliminace těchto poměrů ze soustavy nestejnoměrných rovnic zůstane však týž.

Chceme-li na př. vyloučiti neznámé veličiny x, y, z ze soustavy rovnic stejnoměrných

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$

položme přímo

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3) = 0$$

a jsme u konce. Kdybychom tuto soustavu dělením uvedli na tvar

$$a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = 0,$$

$$a_2 \frac{x}{z} + b_2 \frac{y}{z} + c_2 = 0,$$

$$a_3 \frac{x}{z} + b_3 \frac{y}{z} + c_3 = 0,$$

obdrželi bychom co výsledek eliminace totéž.

Tohoto pravidla možná užíti i při eliminaci jedné neznámé ze dvou rovnic stupňů vyšších, jakož se pozná z příkladu tohoto.

Má-li se vyloučiti x z rovnic

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0,$$

násobme první i druhou společným kořenem obou x a zjednejme si

$$a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 = 0,$$
$$b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 = 0,$$

načež obdržíme, považujíce různé mocniny x, x^2, x^3 za různé veličiny linearní, co výsledek eliminace

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & 0 \\ b_0, & b_1, & b_2, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

anebo rozložíme-li podlé vzorce (18)

$$\begin{vmatrix} a_0, a_1 \\ b_0, b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0, a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

což jest známá podmínka společného kořene dvou rovnic kvadratických.

Končíce tuto krátkou stať o determinantech, poukazujeme každého, kdo by dále chtěl vniknouti a zejmena veledůležité poučky o násobení determinantů a o poměru determinantů původních k přidruženým poznati, k spisu „O determinantech", jejž jsme r. 1870 samostatně vydali.

Z Aragových životopisů.

Podává prof. **Fr. Hromádko.**

II.

Malus.

(Čteno v zasedání pařížské akademie věd dne 8. ledna 1855.)

(Dokončení.)

Malus objevuje polarisaci odrazem světla způsobenou.

První pozorování dvojlomu světla v islandském krystalu, který, jak známo, jest uhličitan vápenatý, sahá až do doby *Erasma Bartholina*. *Huyghens* se zabýval dlouho tímto výjevem a vymyslil jednoduchou, zároveň též lepou měřickou konstrukci, kterou lze ku každému úhlu dopadu vyměřiti dráhu paprsku mimořádně zlomenému vzhledem k onomu, jehož dráha t. zv. Cartesiovým čili sinusovým pravidlem jest určena a který vším právem paprsek *řádně* zlomený slove.

Huyghens připadl na tuto konstrukci svého ellipsoidu, vycházeje z hlediska, opírajícího se o theorii pohybu vlnivého, kterou též čtenáři napřed udává.

Zpravodaj o práci Malus-ově (ze dne 12. prosince 1808) nadepsané: *„O zvláštní vlastnosti světla od hmot průhledných se odrážejícího"* byl na slovo vzatý *Laplace*, který, mimochodem řečeno, stál pevně při Newtonově *emanační theorii*. Ve své