Karel Zahradník

Transformace souřadnic pravoúhelných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 257--262

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121686`

Z těchto rovnic plynou následující velezajímavé vztahy:

$$a_6{}^2 : a_3{}^2 : a_4{}^2 = 2 : 3 : 4 \,,$$
$$\varrho_6{}^2 : \varrho_8{}^2 : \varrho_4{}^2 = 4 : 3 : 2 \,,$$
$$a_6 : a_8 : a_4 = \varrho_4 : \varrho_8 : \varrho_6 \,,$$
$$r_6 = r_8 \,,\ r_{12} = r_{20} \,,$$
$$\frac{\varrho_6}{\varrho_8} = \frac{V_6}{V_8} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\varrho_{12}}{\varrho_{20}} = \frac{V_{12}}{V_{20}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}} \,.$$

Snadno bychom mohli rozmnožiti ještě vztahy tohoto rázu. Vůbec podávají vzorce základní dostatečný material k řešení mnohých úloh o těchto pravidelných tělesích.

Transformace souřadnic pravoúhelných.

Od

Dra. **K. Zahradníka** v Záhřebě.

Poloha nové soustavy souřadnic X' Y' je určena, známe-li souřadnice nového počátku O' (a, b) a úhly, jež nové osy s původními osami uzavírají, totiž

$$(X'X) = \alpha \,, \qquad (X'Y) = \beta \,.$$
$$(Y'X) = \alpha'_1, \qquad (Y'Y) = \beta_1 .$$

Původně daná soustava souřadnic budiž pravoúhelná, a úhel nové soustavy φ dán je rovnicí

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 .$$

Označení úhlů můžeme si znázorniti následujícím schematem

	X	Y
X'	α	β
Y'	α_1	β_1

Souřadnice bodu M budou

$$OP = x, \quad MP = y$$

vzhledem na původní polohu os, a vzhledem na nové osy je

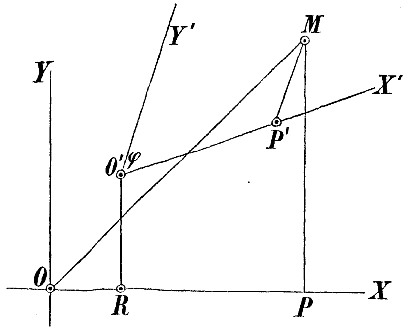
$$OP' = x', \; MP' = y'.$$

Připomeňme si nyní, že projekce uzavřeného mnohoúhelníku do kterékoliv osy, ležící v rovině mnohoúhelníku se rovná nulle[1]), obdržíme (obr. 1.)

$$\text{proj.}\,(OR) + \text{proj}\,(RO') + \text{proj}\,(O'P') + \text{proj}\,(P'M) + \text{proj}\,(MO) = 0$$

$$\text{proj}\,(OM) = \text{proj}\,(OR) + \text{proj}\,(RO') + \text{proj}\,(O'P') + \text{proj}\,(P'M). \quad (1)$$

Obr. 1.



Volme nyní jednou osu X, po druhé osu Y za osu průmětnou, obdržíme

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha + y' \cos \alpha_1 \\ y &= b + x' \cos \beta + y' \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

hledané to vzorce transformační. Tyto vzorce jsou vzhledem k souřadnicím stupně prvého, z čehož seznáváme, že se transformací os stupeň křivky nemění, což samo sebou arci vysvítá, neb tvar a vlastnosti křivky jsou na volbě os souřadnic nezávislé.

Transformaci vyjádřenou rovnicemi (2) můžeme ve dva postupy rozložiti a sice v *pošinutí* os a v *pootočení* os.

Při pošinutí os mění se pouze počátek souřadnic, při čemž osy svůj směr zachovávají, tudíž jest (obr. 2.)

$$(XX') = 0, \quad (YY') = 0, \quad (X'Y) = 90^0, \quad (Y'X) = 90^0$$

a rovnice (2) přejdou v tomto případě v

$$\begin{aligned} x &= a + x_1 \\ y &= b + y_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Zaměníme-li nyní směry os, přidrževše počátek souřadnic, třeba nám klásti

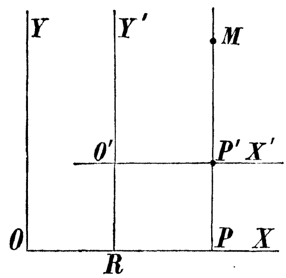
$$\begin{aligned} x_1 &= x' \cos \alpha + y' \cos \alpha_1 \\ y_1 &= y' \cos \beta + y' \cos \beta_1, \end{aligned} \quad (4)$$

kteréž z rovnic (2) plynou, položíme-li v nich $a = b = 0$.

*) Viz *Studnička* „Úvod do analytické geometrie v prostoru“ 1874. pg. 3.

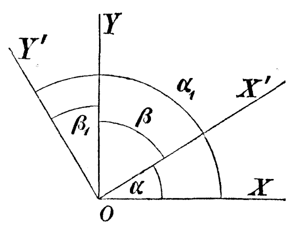
Můžeme tedy provésti nejprve transformaci (3), potom transformaci (4), aneb obě najednou, nahradíme-li x_1, y_1 ve (3) hodnotami ze (4), čímž přijdeme na transformaci (2) jak bylo tvrzeno.

Obr. 2.



Transformace (3) nevyžaduje žádné další poznámky, protož se obrátíme ihned na druhou transformaci (4). Předpokládejme, že chceme *od pravoúhelné soustavy os na novou pravoúhelnou soustavu os přejíti, aniž bychom měnili počátek souřadnic.**)

Obr. 3.



Záměnu tuto můžeme provésti otočením soustavy os o daný úhel α, při čemž jsme arci vzájemnou polohu os považovali za pevnou. Tu je však úhlem otáčky α celá transformace určená, z čehož soudíme, že musí se dáti koefficienty transformace vyjádřiti co funkce jednoho z nich, na př. $\alpha = (XX')$. Z obr. 3. je jasno, že je

$$\begin{aligned} (XX') &= \alpha \\ \alpha_1 &= 90 + \alpha \\ \beta &= 90 - \alpha \\ \beta_1 &= \alpha \end{aligned} \qquad (5)$$

*) Vzorce (2) platí obecně, jak odvození podotknuto bylo, při záměně pravoúhlé soustavy os s kosoúhlou soustavou, mění-li se současně i počátek souřadnic. Další vyvinutí vztahuje se, jak dotčeno je, na zaměnu pravoúhlé soustavy v pravoúhlou novou soustavu.

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnic (4), obdržíme

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$
$$y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha$$

za vzorce transformační, přejdeme-li od jedné pravoúhelné soustavy os na druhou soustavu pravoúhelnou *otáčkou soustavy o úhel* φ okolo společného počátku.

Nyní dokážeme, že taký přechod od jedné pravoúhelné soustavy na druhou pravoúhlou soustavu o společném počátku pouze otáčkou provésti se může.

Viděli jsme, že od dané pravoúhlé soustavy os na jinou soustavu os libovolnou (předpokládaje společný počátek souřadnic), přejdeme pomocí následujících rovnic transformačních

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\alpha_1 \\ y &= x' \cos\beta + y' \cos\beta_1 \end{aligned} \quad . \tag{4'}$$

Substituce uvedena za x i y je linearná, a modul substituce je

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha_1 \\ \cos\beta & \cos\beta_1 \end{vmatrix} .$$

Máme-li míti substituci orthogonalní (pravoúhlou), musí se

$$\Delta^2 = +1 ,$$

t. j. koefficienty substituce vyhověti musí následujícím podmínkám *)

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1 &= 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta_1 &= 1 \\ \cos\alpha \cos\beta + \cos\alpha_1 \cos\beta_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Jelikož koefficienty substituce vyhověti musí třem podmínkám, shledáváme, že můžeme jedním koefficientem ostatní vyjádřiti. Plyneť ze třetí rovnice u (6)

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{\cos\beta_1}{-\cos\beta} . \tag{7}$$

Dělíme-li nyní první rovnici u (6) $\cos^2\alpha_1$, obdržíme

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha_1} ,$$

aneb zavedeme-li z rovnice (7) hodnotu za $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}$ a uvedeme na společného jmenovatele, bude

*) Viz Dr. *Studnička* „O determinantech“ pag. 37. Praha 1870.

$$\frac{\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta}{(-\cos\beta)^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha_1}.$$

Z rovnice této plyne se zřetelem na rovnici druhou v (6)

$$-\cos\beta = \cos\alpha_1 \tag{8}$$

aneb

$$\alpha_1 + \beta = 180^0. \tag{9}$$

Zavedeme-li z rovnice (8) hodnotu za $\cos\alpha_1$ do třetí rovnice v (6), obdržíme

$$\cos\alpha = \cos\beta_1,$$

aneb

$$\alpha = \beta_1. \tag{10}$$

Jest však dále

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\beta_1 = \sin^2\beta_1,$$

tudíž

$$\cos\beta = \sin\beta_1,$$

aneb

$$\beta = 90^0 - \beta_1 = 90^0 - \alpha. \tag{11}$$

Sestavíme-li rovnice (9), (10), (11), tu obdržíme

$$\begin{aligned} \beta &= 90^0 - \alpha \\ \alpha_1 &= 180^0 - \beta = 90^0 + \alpha \\ \beta_1 &= \alpha \end{aligned}$$

vzorce to, které se úplně shodují s oněmi (5), jež jsme otáčkou os v úhel α byli vyvodili, z čehož soudíme, že přechod od jedné pravoúhlé soustavy os na druhou pravoúhlou soustavu os o společném počátku jedině otáčkou soustavy se provede.

Známo, že při orthogonální substituci, z platnosti soustavy rovnic (6) souditi můžeme na platuost ještě druhé soustavy rovnic *)

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta &= 1 \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 &= 1 \\ \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{6'}$$

Avšak soustava rovnic (6′) není samostatná, tedy nepodává nám žádnou novou podmínku, nic, co bychom již ze soustavy (6) odvoditi nemohli. To dokážeme tím, že přímo ze soustavy (6) odvodíme soustavu (6′).

---

*) Obdobný theorem při transformaci v prostoru provedl *Hesse*, o transformaci v rovině neznám, zdaliž by toto byl kdo provedl. Co se tkne geometrického významu rovnic v soustavě (6) i (6′), jest zcela patrný.

Ze soustavy (6) plyne

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha_1$$
$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\beta_1,$$

a pomnožíme-li tyto rovnice, obdržíme

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta = 1 - (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1) + \cos^2\alpha_1\cos^2\beta_1. \quad (12)$$

Jest však dle třetí rovnice soustavy (6)

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha_1\cos^2\beta_1, \quad (13)$$

kterýžto vztah uveden do rovnice (12) nám dá

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = 1. \quad (14)$$

Podobně obdržíme násobením rovnic

$$\cos^2\alpha_1 = 1 - \cos^2\alpha$$
$$\cos^2\beta_1 = 1 - \cos^2\beta$$

vzhledem na uvedenou relaci (13)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \quad (15)$$

Tím spůsobem obdrželi jsme rovnice (14) i (15) prvé dvě to rovnice soustavy (6′), a třetí rovnici této soustavy obdržíme, znásobíme-li rovnici (14) rovnicí (15). Zmíněný součin je

$$(\cos\alpha\cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta\cos\beta_1)^2 + (\cos\alpha\cos\beta_1)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta)^2 = 1 \quad (16)$$

a čtverec třetí rovnice v (6) jest:

$$(\cos\alpha\cos\beta)^2 + 2\cos\alpha\cos\alpha_1\cos\beta\cos\beta_1 + (\cos\alpha_1\cos\beta_1)^2 = 0. \quad (17)$$

Součet obou rovnic (16) i (17) dá nám

$$(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1)^2 + \cos^2\beta\,[\cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1] + \cos^2\beta_1\,[\cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1] = 1.$$

aneb

$$[\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1]^2 + [\cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1]\,[\cos^2\beta + \cos^2\beta_1] = 1$$

tudíž vzhledem na prvé dvě rovnice soustavy (6) plyne

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 = 0 \quad (18)$$

co třetí rovnice soustavy (6′), čím uvedené tvrzení, že soustava rovnic (6′) již ze soustavy rovnic (6) nutně plyne, je dokázáno.