Vladimír Libický

Vektoranalytický důkaz theoremu Dupinova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 1, 39--41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121678`

Vektoranalytický důkaz theoremu Dupinova.

Podává Vladimír Libický, Král. Vinohrady.

Dupin vyslovil větu:

„Plochy systému trojnásobně orthogonálního protínají se v křivkách křivosti.“

Věta tato byla předmětem častých důkazů, z nichž některé byly provedeny též počtem quaternionů neb pomocí vektorové analyse. [1]) Podávám nový důkaz založený na theorii vektorů, který jest jednodušší předešlých, protože nevyžaduje umělých obratů.

Označíme-li $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ [2]) směrové vektory normálné ploch S_1, S_2, S_3, systému trojnásobně orthogonálního, jsou splněny relace:

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0, \ \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_3 = 0, \ \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{N}_1 = 0, \qquad (\alpha^{123})$$

$$\mathbf{N}_3^2 = 1, \ \mathbf{N}_1^2 = 1, \ \mathbf{N}_2^2 = 1, \qquad (\beta^{123})$$

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2, \ \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3, \ \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_3 \times \mathbf{N}_1. \qquad (\gamma^{123})$$

---

1) *Viz Hamilton: Elemente der Quaternionen.*
Graeffe dr. Friedrich: Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen, pag. 134.
Mollenbrock dr. P. Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie, pag. 217. a n.
Grassmann H.: Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen III. Theil: Krumme Flächen, pag. 68.
Týž důkaz uvádí *Fehr Henri* v pojednání *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale* pag. 74—76, jež jest francouzským zpracováním předešlého pojednání.
Marcolongo R.: Une démonstration vectorielle du théorème de Dupin, [L'Enseignement Mathématique XIV année, No. 1. Janvier 1912 38]. Viz též
Pieri M.: Sui sistemi di ∞^1 *superficie.* [Atti R. Acc. Torino, v. 48. pp. 132—139.]
Rothe R.: Anwendung der Vectoranalysis auf Differentialgeometrie. [Jahresbericht d. d. Math. Vereinigung XXI. 1912.]

2) Používám symboliky Gibbs-Wilsonovy, jež má velké přednosti proti ostatním užívaným systémům.

Differenciací rovnic (β) obdržíme:

$$\mathbf{N}_3 \,.\, d\mathbf{N}_3 = 0,\ \mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_1 = 0,\ \mathbf{N}_2 \,.\, d\mathbf{N}_2 = 0 \qquad (\delta^{123})$$

a podobně z (α^1) plyne

$$\mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_2 + d\mathbf{N}_1 \,.\, \mathbf{N}_2 = 0 \qquad (\varepsilon)$$

Dle rovnice (δ^2) leží vektor $d\mathbf{N}_1$ v rovině vektorů $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3$ a vektor $d\mathbf{N}_2$ v rovině $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_3$. Vzhledem ke (γ^3) můžeme rovnici (ε) psáti ve tvaru

$$\mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_2 + d\mathbf{N}_1 \,.\, \mathbf{N}_3 \times \mathbf{N}_1 = 0,$$

aneb, poněvadž lze v druhém skalárním součinu faktory cyklicky zaměniti [3])

$$\mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_3 = 0,$$

$$\mathbf{N}_1 \,.\, (d\mathbf{N}_2 + d\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_3) = 0. \qquad (\zeta)$$

Leží tudíž vektor $(d\mathbf{N}_2 + d\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_3)$ v rovině $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3$. Ale $d\mathbf{N}_2$ musí současně ležeti v rovinách $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_3$ (dle δ^3) a $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3$ (dle ζ), jež jsou k sobě kolmé; to jest však pouze tehdy možno, je-li $d\mathbf{N}_2$ rovnoběžné s jich průsekem $\mathbf{N}_3$

$$d\mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3 = 0. \qquad (\eta)$$

Z toho následuje (dle α^3)

$$\mathbf{N}_1 \,.\, d\mathbf{N}_2 = 0,$$

pročež (ε) přejde v rovnici

$$d\mathbf{N}_1 \,.\, \mathbf{N}_2 = 0. \qquad (\vartheta)$$

Protože však $d\mathbf{N}_1$ leží současně v rovině vektorů $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3$, jest též

$$d\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_3 = 0.$$

Průsek ploch S_1 a S_2 má v uvažovaném bodě tangentu $\mathbf{t}_3$ kolmou ku normálám $\mathbf{N}_1$ a $\mathbf{N}_2$ nebo rovnoběžnou s vektorem $\mathbf{N}_3$:

$$\mathbf{t}_3 \times \mathbf{N}_3 = 0. \qquad (\iota)$$

Jsou tudíž vektory

$$\mathbf{t}_3,\ d\mathbf{N}_1,\ d\mathbf{N}_2$$

vzájemně kollineární, což lze vyjádřiti rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}_3 \times d\mathbf{N}_1 &= 0, \\ \mathbf{t}_3 \times d\mathbf{N}_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa)$$

---

[3]) *Ant. Libický, Úvod do vektorové analyse* (str. 18).

Rovnice $(\varkappa)$[4]) jsou však differenciální rovnice křivek křivosti na plochách S_1 a S_3.

Podobně lze dokázati, že též plochy S_2S_3 a S_1S_2 se protínají v křivkách křivosti.

Poznámka k theorii a užití osového komplexu plochy 2. stupně.

V. Obešlo.

Stanoviti osy kuželosečky, kterou vytíná libovolná rovina π z plochy 2. stupně. — Ke stanovení komplexové paraboly pro rovinu π používá se obvykle kromě průsečnic roviny π s hlavními rovinami plochy — reciproké poláry k ose, k naší rovině π kolmé. Z té příčiny se předpokládá, že plocha 2. stupně dána jest řezy hlavními.

Úlohu zmíněnou lze však výhodně řešiti, užijeme-li následující vlastnosti komplexu osového. Komplex osový jest zvláštním případem komplexu tetraedrálního, o kterém víme, že jest také místem příček ku homologickým paprskům dvou projektivních svazků paprskových, ve dvou sousedních stěnách základního tetraedru ležících. Tyto dva svazky paprskové vytínají na hraně, rovinám jejich společné, dvě projektivní řady bodové, jejichž samodružnými body jsou vrcholy tetraedru.

Pro komplex osový přecházejí tyto dva paprskové svazky ve dvě navzájem podobné osnovy paprsků, ve dvou symmetrálných rovinách plochy ležících a ku průsečné jejich ose kolmých.

Mějme tedy plochu 2. stupně dánu hlavním tetraedrem (t. j. rovinami symmetrálnými spolu s rovinou úběžnou) a libo-

---

[4]) Rovnice tyto možno psáti též ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \,.\, \nabla \mathbf{N}_1 \times \mathbf{t} &= 0 \\ \mathbf{t} \,.\, \nabla \mathbf{N}_2 \times \mathbf{t} &= 0. \end{aligned} \qquad (\lambda)$$

Prof. Burali-Forti užívá na místě těchto mnohočlenů homografií σ. Viz *Burali-Forti C.: Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale* [Palermo 1912, pag. 21].