František Kadeřávek

O ploše vytvořené šroubovicí, vykonávající pohyb šroubový

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 1, 34--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121675

Ovšem nezbytným předpokladem při tom jest, aby oboje tabulky úmrtnostní byly vyrovnány dle formule G. Makehamovy a aby pomocná čísla

$$D_x, N_x, S_x$$

byla vypočtena dle tabulky úmrtnostní takto vyrovnané.

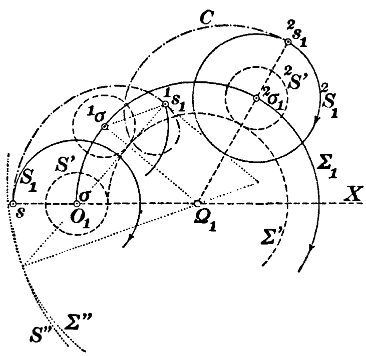
O ploše vytvořené šroubovicí, vykonávající pohyb šroubový.

Dr. Fr. Kadeřávek.

Buď dána šroubovice S o ose O; bod s buď její stopou na rovině $\pi \perp O$; S_1, O_1 buďtež orthogonálné průměty daných útvarů do roviny π. Suneme-li šroubovici S ve směru osy O rovnoměrně, otáčí se její stopa s v rovině π kol bodu O_1 rovněž rovnoměrně. Spojme tento pohyb dané šroubovice s rovnoměrnou rotací kol osy $\Omega \parallel O$. Bod O_1 otáčí se tu rovnoměrně kolem orthog. průmětu Ω_1 osy Ω do roviny π a kolem tohoto hybného bodu O_1 otáčí se rovnoměrně stopa s okolo Ω se otáčející a současně směrem O nad rovinu π vystupující šroubovice S, vyplňujíc cykloidu C o středu Ω_1; libovolný bod o ose O vytvořuje šroubovici Σ o ose Ω, šroubovice S vyplní určitou plochu šroubovou, označme ji **P**, jejímž normálným řezem jest cykloida C. I platí věta:

Vykonává-li šroubovice S o ose O pohyb šroubový určený šroubovicí Σ o ose $\Omega \parallel O$, vznikne plocha šroubová **P**, jejíž normálný řez jest *cykloida*.

Vyšetřme kružnici základní Σ' a kotalecí S' normálného řezu C. Zvolme si dvě šroubovice S, Σ o osách $O \parallel \Omega$, jejichž stopy O_1, Ω_1 na rovině π kolmé k O ležtež se stopami s a σ šroubovic S a Σ v jedné přímce X (obr. 1.). Výšky návitků šroubovic daných buďtež b, β, poloměry průmětů S_1, Σ_1 do roviny π r a ϱ. Vysune-li se šroubovice S ve směru osy O o celou výšku návitku b, otočí se její stopa s kol O_1 o úhel plný, osa O však otočí se kol osy Ω o úhel $k\,.\,360^0$, kdež k jest poměr obou výšek b i β[1]) t. j. $k = \frac{b}{\beta}$, a jest kladný neb záporný dle toho, jsou-li šroubovice S a Σ obě stejně točivé, neb je-li jedna v pravo, druhá pak v levo točivá. V nepřímém však poměru úhlů 360^0



Obr. 1.

a $k\,.\,360^0$ musí býti poloměr r' kružnice kotalecí S' a ϱ' kružnice základní Σ' cykloidy C a ježto jejich algebr. součet dává poloměr ϱ šroubovice Σ, platí pro ně rovnice:

$$r' : \varrho' = k = b : \beta\,; \quad r' + \varrho' = \varrho$$

z nichž $$\varrho' = \varrho\,(k + 1)^{-1},\ r' = k\varrho\,(k + 1)^{-1}.$$

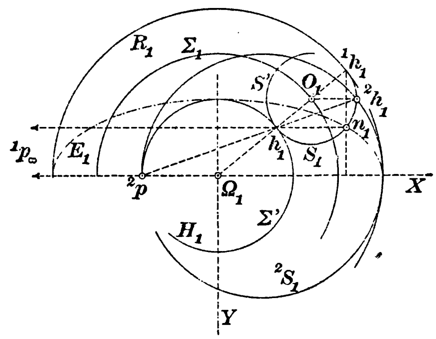
Na základě obou kružnic Σ' a S' můžeme známým způsobem normálný řez dané plochy **P** vyrýsovati.[2])

Obraťme se nyní k plochám, jimž přísluší normálný řez jsoucí *obecnou* cykloidou (s body úvratu), a pro něž, jak snadno lze dovoditi, poměr poloměrů šroubovic S a Σ musí býti roven $r : \varrho = k : (k + 1)$, kdež opět $k = b : \beta$ jest poměr výšek návitkových šroubovic S a Σ opatřený příslušným znamením.

[1]) V obr. 1. zvoleno $O_1 \equiv \sigma$, poměr $b : \beta = 1 : 3$.

[2]) V obraze vyznačeno vyšetření druhé kružnice kotalecí S'' a základní Σ'', pomocí jichž lze touž křivku C vytvořiti; srovnej: Jarolímek-Procházka, Učebnice deskrip. geometrie pro vysoké školy technické, str. 360 a G. Loria, Spezielle ebene Kurven, II. díl, str. 96 překladu Schütteova.

Znejmež z obecné cykloidy, tvořící normálný řez plochy **P'**— vytvořované šroubovicí S o ose O pohybovanou dle šroubovice Σ o ose Ω— kružnici základní Σ' a kotalecí $S' \equiv S_1$. Zvolme si půdorysnu π kolmo k O, pak nárysna jest rovnoběžna s O a vyšetřujme půdorys nárysného obrysu plochy **P'** (obr. 2.). Sestrojme pól $^1p\infty$ nárysně promítacích paprsků vzhledem k šroubovici Σ a veďme jím a dotyčníkem h_1 kružnic S' a Σ' paprsek,



Obr. 2.

jehož průsečík s kružnicí S' označme n_1. Takto vyhledaný bod jest bodem půdorysu hledané kontury, neboť $\overline{n_1 h_1}$ jest normálou cykloidy vytvořované bodem n_1 při kotálení S' po Σ', kterážto normála jde pólem $^1p\infty$ a tudíž dle známé věty n_1 náleží půdorysu obrysu druhého. Přihlédneme-li však ke kružnicím $H_1 \equiv \Sigma'$ a R_1, půdorysům to nejmenší a největší šroubovice plochy a k obrazci $\overline{^1h_1 n_1} \perp \overline{h_1 n_1} \,||\, X$, vidíme, že bod n_1 náleží ellipse E_1 o osách X, Y; kružnice H_1, R_1 jsou její kružnice vrcholové. Z toho patrno, že

průmět dotyčné křivky válce ploše **P'** kolmo k ose Ω opsané do roviny π kolmé k téže ose jest *ellipsa* E_1 o poloosách rovných poloměrům válců, v nichž spočívají nejmenší a největší šroubovice plochy.

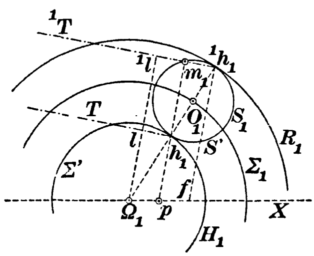
Zvolme si pól ^2p v kružnici H_1; spojnice $\overline{^2h_1 O_1}$ prusečíku $^2h_1$ přímky $\overline{^2ph_1}$ s kružnicí S_1 a středu O_1 téže jest rovnoběžna s $\overline{^2p\Omega_1}$, popisuje proto bod $^2h_1$, probíhá-li h_1 křivku H_1 kružnici $^2S_1 \cong \Sigma_1$ a bod ^2h v prostoru šroubovici $^2S \cong \Sigma$ o ose ^2O;

půdorys ${}^2O_1$ vzdálen od Ω_1 o délku $\overline{\Omega_1 {}^2O_1} \# \overline{O_1 {}^2h_1}$. Z toho patrno, že

na ploše **P**′ jest soustava povrchových šroubovic ${}^2S$ . . . , podél nichž dotýkají se plochy **P**′ válce, jichž povrchové přímky jsou rovnoběžny s tečnami hrdelní šroubovice H plochy **P**′, neboť příslušný pól zvolili jsme si v půdorysu H_1 šroubovice H.

Jednoduchou úvahou lze však dokázati, že i dle šroubovice S a jejích jednotlivých poloh dotýkají se plochy **P**′ válce směru tečen křivky hrdelné H.

Jsou tudíž na ploše **P**′ tři soustavy povrchových šroubovic, ony dvě soustavy, jichž šroubovice jsou nesouosé s plochou, obsahují křivky, dle nichž se dotýkají plochy válce, opsané směrem tečen hrdelní šroubovice.



Obr. 3.

Dán-li obecně položený světelný paprsek, vyhledejme jeho pól p (v obr. 3. užit pouze orthog. průmět do prvé průmětny $\pi \perp \Omega$, ose šroubovice Σ, určující pohyb plochu **P**′ vytvářející šroubovice S) a hledejme půdorys meze stínu vlastního způsobem obvyklým při plochách šroubových. Kružnice Σ' buď základní, kružnice S' kotalecí kružnicí, jednotlivé body jejího obvodu vytvořují cykloidy, jež jsou půdorysy normálných řezů plochy. Spojme pól p s dotyčníkem h_1 kružnic Σ', S'; průsečík m_1 této přímky s kružnicí S' je půdorysem bodu meze stínu vlastního, ježto $\overline{m_1 h_1}$ pólem p procházející je normálou cykloidy bodem m_1 popisované. Veďme přímku T bodem h_1 kolmo k $\overline{ph_1}$ a bodem m_1 přímku ${}^1T \parallel T$; táž prochází bodem ${}^1h_1$ v S' diametrálném k bodu h_1. Jest proto poměr vzdáleností $\overline{\Omega_1 l} : \overline{\Omega_1 {}^1l}$ přímek T, ${}^1T$ od bodu Ω_1 rovný poměru $\overline{\Omega_1 h_1} : \overline{\Omega_1 {}^1h_1}$ a tudíž stálý. Probíhá-li bod h_1 kružnicí Σ', obaluje T kuželosečku, pro niž je p ohniskem a Σ' kružnicí nad hlavní osou popsanou, obaluje proto i ${}^1T$ kuželosečku, a bod m_1 probíhá její úpatnici.[3]) Z toho vidno: Půdorys meze stínu vlastního plochy **P**$'$ jest úpatnice kuželosečky; lze ji snadno vyrýsovati pomocí dvou kružnic jako křivku cissoidální.

Zvolíme-li paprsek rovnoběžný s tečnou hrdelní šroubovice, spadá pól do kružnice Σ'; půdorys meze skládá se tu ze dvou dotýkajících se kružnic, mez samu tvoří dvě s plochou **P**$'$ nesouosé šroubovice, což již dokázáno v předchozím odstavci.

Při plochách, které mají normálné řezy zkrácené neb prodloužené cykloidy, lze podobným způsobem, jakého jsme užili při plochách **P**$'$, dokázati, že obsahují tři systemy povrchových šroubovic, jeden z nich jest vyplněn křivkami souosými s plochou, druhé dva obsahují křivky šroubové s plochou nesouosé, dle nich však dotýkají se plochy uvažované válce.[4]) I průmět meze stínu do roviny kolmé k ose těchto obecných ploch šroubových lze jednoduše sestrojiti užitím světelného pólu příslušného k danému paprsku.

Konečně dlužno podotknouti, že, ježto plochy uvažované jsou translační, lze na ně přenésti obecné vlastnosti tohoto druhu ploch. (Plochy vinutých sloupů o norm. řezu kruhovém jsou jen zvláštními plochami z druhu uvažovaného.)

---

[3]) Srov. G. Loria, Sp. eb. Kurven, II. díl str. 77 a Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, str. 210.

[4]) Normálný řez C plochy **P** lze vytvořiti bodem c pevně spojeným buď s kružnicí S'_1 o středu O'_1 kotálející se po kružnici Σ'_1 o středu Ω_1, neb s kružnicí S''_1 o středu O''_1 kotálející se po kružnici Σ''_1 se Σ'_1 soustředné. Opišme kol O'_1 poloměrem $\overline{O'_1c}$ kružnici $\check{S}'_1$ a kol O''_1 poloměrem $\overline{O''_1c}$ kružnici $\check{S}''_1$. Tu představují nám, předpokládaje promítání směrem osy Ω plochy **P** do roviny $\pi \perp \Omega$, $\Sigma'_1 \Sigma''_1$ průměty dvou, s plochou **P** souosých šroubovic Σ', Σ''; $\check{S}'_1$, $\check{S}''_1$ průměty dvou povrchových, s plochou nesouosých různým systémům náležejících šroubovic $\check{S}'$, $\check{S}''$. Jich šroubovým pohybem, šroubovicemi Σ', Σ'' definovaným, lze plochu **P** vytvořiti. Lze pak snadno dovoditi, že podél šroubovice $\check{S}'$ ($\check{S}''$) dotýká se plochy **P** válec směru tečny šroubovice Σ'' (Σ'). Při plochách **P**$'$ obě křivky $\Sigma'\Sigma''$ spadají s hrdelní šroubovicí plochy v jedinou křivku.