Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 1, 140--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121666

Úlohy.

Z mathematiky.

1.

Stanovte součet řady $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ *v níž jest*

$$a_n = \alpha\, a_{n-1} + \beta^{n-1}.$$

Jan Svoboda, úř. hypot. banky v Brně.

2.

V městě vypukla epidemická nemoc probíhající tak, že postižený po dvou dnech umírá a že po oba dny nakazí dosud zdravého člověka. Kolik úmrtí bude n-tý den a kolik za n dní vůbec, je-li n dosti velké. Dr. *Karel Čupr.*

3.

Nalézti součet racionálných členů rozvoje $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{3})^{31}$.

Prof *Rud. Hruša.*

4.

Dány jsou tři nekonečné řady konvergentní

$$S_1 = 1 + \sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \ldots$$
$$S_2 = 1 - \sin\alpha + \sin^2\alpha - \sin^3\alpha + \ldots$$
$$\Sigma = 1 - \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \cos^3 2\alpha + \ldots$$

Jest dokázati vztahy:

$$S_1 S_2 = 2\Sigma,\ S_1 + S_2 = 4\Sigma.$$

Podobně pro nekonečné řady:

$$S'_1 = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$
$$S'_2 = 1 - \cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \ldots$$
$$\Sigma' = 1 + \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^3 2\alpha + \ldots$$

jest dokázati vztahy

$$S'_1 S'_2 = 2\ \Sigma',\ S'_1 + S'_2 = 4\Sigma'.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

5.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\cos\frac{x-y}{2} : \cos\frac{x+y}{2} = \varrho$$

$$\sin x : \sin y = p : q.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

6.

Ve čtyřúhelníku ABCD půlí úhlopříčna AC úhel při vrcholu A; nalézti úhly a plochu jeho, dány-li délky stran a, b, c, d. Prof. *Rud. Hruša.*

7.

Dokázati jest platnost této relace pro tětivový čtyřúhelník

$$(a^2 - c^2) : (b^2 - d^2) = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta).$$

Prof. *Rud. Hruša.*

8.

Plocha čtyřúhelníku harmonického (v němž $ac = bd$) jest dána formulí

$$P = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d)(a - b + c - d)\, tg\, \omega,$$

značí-li ω úhel sevřený úhlopříčnami. Prof. *Rud Hruša.*

9.

Výšky trojúhelníku jsou kořeny rovnice třetího stupně

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Vyjádřiti poloměr kružnice trojúhelníku vepsané pomocí koefficientů rovnice té. *Fr. Svoboda* (Brno).

10.

Jest dán libovolný trojúhelník. Sestrojte trojúhelník podobný tak, aby jeho vrcholy ležely na třech daných rovnoběžkách. Kolikaznačná jest úloha ta?

Určete součet ploch trojúhelníků, které řešením této úlohy dostaneme, jsou-li dány úhly a vzdálenost rovnoběžek m a n.

Dr. *Bohuslav Němec.*

11.

Z jistého bodu vycházejí tři polopaprsky. Jest sestrojiti trojúhelník o stranách a, b, c tak, aby jeho vrcholy ležely na těchto paprscích. Dr. *Bohuslav Němec.*

12.

Rovnoramenný trojúhelník proměníme v jiný rovnoramenný o témž obvodě tak, aby základna druhého rovnala se rameni prvého. Dokázati, že opakováním této konstrukce dospěli bychom k trojúhelníku rovnostrannému. Prof. *Jan Kroupa.*

13.

Jaký musí býti poloměr a výška válcové nádoby plechové určitého objemu a tloušťky dna i pláště, aby váha byla co nejmenší? Prof. *Jan Kroupa.*

14.

Ze všech kulových úsečí o daném povrchu nalézti onu, která má největší objem. Šk. rada *Václav Hübner.*

15.

Do úseče parabolické, již vytíná tětiva kolmá k ose, vepsati pravoúhelník největší plochy a určiti plochu tu.

Šk. rada *Václav Hübner.*

16.

Spustíme-li z některého bodu M na obvodě kruhu trojúhelníku ABC opsaného kolmice na výšky, leží paty kolmic, bod M a průsečík V výšek trojúhelníku na jedné kružnici. Které jest geometrické místo středů všech takových kružnic?

Prof. Dr. *Jos. Tomáš.*

17.

Dány jsou dvě paraboly $y^2 = 2px$, $x^2 = 22y$; *tečny jedné buďtež polárami druhé! Které jest geometrické místo polů? Jaký jest vztah mezi průsečnými body a společnými tečnami dvou a dvou ze všech tří křivek?* Prof. Dr. *Jos. Tomáš.*

18.

Kruhový přímý kužel jest proťat rovinou půlící úhel α, *jejž svírá pobočná hrana se základnou. Jak veliký jest úhel* α, *je-li plocha vzniklého řezu elliptického* k*-krát větší než základna kužele? (Spec., je-li* $k = \frac{1}{4}\sqrt{6}$.) *Jaké hodnoty může* k *míti?*
Dr. *Vladimír Živanský.*

19.

Z bodu M *uvnitř ellipsy vedeny jsou k ní normály. Paty jejich určují čtyřúhelník, v němž nechť jest* P *průsečík spojnic středů protilehlých stran. Ukázati, že bod* P *probíhá přímku jdoucí středem, probíhá-li bod* M *rovněž přímku jdoucí středem. Kdy jsou obě přímky spolu sdruženy?*
Dr. *Vladimír Živanský.*

20.

Dokázati, že geometrické místo vrcholů parabol, jež dotýkají se ramen pravého úhlu a jichž osy jsou spolu rovnoběžny, jest přímka. Dr. *Vladimír Živanský.*

Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojiti kouli, je-li dán bod A *na povrchu, tečna* t *a přímka* p *procházející jejím středem.*
Šk. rada *Václav Hübner.*

2.

Sestrojiti rotační plochu kuželovou danou vrcholem, dvěma body na povrchu a podmínkou, že z daného bodu lze k ní vésti tečné roviny svírající úhel φ (na př. $\varphi = 90^0$).

Jos. Klíma, as. čes. techn.

3.

Sestrojiti nejmenší a největší plochu kulovou jdoucí dvěma body A, B a protínající rovinu ϱ v kružnici o poloměru r.

Jos. Klíma, as. čes. techn.

4.

Sestrojiti rotační hyperboloid obsahující dvě dané mimoběžky a, b a bod M. *Jos. Klíma*, as. čes. techn.

5.

V prostoru dány jsou dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$; najíti přímku takovou, aby bylo možno oba trojúhelníky stotožniti otočením kolem této přímky a posunutím podél ní. Prof. *Jan Kroupa.*

6.

Dány jsou čtyři mimoběžky. Jednu z nich posunouti parallelně, aby měla od zbývajících tří stejné nejkratší vzdálenosti. Prof. *Jan Kroupa.*