Antonín Sucharda

Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 28 (1899), No. 5, 336--351

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121659`

Sirník, kyanid, iódid, sirnatan, bromid, podvojná sloučenina s ammoniakem, chlórid.

Řadu tuto vystopoval *W. Ostwald* *) elektrometricky. V opačném pořádku než jak jmenováno, vzrůstají elektromotorické síly kombinací:

| | | |
|---|---|---|
| $^{1}/_{10}$-norm. roztok $AgNO_3$ oproti | $AgCl$ v $^{1}/_{1}$-norm. roztoku $KCl$ | 0·51 volt |
| | $^{1}/_{1}$-norm. ammoniaku | 0·54 „ |
| | $AgBr$ v $^{1}/_{1}$-norm. roztoku $KBr$ | 0·64 „ |
| | $^{1}/_{1}$-norm. roztoku $Na_2S_2O_3$ | 0·84 „ |
| | $AgI$ v $^{1}/_{1}$-norm. roztoku $KI$ | 0·94 „ |
| | $KCN$ | 1·31 „ |
| | $^{1}/_{1}$-norm. roztoku $Na_2S$ | 1·36 „ . |

Další důsledky podobného způsobu, jichž bylo by lze značně nahromaditi, jsou rázu převážně chemického, pročež na těchto ukázkách zde zatím přestati možno.

---

# Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda**, t. č. v Paříži.

(Dokončení.)

8. Vrátíce se k soustavě rovnic (24), vložme do ní $y = 0$, $v = 0$.

Vymizí tu rovnice druhá a čtvrtá, kdežto z ostatních souhlasně vyjde

$$x^2 - z^2 = 0$$
$$x^2 - z^2 = 0,$$

z čehož patrno, že soustavě té hoví též body

*) *Ostwald,* Allgemeine Chemie, svaz. II. 1. str. 882.

$$(31)\qquad \begin{array}{ll} x = z & x = -z \\ y = 0 & y = 0 \\ v = 0 & v = 0; \end{array}$$

vložíce konečně $z = 0$, $v = 0$, obdržíme ze soustavy (24) souhlasné výsledky

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ -x^2 + y^2 &= 0, \end{aligned}$$

z čehož zjevno, že jí náležejí též body

$$(32)\qquad \begin{array}{ll} x = y & x = -y \\ z = 0 & z = 0 \\ v = 0 & v = 0. \end{array}$$

Poněvadž, jak známo, $v = 0$ znamená rovnici roviny úběžné, poznáváme v bodech (31) oba úběžné body hyperboly řídící $A_s$, společné všem hyperbolám soustavy $A$, v bodech pak (32) oba úběžné body hyperboly tvořící $B_s$, společné všem hyperbolám soustavy $B$. To jsou tedy jediné čtyři dvojné body plochy hyperbolo-hyperbolické.

O dvojné kuželosečce (26) stůj zde ještě toto:

Křivce té patrně náleží bod

$$(33)\qquad y = iR,\ z = ir.$$

Vložíme-li hodnoty tyto za $m$, $n$ do rovnic (30), obdržíme souhlasně

$$\begin{aligned} (Ry - rz) &= 0 \\ (Ry - rz) &= 0 \end{aligned}$$

na důkaz, že obě tečné roviny bodu (33) splynou, t. j. že tento bod jest bodem uniplanarním.

Snadno jest poznati, že plocha má ještě tři takové body, vesměs v dvojné kuželosečce obsažené. Jejich souřadnice jsou

$$(34)\qquad \begin{array}{lll} y = iR & y = -iR & y = -iR \\ z = -ir & z = ir & z = -ir \\ x = 0 & x = 0 & x = 0. \end{array}$$

Tyto čtyři body jsou *uniplanarné* čili *kuspidalné* body plochy.

9. Jest na bílední, že úvahy odst. 7. počínající zcela obdobným řádem též pro ostatních pět druhů plochy P lze provésti a že nabude se výsledků obdobných: v každé ploše v rovině $x = 0$ kuželosečka dvojná, krom toho čtyři úběžné body dvojné, ve dvojné kuželosečce pak čtyři body kuspidalné.

Vycházejí zajisté pro $x = 0$ z rovnic (4) až (9) výsledky, z nichž vidno, že dvojná kuželosečka plochy kruho-kruhové a plochy hyperbolo-hyperbolické typu $c$ jest rovnostranná hyperbola o realné ose $Y$, dvojná křivka plochy hyperbolo-hyperbolického typu $a$ a $b$ rovnostranná hyperbola o imaginarné ose v $Y$, dvojná křivka plochy hyperbolo-kruhové typu $a$ imaginarná křivka kruhová a dvojná křivka plochy hyperbolo-kruhové typu $b$ realná křivka kruhová.

Rovněž souřadnice bodů dvojných a bodů kuspidalných ve všech těch případech bylo by lze přímo napsati.

Že má plocha P čtyři úběžné přímky, analyticky dokážeme užitím homogenních souřadnic. Dosadíme-li za $x$, $y$, $z$ po řadě $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$ do rovnic (4) až (9), odstraníme-li pak $v$ z jmenovatele a píšeme-li všude $v = 0$, obdržíme jako výsledek homogenní funkci stupně čtvrtého v Cartesiových souřadnicích $x$, $y$, $z$; ta značí kuželovou plochu 4. stupně, jejíž střed jest v počátku soustavy, tedy ve středu plochy P, a jež má s plochou P společnou úběžnou křivku. Rovnice její zní pro plochu, jež dána rovnicí (4), takto:

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 + 4x^2y^2 = 0, \tag{35}$$

obdobně pak pro všech ostatních pět druhů.

Lze ji psáti následovně:

$$[x + i(y+z)]\,[x + i(y-z)]\,[x - i(y-z)]\,[x - i(y+z)] = 0 \tag{36}$$

a podobně i všechny ostatní.

Poznáváme z toho, že řečený kužel bikvadratický pokaždé degeneruje ve čtyři roviny. Také srovnáním s rovnicemi (31), (32) ihned se shlédne, že každá z těch rovin prochází dvěma ze čtyř úběžných dvojných bodů plochy translační. Jelikož krom toho jde též středem jejím, musí obsahovati jednu z asymptot kuželoseček $A_s$, $B_s$. S tím již souvisí, že rovina ta jest asymptotickou rovinou plochy P, kužel bikvadratický, z těchto čtyř rovin složený, tedy kuželem asymptotickým plochy té. Roviny ty z jiných ještě důvodů sluší zváti kuspidalnými.

Úběžné jejich přímky jsou úběžnými přímkami plochy P a každá patrně dvěma ze čtyř úběžných dvojných bodů plochy prochází.

Ze $\binom{4}{2} = 6$ přímých spojnic čtyř úběžných bodů dvojných dvě tedy nejsou přímkami plochy. Snadně se pozná, že to jsou úběžné přímky rovin osnovy $\overline{A}$ a osnovy $\overline{B}$.

Z rovnice (36) a z příslušných ostatních, jež tu pro krátkost vynechány, lze poznati, že plochy, dané rovnicemi (4), (5), (6) mají po čtyřech imaginarných, plochy dané rovnicemi (7), (8), (9) po čtyřech realných přímkách úběžných. Také z tvaru činitelů v rovnicích těch ihned se vidí, že ze $\binom{4}{2} = 6$ vzájemných průsečíků úběžných přímek ploch (4), (5), (6) jsou vždy dva realné, při (7), (8), (9) všechny realné.

Tím vyříditi lze též otázku realnosti a imaginarnosti dvojných bodů v nekonečnu.

Vymítíme-li totiž z těch šesti průsečíků pokaždé ony dva, jež mají $x = 0$ a tudíž dvojné kuželosečce náleží, zbudou čtyři úběžné dvojné body.

Vyšetříme-li pronik jedné ze čtyř rovin asymptotických čili kuspidalných s plochou, za příklad volíce třeba hyperbolohyperbolickou typu $a$, obdržíme, spojíce s její rovnicí (7) rovnici takové roviny kuspidalné, na př.

$$x + y + z = 0,$$

vyloučením $z$ ihned:

$$4R^2x^2 + 4(R^2 - r^2)\,xy - (R^2 - r^2)^2 = 0 \tag{37}$$

na důkaz, že křivka průsečná, jež měla by býti stupně čtvrtého, jest jednoduchou kuželosečkou. Vysvětliti to lze jenom tím, že v rovině kuspidalné úběžná přímka plochy chová se jako dvojnásobná. V jiných rovinách přímkou tou procházejících se to neshledává.

Vzhledem ku přímkám plochy P budiž dovoleno ještě toto poznamenati:

Užitím Geiserovy jisté transformace dokázal jsem v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky roč. XV. pag. 149. cestou analytickou, že plocha mimo čtyři úběžné přímky jiných nemá. Jelikož každou přímku, jež dvěma dvojnými body prochází, jí náležejíc, čítati sluší za čtyrnásobnou (srov. Salmon-Fiedler, Anal. G. d. R., II. díl, 2. vyd. pag. 412.) představují ty čtyři přímky celkem $4 \cdot 4 = 16$ přímek plochy, počet to, jejž Clebsch stanovil pro přímky každé plochy 4. stupně s dvojnou kuželosečkou.

10. K zajímavým vlastnostem ploch P, jež se mi podařilo cestou synthetickou objeviti,*) náleží též ona, že vlastní plocha kuželová, ploše P z libovolného bodu její křivky dvojné jako středu dotyčně opsaná, rozpadá se ve dvě plochy kuželové kvadratické.

V následujícím budiž dovoleno provésti počtářskou verifikaci tohoto tvrzení při ploše hyperbolo-hyperbolické typu $a$, jejíž rovnice dána číslem (7).

Tato plocha P protíná se s první plochou polarnou onoho dvojného bodu, jehož souřadnice buďtež 0, $m$, $n$, v křivce, podle níž se jí dotýká, jak obecně známo, řečená plocha kuželová. Abychom snáze rovnici první plochy polarné obdrželi, transformujeme plochu na počátek 0, $m$, $n$. Rovnice její jest pak tato:

$$(38) \qquad \begin{aligned}&(x^2 + y^2 - z^2 + 2ym - 2zn)^2 \\ &\quad - 4x^2 (y^2 + 2ym + R^2 + m^2) = 0.\end{aligned}$$

Abychom rovnici první polarné plochy Q obdrželi, učiňme rovn. (38) homogenní, kladouce za $x$, $y$, $z$ $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$, differencujeme pak dle $v$, načež do výsledku vložme $v = 1$; tím obdržíme

$$(39) \qquad \begin{aligned}&(x^2 + y^2 - z^2 + 2my - 2nz)(my - nz) \\ &\quad - 2x^2 (my + m^2 + R^2) = 0\end{aligned}$$

jakožto rovnici plochy Q, jež s P určuje dotyčnou křivku.

*) Srov. mé pojednání: „Über eine Gattung Rückungsflächen.“ Sitzber. d. k. Akad. d. W. in Wien, Bd. XCII., Abth. II., Juli-Sept. 1885, pag. 844.

Libovolná plošná přímka kuželové plochy dotyčné, procházejíc počátkem a křivku dotyku pronikajíc v bodě $x_1, y_1, z_1$ má rovnice:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x \tag{40}$$

$$z = \frac{z_1}{x_1} x. \tag{41}$$

I jest rovnice hledané plochy kuželové výsledkem eliminace veličin $x_1$, $y_1$, $z_1$ z rovnic (38), (39), (40), (41) *). Dosadíce z rovnic (40) a (41) za $y$, $z$ do (38) a (39), obdržíme je jako funkce $x_1$ ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^2 (Ax_1^2 + Bx_1 + C) &= 0 \\ Dx_1 + E &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

při čemž jest

$$\begin{aligned} A &= -(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \\ B &= 4x[my(x^2 - y^2) + nz(x^2 - z^2) + yz(ny + mz)] \\ C &= 4x^2[(m^2 + R^2)x^2 - (my - nz)^2] \\ D &= my(x^2 - y^2) + nz(x^2 - z^2) + yz(ny + mz) \\ E &= 2x[(m^2 + R^2)x^2 - (my - nz)^2]. \end{aligned} \tag{43}$$

Výsledkem eliminace z rovnic (42) je součin dvou činitelů, z nichž prvým, odpovídajícím hodnotě $x_1 = 0$, jest $E = 0$, druhým známý Sylvestrův determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & O \\ O & D & E \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant ten lze, poněvadž $B = 4Dx$ a $C = 2Ex$, psáti takto:

$$\Delta = E \begin{vmatrix} A & 4Dx & 2x \\ D & E & 0 \\ O & D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\Delta = E(AE - 2D^2x) = 0,$$

nebo konečně, píšeme-li

*) Píšeme-li v (38) a (39) všade $x_1$, $y_1$, $z_1$ místo $x$, $y$, $z$.

$$(44)\qquad E = 2Fx,$$
$$\Delta \equiv 2Fx\,(AF - D^2) = 0.$$

Zní tedy úplný výsledek eliminace, vynecháme-li součinitel $-4$, takto:

$$x^2 F^2 (D^2 - AF) = 0,$$

a to jest rovnice úplného kužele dotyčného, jíž po krátké redukci činitele ozávorkovaného lze dáti tvar

$$(45)\qquad x^4 F^2 GH = 0,$$

jestliže totiž vyjmeme z $D^2 - AF$ činitel $x^4$, činitel pak zbývající položíme rovným $GH$.

Jesti tu

$$(46)\qquad GH = (m^2 + R^2)(x^4 + y^4 + z^4) - 2x^2y^2(m^2 + R^2)$$
$$- 2\,x^2z^2(m^2 + R^2) + 2y^2z^2(m^2 + 2n^2 - R^2)$$
$$+ 4\,mnyz\,(x^2 - y^2 - z^2).$$

Z (45) poznáváme, že úplný kužel dotyčný skládá se ze tří částí 4. stupně:

$$x^4 = 0, \qquad F^2 = 0, \qquad GH = 0.$$

Část prvá, $x^4 = 0$, značí rovinu dvojné hyperboly, jako čtyrnásobnou, v souhlase s tím faktem, že dvojná křivka tato jest též dvojnou křivkou proniku ploch P a Q, tudíž zastupuje jednoduchou křivku 4. stupně, která jako řídící s vrcholem $(0, m, n)$ určuje kužel bikvadratický, jenž přešel v rovinu.

Část druhá, $F^2 = 0$ zní, jak ukazuje rovnice (44) a poslední z rovnic (43), takto:

$$(47)\qquad [(m^2 + R^2)\,x^2 - (my - nz)^2]^2 = 0.$$

Význam její poznali jsme v odst. 7. Bylo tam ukázáno, že výraz v závorkách, s nullou srovnán, značí obě roviny tečné v bodě $(0, m, n)$ ku ploše P. Mocnina druhá ukazuje, že sluší každou z těch rovin počítati za dvojnásobnou.

Část konečně

$$GH = 0,$$

spořádána dle mocnin mocněnce $x$, zní:

$$(48)\quad x^4(R^2+m^2)-2x^2[(R^2+m^2)(z^2+y^2)-2mnyz] \\ +(m^2+R^2)(y^4+z^4)+2(m^2+2n^2-R^2)y^2z^2 \\ -4mnyz(y^2+z^2)=0.$$

Z toho jde řešením podle $x^2$, hledíme-li zároveň k rovnici (27),

$$x^2_{1,2}=\frac{(m^2+R^2)(y^2+z^2)-2(mn\mp Rr)yz}{m^2+R^2},$$

takže lze rovnici (48) psáti takto:

$$(49)\quad [(x^2-y^2-z^2)(m^2+R^2)+2yz(mn-Rr)] \\ .[(x^2-y^2-z^2)(m^2+R^2)+2yz(mn+Rr)]=0.$$

Patrno z toho, že třetí část bikvadratická úplného kužele dotyčného, tak řečený vlastní kužel dotyčný, v pravdě degeneruje ve dva kužely kvadratické. Každý z nich má za rovnici jeden z obou činitelů rovnice (49) srovnaný s nullou. Počátkem soustavy jest společný střed obou kuželů, daný to bod kuželosečky dvojné.

Položíce do rovnic těch $y=\delta$, obdržíme z nich

$$(m^2+R^2)(x^2-z^2)+2\delta(mn-Rr)z-(m^2+R^2)\delta^2=0$$
$$(m^2+R^2)(x^2-z^2)+2\delta(mn+Rr)z-(m^2+R^2)\delta^2=0,$$

i jest zřejmo, že plochy kuželové obě protínají se rovinami soustavy B plochy translační v hyperbolách podobných a homothetických s hyperbolami soustavy $B$.

Substitucí

$$z=\varepsilon$$

dojde se obdobného výsledku na důkaz, že se plochy kuželové rovinami soustavy $A$ protínají tolikéž v hyperbolách podobných a homothetických, tenkráte s hyperbolami soustavy $A$. Že vlastní plocha kuželová dotyčná, z těchto dvou kvadratických složená, prochází úběžnými dvojnými body plochy P, také jest z toho zřejmo. Obdržímeť z rovnic (49) pro $z=0$

$$(x^2-y^2)^2=0,$$

pro $y=0$

$$(x^2-z^2)^2=0,$$

jakožto rovnice čtyr plošných přímek oběma kuželům společných a úběžnými dvojnými body plochy P procházejících.

Konečně ukazuje substituce

$$x = 0,\ y = \pm Ri - m,\ z = \mp ri - n$$

do prvního činitele rovnice (49), a substituce

$$x = 0,\ y = \pm Ri - m,\ z = \pm ri - n$$

do druhého činitele jejího, dbáme-li při tom též rovnice (27), že každý z obou svrchu řečených kuželů kvadratických prochází dvěma ze čtyr kuspidalných bodů plochy P, o nichž jsme jednali koncem odst. 8.

Dosadíme-li do rovnic (49) $m = Ri$, $n = ri$, t. j. souřadnice jednoho z kuspidalných bodů plochy P, obdržíme dotyčné kužely plochy translační z tohoto bodu kuspidalného jako středu.

První z obou rovnic zní tu

$$yz = 0, \tag{50}$$

druhou z nich, poněvadž tu $m^2 + R^2 = 0$ a zároveň $mn + Rr = 0$, dlužno psáti nejprve ve tvaru

$$(x^2 - y^2 - z^2)\,\frac{m^2 + R^2}{mn + Rr} + 2yz = 0$$

a pak vymeziti zlomek tam obsažený, který dosazením daných za $m$ a $n$ hodnot stává se výrazem neurčitým. Známým způsobem*) obdržíme tu

$$\Big/^{Ri} \Big/^{ri} \frac{m^2 + R^2}{mn + Rr} = \frac{2Rr}{R^2 + r^2},$$

načež horní rovnice nabývá tvaru

$$(x^2 - y^2 - z^2)\,Rr + yz\,(R^2 + r^2) = 0. \tag{51}$$

Z výsledků (50), (51) vychází na jevo, že se jeden z obou kuželů rovnicemi (49) daných rozpadá zde v obě singularné roviny, daným kuspidalným bodem procházející, takže zbývá jediný vlastní kužel kvadratický, daný rovnicí (51).

---

*) Sr. Dr. F. J. Studnička: „Základové vyšší mathematiky", díl I., pag. 87.

11. Rovnice (IV.) v odst. 5. uvedená, která pro $P = 0$ ihned dává $M^2 = 0$ jako rovnici dvojné kuželosečky plochy P, o níž v odst. 7. bylo jednáno, vede po náležité úpravě také k *bitangentialným rovinám* plochy uvažované. Uvedeme-li totiž rovnici tu*) příslušným doplněním na obou stranách na tvar

$$(V) \qquad (M + 2\lambda P^2)^2 = 4P^2 (N + \lambda M + \lambda^2 P^2),$$

při čemž $\lambda$ znamenej libovolnou konstantu, značí ozávorkovaný výraz na pravé straně, srovnáme-li jej s nullou, plochu druhého stupně, která se translační plochy dotýká v křivce čtvrtého stupně, podle níž sama seče plochu

$$(52) \qquad M + 2\lambda P^2 = 0.$$

Určíme-li nyní $\lambda$ tak, aby byla plocha

$$(53) \qquad N + \lambda M + \lambda^2 P^2 = 0$$

plochou kuželovou, bude každá její plošná přímka plochu (52) protínati ve dvou bodech, pročež tedy obsahovati dva body řečené křivky čtvrtého stupně, z čehož následuje, že bude tato kuželová plocha obalovou bitangentialných rovin plochy P. Přihlédneme-li k významu veličin $N$, $M$, $P$ z rovnice na př. (4) váženému, a dosadíme-li příslušné hodnoty do rovnice (53), nabude tato tvaru následujícího:

$$(54) \quad \lambda(\lambda + 1) x^2 + \lambda y^2 - (\lambda + 1) z^2 + r^2 - \lambda (R^2 - r^2) = 0.$$

Podmínka, aby tato plocha byla plochou kuželovou, vyjadřuje se známým determinantem

$$\begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 - \lambda(R^2 - r^2) \end{vmatrix} = 0$$

a zní tedy kratčeji

$$\lambda^2 (\lambda + 1)^2 [r^2 - \lambda (R^2 - r^2)] = 0.$$

---

*) Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie des Raumes“, II. díl, I. vyd. pag. 358.

Je z toho zjevno, že plocha (53) v pěti případech stává se plochou kuželovou.

Pro $\lambda_{1,2} = 0$ plyne z rovnice (54)

$$z^2 - r^2 = 0,$$

plocha kuželová zvrhá se tu tedy po dvakrát ve dvě nám již z 6. odst. známé tečné roviny singularné, pro $\lambda_{3,4} = -1$ vychází dosazením do rovnice (54) pokaždé

$$y^2 - R^2 = 0;$$

i zde zvrhá se plocha kuželová po dvakrát ve dvě roviny singularné, známé z odst. 6.

Pro $\lambda$ konečně, plynoucí z rovnice

$$r^2 - \lambda(R^2 - r^2) = 0,$$

tedy pro

$$\lambda_5 = \frac{r^2}{R^2 - r^2},$$

plyne z rovnice (54)

$$R^2 r^2 x^2 + r^2 (R^2 - r^2) y^2 - R^2 (R^2 - r^2) z^2 = 0, \tag{55}$$

rovnice to vlastního kužele bitangentialného, jehož střed jest v počátku soustavy, tudíž ve středu plochy P. Jsa dotyčným kuželem plochy té, prochází (sr. konec odst. 10.) jejími body dvojnými i body kuspidalnými.

Jest patrno, že podobným způsobem nabýti lze zcela obdobných výsledků i při všech ostatních plochách translačních, určených rovnicemi (4) až (9).

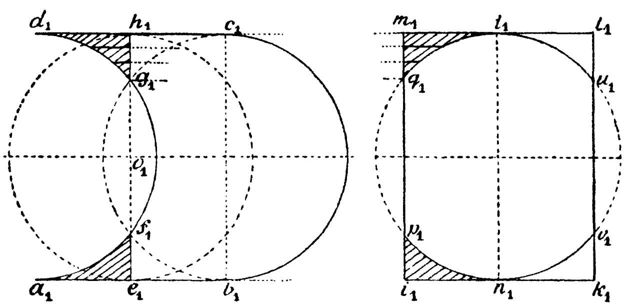
Každá tečná rovina kužele bitangentialného, jaký podává rovnice (55), jest bitangentialnou rovinou plochy P, dotýkajíc se jí ve dvou bodech, dle jejího středu souměrných. Rovina taková seče plochu P v křivce čtvrtého stupně, která má čtyři body dvojné, dva totiž ve dvojné kuželosečce, další dva v oněch dvou bodech, v nichž se plochy P dotýká. Křivka taková však, jak známo, zvrhá se ve dvě kuželosečky.

Takto poznáváme, že translační plochy dané rovnicemi (4) až (9) mají každá mimo dvě známé soustavy kuželoseček, z nichž jedny jsou shodné a homothetické s křivkou $A$, druhé s křivkou $B$, ještě třetí soustavu kuželoseček v rovinách středem plochy procházejících, jež určitý kužel kvadratický obalují.

Netřeba připomínati, že veškeré výsledky, jež jsme v pojednání tomto odvodili pro třikrát normalně souměrné plochy translační, snadně dají se applikovati i na *všechny* ostatní *centrické translační plochy čtvrtého stupně.*

Některé poznámky o křivoznačných křivkách těchto ploch ponecháváme si k jiné příležitosti.

12. Na závěrek budiž vyšetřen krychlový obsah tělesa, omezeného plochou kruho-kruhovou a vzniklého tím, že by se kruh $B$ o poloměru $r$ svým středem posouval po kružnici $A$, poloměru $R$, maje rovinu kolmou k její rovině. Ploše kruhokruhové, již tu vytvoří hrana kruhu tvořícího, přísluší v soustavě souřadné pravoúhlé známá rovnice (4), mají-li $A$, a $B$ k rovinám souřadným známou polohu, jakáž se v odst. 3. vypisuje.



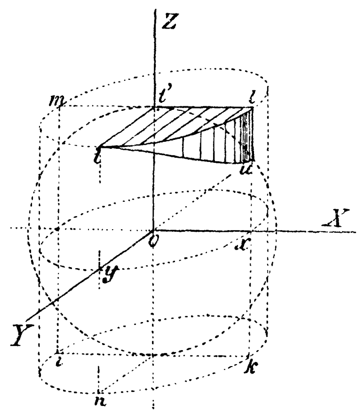

Obr. 2.

Celé těleso skládá se ze dvou částí shodných, dle roviny dvojné hyperboly normalně souměrných, i spočívá jediná obtíž řešení v tom, nalézti krychlový obsah jednoho z obou stejných cípů v připojeném náčrtku (obr. 2.) čárkovaných. Jinak jest práce snadná. Rovná se zajisté krychlový obsah části *abcd* obsahu přímého válce kruhového *iklm* o poloměru $r$ a výšce $2R$, takže jest

$$O_{abcd} = 2\pi R r^2. \tag{56}$$

Do tohoto válce uveďme transformací, jakou sám vznikl z tělesa *abcd*, též obě části *aef*, *dgh*, *) i jest z obr. 2. patrno, že je z něho vytíná válec kruhový přímý o poloměru $R$, jehož osa osu onoho kolmo rozpoluje.

Jde nyní o integraci takové části. Volíme-li (obr. 3.) osu válce *iklm* za osu $Z$ a střed jeho v počátku soustavy, lze osu válce druhého voliti v ose $Y$. Za příčinou souměrnosti obou válců k rovinám souřadným stačí nyní zabývati se kubaturou jen polovice části, v obr. 2. *mtq* nebo *tlu* zvané, tudíž tělesa *tt'lu*




Obr. 3.

(obr. 3.), omezeného částmi oblin obou válců (*tlu*, *tt'u*), čtvrtkruhem *tt'l* a rovnou stěnou *t'lu*. Značíme-li jeho obsah $O_{tu}$, obsah tělesa *xoyut't* pak $O_{xt}$, bude především

$$(57) \qquad O_{tu} = \frac{\pi r^2 R}{4} - O_{xt}.$$

Jest pak

$$O_{xt} = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2}\, dy = \int_0^r \sqrt{R^2-x^2}\, \sqrt{r^2-x^2}\, dx.$$

Integralu tomu násobením a dělením součinem obou odmocnin za znamením integrace lze dáti tvar

*) $aef = inp$; $dgh = mqt$.

$$O_{xt} = \int_0^r \frac{x^4 dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}} - (R^2+r^2)\int_0^r \frac{x^2 dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}}$$

$$+ R^2 r^2 \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2)(r^2-x^2)}}$$

čili kratčeji:

$$O_{xt} = I_1 - (R^2+r^2) I_2 + R^2 r^2 I_3, \tag{58}$$

vložíme-li $I_1$, $I_2$, $I_3$ za příslušné integraly.

Podle známého vzorce redukčního vychází však

$$I_1 = \Big/_0^r \frac{x}{3}\sqrt{R^2r^2-x^2(R^2+r^2)+x^4} + \frac{2}{3}(R^2+r^2) I_2 - \frac{R^2r^2}{3} I_3,$$

dosazením čehož do (58) plyne:

$$O_{xt} = \Big/_0^r \frac{x}{3}\sqrt{R^2r^2-x^2(R^2+r^2)+x^4} - \frac{1}{3}(R^2+r^2) I_2 + \frac{2}{3} R^2 r^2 I_3. \tag{59}$$

Nutno tedy jen určiti $I_2$ a $I_3$.

Substitucí

$$x = r \sin \varphi \tag{60}$$

vychází tu

$$I_3 = \frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{61}$$

pak $k = \frac{r}{R}$, podobně pak

$$I_2 = \frac{r^2}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

čili užitím vhodné stejniny:

$$(62)\qquad I_2=\frac{r^2}{Rk^2}\left[RI_3-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\right].$$

Substitucí z rovnic (62) a (61) do rovnice (59) obdržíme, prohlédajíce též při prvém členu k relaci (60), toto:

$$(63)\qquad O_{xt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}Rr^2\sin 2\varphi\,.\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

$$-\frac{1}{3}R(R^2-r^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{1}{3}R(R^2+r^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

při čemž $k=\frac{r}{R}$.

Vyjadřuje se tudíž hledaný obsah krychlový elliptickým integralem 1. a 2. druhu.

Poněvadž pak (srv. Dr. F. J. Studnička: „Základové vyšší mathematiky“, díl II., pag. 70. a 71.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{k}{2}\right)^2-3\left(\frac{1.k^2}{2.4}\right)^2-5\left(\frac{1.3.k^3}{2.4.6}\right)^2-\ldots\right],$$

obdrží se konečně, jelikož prvý sčítanec pravé strany rovnice (62) rovná se nulle, pro hledaný krychlový obsah toto:

$$O_{xt} = -\frac{R}{6}(R^2-r^2)\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]$$

$$+\frac{R}{6}(R^2+r^2)\pi\left[1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2-3\left(\frac{1.r^2}{2.4.R^2}\right)^2-5\left(\frac{1.3.r^3}{2.4.6R^3}\right)^2-\ldots\right].$$

Obsah celého tělesa, vzniklého translací kruhu, bude tedy, viz (57) a (58),

$$O = 4\pi Rr^2 - 8\,O_{tu} = 2\pi Rr^2 + 8\,O_{xt}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R\left\{\begin{array}{l} 3r^2+2(R^2+r^2)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}-3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}-\ldots\right] \\ -2(R^2-r^2)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]\end{array}\right\}.$$

V Paříži, 6. prosince 1898.

---

# O osách kuželosečky.

Napsal

**V. Jeřábek,**
professor v Brně.

1. Kružnice K′, ležící v průmětně $\pi$, buďiž stopou a její bod $v_1$ průmětem vrcholu $v$ plochy kuželové $v$K′. Danou přímkou S, která má s kružnicí K′ společné dva body $x$, $y$, položená rovina $\varrho$ nechť protíná plochu $v$K′ v kuželosečce K. Bod $m'$ kružnice K′ budiž stopou jedné povrchové přímky $vm'$ kužele $v$K′, která seče rovinu $\varrho$ v bodě $m$, jehož průmět $m_1$ jest obsažen v průmětu $v_1m'$ přímky $vm'$. Průmět $K_1$ kuželového řezu K prochází body $m_1$, $x$, $y$ a dotýká se kruhové stopy K′ v bodě $v_1$. $K_1$ a K′ jsou v centr. kollineaci dle středu $v_1$ a osy $S_1$.

Kterákoliv rovina s průmětnou $\pi$ rovnoběžná protíná plochu kuželovou $v$K′ v kružnici L a rovinu $\varrho$ v přímce H rovnoběžné s osou kollineace S. Body $h$, $i$, v nichž H a L se protínají, přináležejí kuželovému řezu K, pročež seče průmět $H_1$