Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 5, 357--388

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121658

Úlohy.

Úloha 30.

V pravidelném n-úhelníku P jest vrchol A spojen se středem M strany BC, vrchol B se středem N strany CD, vrchol C se středem O strany DE atd. Přímkami AM, BN, CO,... omezen jest pravidelný n-úhelník P', jehož vrcholy jsou P, Q,...

Je-li a stranou, α úhlem n-úhelníka P, jest

$$P' = \frac{na^2}{4} tg \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(1-2\cos\alpha)^2}{5-4\cos\alpha}.$$

Jakou hodnotu má P' pro n = 3, 4 nebo 6?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Ferd. Šob*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Trojúhelníky ABP, BCL,... jsou shodny, pročež

$$P' = P - n \triangle ABP,$$

čili

$$P' = \frac{na^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - n \triangle ABP. \tag{1}$$

Ježto trojúhelníky ABM a BPM jsou podobny, jest

$$\frac{\triangle ABM}{\triangle BPM} = \frac{AM^2}{BM^2} = \frac{a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2\cos\alpha}{\frac{a^2}{4}},$$

$$\frac{\triangle ABM}{\triangle BPM} = \frac{5-4\cos\alpha}{1}.$$

Odečteme-li v úměře poslední od členů horních členy dolní, bude

$$\frac{\triangle\,ABP}{\triangle\,BPM} = \frac{4\,(1 - \cos\alpha)}{1},$$

a přičteme-li ku členům dolním členy horní, obdržíme

$$\frac{\triangle\,ABP}{\triangle\,ABM} = \frac{4\,(1 - \cos\alpha)}{5 - 4\cos\alpha}.$$

Avšak

$$\triangle\,ABM = \frac{a^2}{4}\sin\alpha,$$

pročež

$$\triangle\,ABP = \frac{a^2\,(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}.$$

Dosadíme-li hodnotu za $\triangle$ ABP do rovnice (1), bude

$$P' = \frac{na^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{na^2\,(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$$

$$= \frac{na^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{8\,(1 - \cos\alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{5 - 4\cos\alpha}\right]$$

$$= \frac{na^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{5 - 4\cos\alpha - 4\,(1 - \cos^2\alpha)}{5 - 4\cos\alpha},$$

a konečně

$$P' = \frac{na^2}{4}\,\frac{(1 - 2\cos\alpha)^2}{5 - 4\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Pro $n = 3$ jest $P' = 0$,

pro $n = 4$ jest $P' = \frac{1}{5}a^2$,

pro $n = 6$ jest $P' = \frac{6}{7}\sqrt{3}a^2$.

Úloha 31.

Přímému trojbokému hranolu jest vepsána koule všech stěn se dotýkající. Jak veliký jest krychlový obsah hranolu, jsou-li dány úhly podstavy

$$\alpha = 62^\circ 42' 30'',\ \beta = 44^\circ 16' 12''$$

a poloměr $r = 5{\cdot}1429$ kruhu podstavě opsaného?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindřich Ševčík*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Obsah hranolu jest

$$K = 2\,\varDelta\,\varrho,$$

kdež $\varDelta$ značí obsah podstavy a ϱ poloměr kruhu podstavě vepsaného.

Dvojnásobná plocha trojúhelníka

$$2\,\varDelta = bc \sin\alpha = 4\,r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

tedy

$$\varDelta = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

a ježto též

$$\varDelta = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = r\varrho\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

čili

$$\varDelta = 4\,r\varrho \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

jest

$$2\varrho = \frac{r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}},$$

pročež

$$K = \frac{2r^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}} = 150{\cdot}64\ \mathrm{dm}^3.$$

Úloha 32.

Dán jest pravidelný osmistěn o hraně h a bod mající od středu jeho vzdálenost k. Dokažte, že součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů osmistěnu jest

$$S = 3h^2 + 6k^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Šubrt,* stud. VI. tř. r. v Písku.)

Pravidelný osmistěn má 3 osy navzájem kolmé, kteréž spojují protější jeho vrcholy. Pokládejme tyto osy za souřadné a buďtež souřadnice daného bodu x, y, z. Potom jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

a vzdálenosti bodu toho od vrcholů osmistěnu stanoveny rovnicemi

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= (x - a)^2 + y^2 + z^2 \\
v_2^2 &= (x + a)^2 + y^2 + z^2 \\
v_3^2 &= x^2 + (y - a)^2 + z^2 \\
v_4^2 &= x^2 + (y + a)^2 + z^2 \\
v_5^2 &= x^2 + y^2 + (z - a)^2 \\
v_6^2 &= x^2 + y^2 + (z + a)^2,
\end{aligned}$$

značí-li a polovici osy osmistěnu, a je-li tedy

$$h^2 = 2a^2.$$

Sečteme-li hodnoty v^2, obdržíme

$$S = 6\,(x^2 + y^2 + z^2) + 6a^2$$

čili

$$S = 3h^2 + 6k^2.$$

Úloha 33.

Jsou-li a, b, c délky hran pravoúhlého rovnoběžnostěnu a k vzdálenost bodu nějakého od středu rovnoběžnostěnu, který jest součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů rovnoběžnostěnu?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Liška,* stud. VII. tř. g. v Brně.) Středem rovnoběžnostěnu pravoúhlého procházejí kolmo ku stěnám jeho osy X, Y, Z.

Buďtež $2a$, $2b$, $2c$ délky hran rovnoběžnostěnu, k vzdálenost bodu daného od středu a x, y, z jeho souřadnice.

Potom jsou vzdálenosti bodu od vrcholů určeny rovnicemi

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\
v_2^2 &= (x + a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\
v_3^2 &= (x - a)^2 + (y + b)^2 + (z - c)^2 \\
v_4^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z + c)^2 \\
v_5^2 &= (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z - c)^2 \\
v_6^2 &= (x + a)^2 + (y - b)^2 + (z + c)^2
\end{aligned}$$

$$v_7^2 = (x - a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2$$
$$v_8^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2.$$

Součet hodnot v^2 jest tedy

$$S = 8\,(a^2 + b^2 + c^2) + 8\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

čili
$$S = 2u^2 + 8k^2,$$
kdež
$$u^2 = 4\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

značí dvojmoc úhlopříčky rovnoběžnostěnu.

Úloha 34.

Bodem (3, 6) vésti přímku tak, aby trojúhelník omezený osami X, Y a touto přímkou měl plochu minimální.

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Bartoš*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Označíme-li úseky přímky na osách písmeny a, b a plochu trojúhelníka P, máme rovnice

$$\frac{3}{a} + \frac{6}{b} = 1$$
$$ab = 2P,$$

z nichž vyloučením b plyne

$$3a^2 - aP + 3P = 0,$$

tedy

$$a = \frac{1}{6}\left[P \pm \sqrt{P^2 - 36P}\right].$$

Má-li býti a realné, musí býti

$$P^2 - 36P \geqq 0,$$

pročež minimálná hodnota jest buď $P = 0$ (přímka jde počátkem), aneb $P = 36$; v tomto případě jest pak

$$a = 6, \; b = 12.$$

Jiné řešení. Vyjádříme-li

$$P = \frac{3a^2}{a-3},$$

můžeme ku stanovení minima užiti methody Fermatovy, kladouce

$$\frac{3a^2}{a-3}=\frac{3a_1^2}{a_1-3},$$

z čehož $$(a-a_1)(aa_1-3a-3a_1)=0.$$

Položíme-li $a=a_1$, máme

$$a^2-6a=0,$$

tedy jako dříve buď $a=0$ aneb $a=6$.

Poznámka redakce. Dány-li přímky A, B a mimo ně bod m, tu ze všech přímek jdoucích bodem m omezuje s rameny A, B nejmenší trojúhelník ta, jejíž úsečka mezi A, B obsažená jest bodem m půlena (Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší školy realné, 2. vyd. str. 260).

Úloha 35.

Do čtverce o straně a vepsány jsou čtyry paraboly, které dotýkají se vždy dvou a dvou stran čtverce ve vrcholech. Spojíme-li přímkami průsečné body těchto parabol, dostaneme čtverec, do něhož vepsány opět paraboly. Pokračujeme-li tak dále, jak velký jest součet ploch všech čtverců?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.)

Vrchol každé z těchto 4 parabol půlí vzdálenost mezi středem čtverce a jeho vrcholem. Označíme-li tedy stranu čtverce písmenem a, jest parametr každé z těchto parabol roven polovici úhlopříčky

$$p=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Volíme-li úhlopříčku za osu X, střed čtverce za počátek, jest rovnice paraboly

$$y^2=a\sqrt{2}\left(x+\frac{a}{4}\sqrt{2}\right).$$

Pro průsečný bod obou parabol jest $y=x$: proto jest pak

$$y^2 - ay\sqrt{2} - \frac{a^2}{2} = 0,$$

tudíž

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{2} \pm a.$$

V naší úloze jde o hodnotu příslušnou ku znaménku spodnímu. Jest pak absolutní hodnota poloviční strany čtvercové $a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$, tutíž strana čtverce $a_1 = 2a - a\sqrt{2}$ a plocha čtverce

$$P_1 = a_1^2 = (2a - a\sqrt{2})^2 = a^2(6 - 4\sqrt{2}).$$

Plocha druhého čtverce jest pak

$$P_2 = a_1^2(6 - 4\sqrt{2})$$

atd. Součet všech ploch P, P_1, P_2, P_3, ... bude

$$S = a^2[1 + (6 - 4\sqrt{2}) + (6 - 4\sqrt{2})^2 + \ldots],$$

pročež

$$S = \frac{a^2}{4\sqrt{2} - 5}.$$

Úloha 36.

Do ellipsy jest vepsán kruh středem procházející. a) Jak velký jest poloměr kruhu toho, jsou-li a, b poloosy ellipsy? b) V kterém poměru jsou osy ellipsy, má-li kruh vepsaný lineárnou výstřednost za průměr?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Quido Vetter*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

1. Rovnice ellipsy a kruhu, dotýkajícího se osy Y v počátku O, jest

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Hledejme průsečné body obou těchto křivek. Řešením rovnic předešlých obdržíme pro x^2, když y vyloučíme, rovnici

$$x^2(b^2 - a^2) + 2rxa^2 - a^2b^2 = 0.$$

Aby křivky se dotýkaly, musí rovnice tato pro x míti dva stejné kořeny, což vede k podmínce

$$r^2a^4 + a^2b^2(b^2 - a^2) = 0,$$

odkudž

$$r = \frac{be}{a}.$$

2. Je-li $2r = e$, tedy $r = \frac{e}{2}$,

jest

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

Úloha 37.

Ustanoviti jest plochu rovnoběžníka omezeného tečnami kolmými k asymptotám hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Kitzberger*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.)

Hyperbola $\quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
má asymptoty $\quad bx \mp ay = 0.$

Rovnice tečny v bodě (x_1, y_1) jest

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2,$$

tudíž směrnice její

$$A = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Má-li býti tečna kolmou k asymptotě, třeba vyhověti podmínce

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \mp \frac{a}{b},$$

zároveň

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Pro jednu z tečen obdržíme dotyčný bod

$$x_1 = \frac{a^3}{\sqrt{a^4 - b^4}},\quad y_1 = \frac{b^3}{\sqrt{a^4 - b^4}};$$

úseky tečny na osách souřadných jsou

$$m = \frac{a^2}{x_1} = \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a}, \quad n = \frac{b^2}{y_1} = \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{b}.$$

Obsah kosočtverce omezeného tečnami kolmými k asymptotám jest tedy

$$\mathrm{K} = 2mn = \frac{2(a^4 - b^4)}{ab}.$$

Úloha 38.

Dána jest hyperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; v ní vytčeny body protější

$$m(x_1, y_1),\ n(-x_1, -y_1).$$

Bodem m vedena přímka M kolmá k jedné asymptotě, bodem n přímka N kolmá ke druhé asymptotě; které jest geom. místo průsečíku p přímek M a N?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Skála*, stud. VIII. tř. g. v Praze.) O souřadnicích bodů daných platnost má rovnice

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

kolmice vedené k asymptotám vyjádřeny jsou rovnicemi

$$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)$$

$$y + y_1 = \frac{a}{b}(x + x_1).$$

Abychom z těchto tří rovnic vyloučili x_1, y_1, sečtěme poslední dvě aneb odečtěme druhou od třetí; tím obdržíme

$$x_1 = \frac{by}{a}, \quad y_1 = \frac{ax}{b}.$$

Vložíce pak tyto hodnoty do rovnice první, nabudeme žádané rovnice místa geometrického

$$b^6y^2 - a^6x^2 = a^4b^4;$$

místem tím jest tedy zase hyperbola.

Úloha 39.

V rouře barometrické o průřezu 1 cm^2 stojí rtuť do výše 75 cm; prostor prázdný nad rtutí obnáší 10 cm. Jak klesne sloupec rtuťový, když vnikne do roury 1 cm^3 vzduchu?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Klesne-li rtuť o x *cm,* bude napjetí vzduchu p stanoveno rovnicí

$$(10+x)\,p = 75,$$

z čehož

$$p = \frac{75}{10+x}.$$

Protože jest rovnováha mezi vzduchem vnějším z jedné a vzduchem vnitřním i sloupcem rtuťovým ze strany druhé, jest

$$\frac{75}{10+x} + 75 - x = 75,$$

z čehož

$$x^2 + 10x - 75 = 0,$$
$$x = -5 \pm 10.$$

Úloze vyhovuje positivní hodnota

$$x = 5\,cm.$$

Úloha 40.

Úhel inklinační magnetky na jistém místě jest i. Zavěsíme-li na konec nad horizontem vyčnívající m gramů, uzavírá magnetka úhel α s rovinou vodorovnou. Jaké závaží nutno zavěsiti, aby magnetka stála horizontálně?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Toman,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Označíme-li délku magnetky $2l$ a horizontální složku zemského magnetismu H, a uvážíme-li, že otáčivý moment zemského magnetismu rovná se momentu váh hmot, máme podmínky

$$2Hl \sin(i-\alpha) = mgl \cos\alpha$$
$$2Hl \sin i = m'gl,$$

z nichž vyplývá hledaná váha

$$m' = \frac{m \sin i \cos \alpha}{\sin (i - \alpha)}.$$

Úloha 41.

Řešiti rovnici

$$\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{ab} + \frac{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}{bc}$$
$$+ \frac{\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-a^2)}}{ca} = 1.$$

Který význam má x, značí-li a, b, c délky stran trojúhelníka? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang*, stud. VIII. tř. g. v Brně.) Zdvojmocníme-li rovnici danou, píšíce ji v podobě

$$a\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)} + b\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-a^2)} = abc$$
$$- c\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$$

obdržíme, nehledíce ke kořenu $x = 0$, rovnici

$$2a^2b^2 - x^2(a^2+b^2-c^2) = 2ab\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)};$$

odtud opětným zdvojmocňováním plyne

$$x^2[(a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2] + 4a^2b^2c^2 = 0.$$

Jest však

$$(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) = -16\Delta^2,$$

značí-li Δ obsah trojúhelníka omezeného stranami a, b, c. Rovnice poslední nabývá pak tvaru jednoduchého

$$4\Delta^2x^2 - a^2b^2c^2 = 0,$$

z čehož

$$x = \pm\frac{abc}{2\Delta}.$$

Z výsledku tohoto poznáváme, že x jest průměrem kružnice opsané o daný trojúhelník.

Úloha 42.

Vyloučiti u z rovnic

$$x + u^2 y = au$$
$$y + u^4 x = au^2 .$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Vojtěch Prokeš,* stud. VII. tř. g. na Smíchově.)

Jestli-že od první rovnice znásobené veličinou u odečteme rovnici druhou, obdržíme

$$ux - y + u^3 y - u^4 x = 0$$

čili

$$(ux - y)(1 - u^3) = 0.$$

Není-li tedy $u = 1$, jest

$$u = \frac{y}{x};$$

dosadíme-li tuto hodnotu do kterékoli z obou rovnic daných, přijdeme k výsledku

$$x^3 + y^3 = axy.$$

Úloha 43.

Tři cyklisté vyjeli současně z téhož bodu okružní dráhy 840 m dlouhé rychlostí 80, 72 a 59 m za minutu. Za jakou dobu setkají se všichni na témž místě? Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *M. Liška,* stud. VII. tř. g. v Plzni.)

Mysleme si, že A honí B a C, kteří jsou o 840 *m* napřed.

A získá na B 8 *m* za minutu, dohoní ho tudíž za 840 : 8 = 105 minut. Na C získá 21 *m* a proto by ho dohonil za 840 : 21 = 40 minut. Na konci každých 105 *m* A a B jsou pohromadě; na konci každých 40 minut jsou pohromadě A a C. Jelikož nejmenší společný násobek čísel 105 a 40 jest 840, setkají se všichni tři jezdci na témž místě za 840 minut čili za 14 hodin.

Úloha 44.

Lokomotiva s tendrem, dohromady 8 m dlouhé, minuly vlak osobní za 4 sek., vrátivše se, minuly týž vlak na vedlejších kolejích za 16 minut. Jakou rychlostí jel vlak a jak byl dlouhý, jela-li lokomotiva rychlostí 50 km za hodinu?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Nováček*, stud. VI. tř. r. v Plzni.)

Rychlost vlaku budiž x. V prvém případě předpokládejme, že vlak stojí, za to ale, že lokomotiva jede rychlostí $60 + x$, ve druhém případě, že jede rychlostí $(60 — x)$; pak je

$$(50 + x) = 4\,(50 - x),$$

z čehož

$$x = 30\,km.$$

Proto v 1. případě mysleme si, že lokomotiva jela rychlostí $(60 + 30)\,km = 90\,km$ a že takto jela 4 sek., za které urazila $25\,m \,.\, 4 = 100\,m$; při tom však jela o svoji délku dále, než i tendr minul vlak, tudíž:

Vlak byl $100 - 8 = 92\,m$ dlouhý.

Úloha 45.

Čísla a, b, c, d, e mají tyto vlastnosti:

1. a, c, e tvoří řadu geometrickou,

2. a, b, c, d tvoří řadu arithmetickou,

3. součin ae jest o c větší než součin bd,

4. součet $a + b + c + d = 30$.

Která jsou to čísla?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Radouš*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

$$a,\ b = a + r,\ c = a + 2r,\ d = a + 3r,\ e;$$ pak jest

$$(1) \qquad ae = (a + 2r)^2$$

$$(2) \qquad 4a + 6r = 30,\quad 2a + 3r = 15$$

$$(3) \qquad ae = (a + r)\,(a + 3r) + a + 2r.$$

Z rovnic (1) a (3) plyne vyloučením e

$$r^2 = a + 2r$$

a dosazením z rovnice (2)

$$r^2 = \frac{15 - 3r}{2} + 2r,$$

tudíž

$$2r^2 - r - 15 = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = -2\frac{1}{2}.$$

Z rovnic (2) pak ustanovíme

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 11\frac{1}{4}.$$

Jest tedy

$$a = 3 \text{ nebo } 11\frac{1}{4}, \qquad b = 6 \text{ nebo } 8\frac{3}{4},$$

$$c = 9 \text{ nebo } 6\frac{1}{4}, \qquad d = 12 \text{ nebo } 3\frac{3}{4},$$

$$e = 27 \text{ nebo } 3\frac{17}{36}.$$

Úloha 46.

Je-li

$$log_8\ 9 = a, \qquad log_3\ 5 = b,$$

čemu rovná se briggický logarithmus čísel 2, 3, 4?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Rudolecký*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Rovnice dané lze nahraditi těmito dvěma

$$8^a = 9, \qquad 3^b = 5$$

čili

$$2 = 3^{\frac{2}{3a}}, \qquad 3 = 5^{\frac{1}{b}};$$

jest tedy také

$$2 = 5^{\frac{2}{3ab}}.$$

Klademe-li

$$2 = 10^{x_1},$$

jest

$$10^{x_1} = 5^{\frac{2}{3ab}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{2}{3ab}} = 2,$$

z čehož

$$10^{\frac{2}{3ab}} = 2 \,.\, 2^{\frac{2}{3ab}} = 2^{\frac{2+3ab}{3ab}},$$

$$10^{\frac{2}{2+3ab}} = 2,$$

tudíž

$$x_1 = \log 2 = \frac{2}{2+3ab}.$$

Podobným způsobem nalezneme

$$x_2 = \log 3 = \frac{3a}{2+3ab},$$

$$x_3 = \log 4 = \frac{4}{2+3ab}.$$

Úloha 47.

Na základě binomické poučky dokažte, že

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3\,.\,5}{4\,.\,8} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12} + \ldots \textit{ in inf } = 2\sqrt{2}\,.$$

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Řadu danou lze psáti v podobě

$$R = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

která dle binomické poučky značí

$$R = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Úloha 48.

V trojúhelníku ABC vésti jest příčku CM, známa-li jest vzdálenost středů S_1, S_2 kružnic opsaných o trojúhelníky ACM, BCM.

Stud. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VIII. tř. g. Litomyšli.)

Lze ukázati, že jest

$$\triangle S_1S_2M \sim \triangle ABC;$$

jestiť dle známých vlastností úhlů středových a obvodových

$$\sphericalangle S_2S_1M = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle S_1S_2M = \sphericalangle ABC.$$

Známe-li délku

$$\overline{S_1S_2} = s,$$

jest tedy trojúhelník S_1S_2M co do tvaru i velikosti určen a tím určena i výška jeho MN. Znajíce tuto, máme též délku hledané příčky

$$\overline{CM} = 2 \,.\, \overline{MN}.$$

Úloha 49.

Dán jest trojúhelník o stranách a, b, c a obsahu Δ. S bodu s spuštěny ku stranám jeho kolmé úsečky x, y, z, jichž paty určují trojúhelník obsahu Δ'. Dokázati jest, že

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Procházka,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Jsou-li α, β, γ úhly daného trojúhelníka, jest

$$2\Delta = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta;$$
$$2\Delta' = xy\sin\gamma + yz\sin\alpha + zx\sin\beta.$$

Proto jest

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\,.$$

Poznámka. 1. Vzdálenosti x, y, z nejsou vzájemně neodvislé, nýbrž vázány vztahem

$$ax + by + cz = 2\Delta.$$

Jsou to homogenní souřadnice bodu s vzhledem ku stranám původního trojúhelníka.

2. Značí-li ϱ poloměr kružnice vepsané v trojúhelník Δ, r poloměr kružnice opsané, jest

$$2\Delta' = \varrho^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \frac{\varrho^2 (a + b + c)}{2r},$$

$$2\Delta = \varrho\,(a + b + c);$$

tudíž

$$\Delta' : \Delta = \varrho : 2r.$$

Úloha 50.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena jest výška $cd \perp ab$; *s paty její spuštěny kolmice k odvěsnám* $de \perp bc$, $df \perp ac$. *Který jest poloměr kružnice opsané čtyřúhelníku afeb?*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Voska*, stud. VII. tř. gymn. na Král. Vinohradech.)

Označíme-li délky stran daného trojúhelníka

$$\overline{bc} = a,\quad \overline{ac} = b,\quad \overline{ab} = c,$$

bude výška

$$\overline{cd} = v = \frac{ab}{c}$$

a úseky

$$\overline{bd} = \frac{a^2}{c},\quad \overline{ad} = \frac{b^2}{c},$$

$$\overline{cf} = \overline{ed} = \frac{a^2 b}{c^2},\quad \overline{ce} = \overline{fd} = \frac{ab^2}{c^2},$$

$$\overline{be} = a - \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a^3}{c^2},\quad \overline{af} = b - \frac{a^2 b}{c^2} = \frac{b^3}{c^2}.$$

Že čtyrúhelníku *afeb* lze kružnici opsati, poznáváme takto: Je-li

$$\sphericalangle\, bac = \alpha,$$

jest

$$\sphericalangle\, cef = \alpha, \quad \sphericalangle\, bef = 2\mathrm{R} - \alpha,$$

tudíž

$$\sphericalangle\, baf + \sphericalangle\, bef = 2\mathrm{R}.$$

Tato podmínka charakterisuje čtyrúhelník *afeb* jakožto tětivový. Střed *s* kružnice jemu opsané jest průsečík kolmic vztyčených k odvěsnám v bodech *k*, *l* půlících úseky *be*, *af*. Jest pak

$$\overline{ck} = \overline{ls} = \frac{cb + ce}{2} = \frac{a}{2c^2}(b^2 + c^2),$$

$$\overline{cl} = \overline{ks} = \frac{ca + cf}{2} = \frac{b}{2c^2}(a^2 + c^2).$$

Poloměr kružnice opsané čtyrúhelníku *afeb* jest

$$r = \sqrt{\overline{bk}^2 + \overline{ks}^2} = \sqrt{\frac{a^6}{4c^4} + \frac{b^2}{4c^4}(a^2 + c^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2c^2}\sqrt{a^6 + (c^2 - a^2)(a^2 + c^2)^2}$$

čili

$$r = \frac{1}{2c}\sqrt{a^2b^2 + c^4} = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + c^2}\,.$$

Poznámka. Prodloužíme-li příčky *fd* a *ed* o délky

$$\overline{dm} = a, \quad \overline{dn} = b,$$

bude

$$\overline{an} = \overline{bm} = v;$$

střed obdélníka *abmn* jest středem kružnice jdoucí body *a*, *f*, *e*, *b*, *m*, *n*. Vzdálenost středu toho od přepony $\overline{ab}$ jest

$$u = \frac{\overline{an}}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{v}{2}\,.$$

Úloha 51.

Řešiti rovnici

$$(x^2+1)^2 = 2x(x^2+1)(\cos\alpha + \cos\beta) - 4x^2 \cos\alpha \cos\beta.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Vitáček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

Užijeme-li k řešení této převratné rovnice známé substituce

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

obdržíme rovnici kvadratickou

$$y^2 - 2y(\cos\alpha + \cos\beta) + 4\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Z této ustanovíme

$$y = \cos\alpha + \cos\beta \pm (\cos\alpha - \cos\beta),$$

tedy

$$y_1 = 2\cos\alpha, \quad y_2 = 2\cos\beta.$$

Přejdeme-li k původní neznámé, nabudeme rovnic

a) $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$

b) $x^2 - 2x\cos\beta + 1 = 0;$

z těchto pak řešením ustanovíme

$$x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha,$$
$$x_{3,4} = \cos\beta \pm i\sin\beta.$$

Úloha 52.

Dokažte, že o úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\alpha + \cos\beta} = 1.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant Holzmann*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

První člen levé strany lze jinak upraviti, pomníme-li, že $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$; jestiť

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta.$$

Dáme-li tento tvar i oběma členům ostatním, přechází relace daná v jednodušší

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\alpha = 1$$

čili

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

To však jest vztah známý, plynoucí ze vzorce

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}.$$

Úloha 53.

Vyloučiti jest úhel x z rovnic

$$\cos x\operatorname{tg}\alpha + \sin x\operatorname{cotg}\alpha = k\sqrt{2}\,.\sin 2\beta$$
$$\cos x\operatorname{tg}\beta + \sin x\operatorname{cotg}\beta = k\sqrt{2}\,.\sin 2\alpha\,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Božek*, stud. VII. tř. g. v Brně.) Řešíce rovnice dané dle $\cos x$ a $\sin x$ ustanovíme

$$\cos x = \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)}{\sqrt{2}\,(\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta(\cos\beta+\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)}{\sqrt{2}\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,.\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{2}\,.\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,.\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\,.\sin(\alpha+\beta)\,.\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}}\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,,$$

$$\sin x = \frac{k \,.\, \sin 2\alpha \sin 2\beta\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}{\sqrt{2}\,(\sin^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta)}\,.$$

Ježto však ze vzorců

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

vyplývá rovnost rozdílů

$$\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta,$$

jest

$$\cos x = \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

pročež

$$\sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta = \frac{1}{k}\,.$$

Úloha 54.

Povrchové přímky kolmého kužele kruhového tvoří se základnou úhel α; v kterém úhlu k základně musí dopadati rovnoběžné paprsky světelné, aby osvětlovaly $\frac{m}{n}$ obliny kuželové?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Stan. Linhart*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Budiž r poloměr základny kuželové, v výška kužele, φ úhel paprsků se základnou, ω středový úhel příslušný k neosvětlenému oblouku základny. Potom jest

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{r}{v \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\,,$$

tudíž

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\frac{\omega}{2}\,.$$

Úhel ω ustanovíme z úměry

$$(4\mathrm{R} - \omega) : 4\mathrm{R} = m : n;$$

jestiť pak

$$\omega = \frac{n - m}{n}\,.\,4\mathrm{R}$$

a proto konečně

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \cos\left(\frac{n-m}{n} \,.\, 2R\right).$$

Úloha 55.

Kolmý jehlan trojboký, jehož základna má strany $a = 51$ cm, $b = 68$ cm, $c = 85$ cm, má pobočné hrany zdélí $h = 110{\cdot}5$ cm. Ustanovte poloměr koule jehlanu tomu opsané.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Matas,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

Obsah základny jehlanu jest dle vzorce Heronova

$$\varDelta = \sqrt{102 \,.\, 51 \,.\, 34 \,.\, 17} = 2 \,.\, 17 \,.\, 51 = 1734,$$

poloměr kružnice opsané o základnu jest

$$\varrho = \frac{abc}{4\varDelta} = \frac{51 \,.\, 68 \,.\, 85}{4 \,.\, 2 \,.\, 17 \,.\, 51} = 42{\cdot}5 \,.$$

Střed koule o jehlan opsané jest průsečík výšky jehlanu s rovinou vztyčenou kolmo uprostřed pobočné hrany; značí-li v výšku jehlanu, jest

$$v = \sqrt{h^2 - \varrho^2} = 102$$

a pro poloměr r koule opsané platnou jest úměra

$$r : \frac{h}{2} = h : v,$$

ze které plyne

$$r = \frac{h^2}{2v} = \frac{2873}{48} = 59{\cdot}85 \ldots .$$

Téhož výsledku dojdeme uživše relace

$$\varrho^2 = v\,(2r - v), \quad r = \frac{\varrho^2 + v^2}{2v} \,.$$

Úloha 56.

Na společné základně vepsány v kouli dva kolmé kužele, jichž obsahy jsou v poměru $m : n$. Je-li ϱ poloměr společné základny, jak velký jest poloměr koule?

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Emerich Brinkmann,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Budiž r poloměr koule; potom jest obsah jednoho kužele

$$K_1 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2\left(r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

a obsah kužele druhého

$$K_2 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2\left(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right).$$

Z poměru obsahů

$$K_1 : K_2 = m : n$$

plyne rovnice

$$\frac{r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} = \frac{m}{n}$$

čili

$$(m - n)\, r = (m + n)\sqrt{r^2 - \varrho^2},$$

kterou řešíce nalezneme

$$r = \frac{m + n}{2\sqrt{mn}}\,\varrho.$$

Úloha 57.

Ve čtyrúhelníku určeném vrcholy

$$a\,(0,\ 0),\quad b\,(2,\ 5),\quad c\,(6,\ 3),\quad d\,(6,\ -1)$$

ustanoviti jest bod s tak, aby

$$\triangle\, abs = \triangle\, bcs = \triangle\, cds\,.$$

Kterak lze bod s sestrojiti? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Zafouk,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Označíme-li souřadnice hledaného bodu $s\,(x,\ y)$, máme rovnice podmínečné

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vyčíslíme-li determinanty, nabudou tyto rovnice podoby jednodušší

$$-5x + 2y = 2x + 4y - 24 = 4x - 24,$$

z nichž vypočítáme

$$x = 3, \quad y = 1{\cdot}5.$$

Obecně lze bod s sestrojiti takto: Rozpolme úhlopříčku ac v bodě m, úhlopříčku bd v bodě n; spojnice bm a cn protínají se v žádaném bodě s. Důvod tohoto sestrojení jest zřejmý.

Poznámka: V případě svrchu číselně daném leží bod s v polovici úhlopříčky ac a jest nejenom

$$\triangle abs = \triangle bcs = \triangle cds = 6,$$

ale také

$$\triangle das = 6.$$

Úloha 58.

V hlavní ose ellipsy dány body m, n, jimiž vedeny přímky M, N, mající směr dvou sdružených průměrů. Jest dokázati, že geometrickým místem jich průsečíků jest ellipsa podobná ellipse dané.

Stud. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Julius Pollák*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Není na ujmu obecnosti, předpokládáme-li body m, n souměrně sdružené dle středu ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

kladouce

$$\overline{om} = -\overline{on} = p;$$

jsou pak rovnice přímek M a N

$$y = \mathrm{A}(x - p), \quad y = \mathrm{A}'(x + p),$$

při čemž

$$\mathrm{AA}' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Vyloučíme-li z posledních tří rovnic proměnné směrnice A, A′, obdržíme rovnici hledaného místa geometrického

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - p^2)$$

čili
$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2p^2.$$

Z rovnice té zřejmo, že místem tím jest ellipsa poloos
$$a' = m, \quad b' = \frac{bp}{a};$$
ježto
$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$
jest ellipsa tato podobná dané. Obě mají stejnou číselnou výstřednost.

Úloha 59.

Jest analyticky dokázati, že strana čtverce vepsaného v ellipsu rovná se výšce kosočtverce určeného vrcholy ellipsy.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Vitěka*, stud. VIII. tř. gymn. v Budějovicích.)

Vrcholy čtverce vepsaného v ellipsu
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
jsou průsečíky její s přímkami
$$y = \pm x;$$
v prvním kvadrantu ležící vrchol má souřadnice
$$x_1 = y_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
a jest tedy strana čtverce
$$s = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Výška v kosočtverce určeného vrcholy ellipsy rovná se dvojnásobné vzdálenosti počátku od přímky, jejíž rovnice jest
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
čili

$$bx + ay - ab = 0;$$

jest proto výška

$$v = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a tudíž

$$s = v,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 60.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dán rovnostranný trojúhelník tak, že vrchol jeho leží v počátku a výška v ose X. Trojúhelníku opsána jest kružnice a parabola mající vrchol v počátku. Jak velká jest plocha omezená oblouky obou křivek?

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Inocenc Hanzlík*, stud. VII. tř. gymn. v Litomyšli.)

Je-li a strana daného trojúhelníka, mají jeho vrcholy souřadnice:

$$m\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right), \quad n\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\right), \quad o\ (0,\ 0).$$

Kružnice opsaná má rovnici

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

kdež

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

ku každé straně trojúhelníka mno přiléhá úseč kruhová obsahu

$$U = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Parabola opsaná trojúhelníku mno a mající vrchol o má rovnici

$$y^2 = 2px;$$

parametr její plyne z relace

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2p \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

a jest tedy

$$p = \frac{a}{12}\sqrt{3}.$$

Oblouky obou křivek jsou omezeny tři plochy: plocha P_1 protatá osou x a dvě plochy $P_2 = P_3$ na vnější straně paraboly.

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice bodu m, jest

$$P_1 = \frac{4}{3} x_1 y_1 + U = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \pi \frac{a^2}{9}$$

$$P_2 = U - \frac{1}{6} x_1 y_1 = \pi \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{8}\sqrt{3}.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. V. tř. r. v Hodoníně, úl. 21., 25., 48., 50.

Bačina Jan, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 5., 7., 17., 18., 19., 21., 22., 25., 45., 49.

Bartoš Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 9., 15. až 22., 30., 32. až 39., 42., 44., 45., 46., 48., 50., 53. až 60.

Barvík Jindřich, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 31., 41., 42., 45., 50., 55., 56.

Bohuslav Frant., stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3. až 6., 18. až 21., 25., 34., 35.

Božek Karel, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 11., 13., 17. až 24., 31., 41., 42., 45., 46., 53., 55., 56., 57.

Brablec Jan, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 11., 13., 14., 16. až 23., 25., 26., 28. až 34., 36., 37., 38., 41., 42., 44., 45., 49., 50., 52., 53., 55. až 59.

Brinkmann Emerich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 16., 30., 32., 33., 34., 36., 37., 45., 46., 52., 53., 55. až 58., 60.

Brix František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 14., 20., 30. až 34., 39. až 47., 49., 50., 52. až 57.

Brix Frant. Jan, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 32., 33. 34., 36., 37., 38., 42., 43., 45., 46., 56., 59.
Bystřický František, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 17., 22., 42., 45.
Cepák Karel, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 1. až 7., 10., 11., 17. až 22., 25. až 28., 30. až 33., 39., 43., 44., 45., 49., 50, 54., 55., 56.
Gregor Květoslav, stud. VI. tř. g. v Benešově, úl. 56.
Hanus Rudolf, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 41., 42., 45., 50., 55., 56.
Hanzlík Inocenc, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 34., 39. až 60.
Havrda Václav, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 6., 16.
Holzmann Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 30. až 60.
Hrubý František, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 42., 45.
Hulla Karel, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2., 4. až 15., 17. až 20., 22. až 25., 28. až 38., 42. až 46., 48., 49., 50., 52. až 60.
Hýbner Karel, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 60.
Jiruška František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 5., 8., 9., 18. až 21., 31., 34., 36., 38., 42., 45., 46., 48., 54., 57.
Kálal Josef, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 45.
Kitzberger Eduard, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 30., 33., 34., 35., 37., 38., 42., 43., 45., 46., 53., 55., 59., 60.
Koubík Karel, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 1. až 6., 17., 18., 19., 21., 25., 30., 44., 45., 55., 56.
Kroužil Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4., 5., 18., 21., 22., 31.
Lang Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 30. až 60.
Linhart Stanislav, stud. VII. tř. r. Pardubicích, úl. 31. až 34., 36. až 39., 42., 43., 45., 46., 48., 54., 56., 57., 59., 60.
Liška František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 17. až 22., 25., 26., 28. až 34., 39., 41. až 46., 48. až 53., 55., 56., 57.
Liška Matěj, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 4., 7., 17. až 19., 21., 42., 45.
Matas Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 23., 26. až 34., 41. až 45., 47., 49., 52., 54. až 57.
Mikyna Josef, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 43., 44., 48., 56.

Moos Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 13., 14., 17. až 20., 22., 34.

Müller Ludvík, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 6.

Nováček Frant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 17. až 22., 30., 31., 39., 41., 44. až 56.

Pechánek Ant., stud. VII tř. r. v Pardubicích, úl. 32., 33., 34., 38., 42., 45., 46.

Pollák Julius, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 3., 11., 25., 32., 33., 38., 40., 42., 45., 56. až 60.

Procházka Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 3., 20., 28., 31., 41., 42., 45., 49., 51., 52., 53., 55., 56.

Prokeš Vojtěch, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 25., 28., 29., 31. až 37., 41., 42., 43., 45., 46., 48., 49., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.

Půda Jan, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 8., 10., 11., 13., 14., 16. až 23., 28., 30., 31., 34., 37., 41., 44., 45., 49., 52., 55., 56., 57., 59.

Radouš Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 14., 17. až 22., 25., 28., 29., 31. až 34., 36. až 39., 42., 45., 46., 56., 57., 59., 60.

Riessmüller Karel, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 50., 56.

Rudolecký Josef, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2, 3., 13., 17. až 22., 42. až 46.

Říha Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 8., 11. až 14., 16. až 22.

Seifert Ladislav, stud. V. tř. r. v Karlíně, úl. 31., 32., 33., 43., 45., 48., 50., 21. až 56., 59.

Schoenbaum Emil, stud. VI. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 4., 6., 7., 11. až 14., 16. až 34., 39., 42., 44., 45. až 49., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.

Schüller Jan, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 45.

Skála Karel, stud. VIII. tř. g. v Praze, úl. 1. až 23., 25. až 38., 41. až 46., 48. až 60.

Spurný František, externista g. v Olomouci, úl. 7., 9., 10., 11., 14., 16. až 34., 36. až 39., 41. až 46., 48., 49., 52. až 57., 60.

Straka Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 11., 13., 14., 17. až 23., 25. až 46., 50., 52., 53., 55. až 60.
Ševčík Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 3., 6., 12., 25., 28., 30., 31., 34., 36., 37., 38., 42., 43., 45., 49., 50., 53. až 57., 59., 60.
Šiška Karel, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 30., 31., 39., 45.
Šmok Mikuláš, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 9., 11., 13., 14., 17. až 25., 30. až 39., 41. až 45., 48. až 53., 55. až 60.
Šob Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 30. až 53., 55. až 60.
Šubrt Adolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 12., 17. až 22., 25. až 35., 39., 41. až 46., 48., 49., 50., 52. až 56.
Toman Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 30. až 60.
Tretera František, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 23., 25., 28. až 34., 36., 37., 38., 41. až 46., 49. až 53., 55. až 59.
Truhlář Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 23., 24., 30. až 60.
Vajgl Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 30., 31., 34., 42., 45., 46., 48., 49., 52., 53., 55., 56.
Valach Frant., stud. VI. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 8., 11., 12., 13., 17. až 23., 25., 28., 29., 31., 32., 33., 41., 43. až 46., 50., 53., 55., 56.
Velísek Ignát, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 13., 15., 19., 21., 31.
Velísek František, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 30. až 60.*)
Vetter Quido, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10., 11., 13., 17. až 22., 25. až 39., 41. až 45., 48., 49., 50., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.
Vitáček Frant., stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 30. až 60.
Vitěka Antonín, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 1. až 5., 7., 8., 11. až 15., 18. až 22., 24., 25., 26., 28. až 31., 39., 40. až 43., 45. až 48., 51., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.
Voska Václav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až

---

*) V seznamu řešitelů na str. 320 čísti jest Velísek František místo Velísek Ignát.

8., 11., 13., 17. až 22., 25., 26., 27., 30., 31. až 34., 37., 38., 42., 44., 45., 46., 49., 50., 52., 53., 55., 56., 57., 59.

Vyskočil Felix, stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 30., 41. až 48., 55., 56., 57.

Zafouk Bedřich, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 42., 45., 57.

Závodník Alois, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 14., 16. až 23., 25., 28. až 31., 35., 36., 37., 39., 42., 43., 45., 48., 50., 51., 53., 56., 59., 60.

Žižala H., stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 31., 34., 36., 55., 56., 57., 60.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za nejdokonalejší a největší počet řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1899) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků*) obdrželi tito řešitelé:

A. První ceny.

1. *Holzmann František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Hýbner Karel,* stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.
3. *Lang Jan,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
4. *Linhart Stanislav,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
5. *Skála Karel,* stud. VIII. tř. g. v Praze.
6. *Šob Ferdinand,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
7. *Šubrt Adolf,* stud. VI. tř. r. v Písku.
8. *Toman Josef,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
9. *Velísek František,* stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.
10. *Vitáček František,* stud. VIII. tř. g. v Klatovech.

B. Druhé ceny.

1. *Barvík Jindřich,* stud. VI. tř. g. v Opavě.
2. *Brinkmann Emerich,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
3. *Brix František,* stud. VII. tř. g. v Brně.

---

*) K návrhu redaktora tohoto Časopisu výbor Jednoty počet vypsaných cen o 15 rozmnožil.

4. *Cepák Karel*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.
5. *Hanzlík Inocenc*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.
6. *Hulla Karel*, stud. VI. tř. g. v Olomouci.
7. *Matas Bohumil,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
8. *Prokeš Vojtěch*, stud. VII. tř. g. na Smíchově.
9. *Schoenbaum Emil,* stud. VI. tř. g. v Benešově.
10. *Straka František,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
11. *Ševčík Jindřich*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
12. *Tretera František,* stud. VII. tř. g. v Třebíči
13. *Vetter Quido,* stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
14. *Vitěka Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích.
15. *Závodník Alois*, stud. VII. tř. r. v Brně.

C. Třetí ceny.

1. *Bartoš Rudolf,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
2. *Božek Karel*, stud. VII. tř. g. v Brně.
3. *Brablec Jan,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
4. *Brix Frant. Jan,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
5. *Jiruška František,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
6. *Kitzberger Eduard*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.
7. *Koubík Karel*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.
8. *Liška František*, stud. VII. tř. g. v Brně.
9. *Nováček František*, stud. VI. tř. r. v Plzni.
10. *Pollák Julius*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.
11. *Procházka František*, stud. VII. tř. g. v Brně.
12. *Půda Jan,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
13. *Radouš František*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
14. *Spurný František,* externista g. v Olomouci.
15. *Šmok Mikuláš*, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové.
16. *Truhlář František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
17. *Valach František,* stud. VI. tř. g. v Kroměříži.
18. *Voska Václav,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.
19. *Vyskočil Felix*, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze.
20. *Žížala H.*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.