# Řešení úloh

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 64 (1935), No. 7, R124--R140

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121649`

# ŘEŠENÍ ÚLOH.

## Z matematiky.

(Texty úloh zde řešených jsou otištěny v 1. čísle Rozhledů matematicko-přírodovědeckých letošního ročníku.)

1. úl. Řešil p. *Stanislav Ehlich*, studující V. tř. rg., Praha II.

Úhel $\delta$, jejž svírá $v_c$ a $t_c$ a pro nějž $\cos\delta = \frac{v_c}{t_c}$, se vyskytuje v pravoúhlém trojúhelníku, který má přeponu, jež je vzdáleností paty $v_c$ od středu přepony $c$, a který má přilehlou odvěsnu k úhlu $\delta$ úsečku $x$, která je hledanou vzdáleností. Pak $v_c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, $d = \sqrt{t_c^2 - v_c^2} = \frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Tudíž $x = d \,.\, \cos\delta$, neboli po dosazení a úpravě $x = \frac{ab\,(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}}$.

2. úl. Řešil p. *Josef Francl*, studující VII. tř. rg., Benešov u Prahy.

Dané body jsou $A$, $B$, $C$, $D$. K bodu $A$ souměrně sdružíme $A'$ (podle $CD$), k $A'$ souměrně sdružíme $A''$ (podle $AB$), sestrojíme vrcholy kosočtverce $AA'EA''$, v němž platí: $a^2 = bx$ (kde $AA' = a$, $AE = b$, $A'P = x$, bod $P$ je hledaný průsečík). K sestrojení úsečky $x$ použijeme kružnice, která se dotýká úsečky $AA'$ v bodě $A'$, má střed $F$ (bod $F$ jest čtvrtý vrchol rovnoběžníka $A'CDF$) a přetneme tuto kružnici z bodu $A$ úsečkou $b$, čímž dostaneme bod $G$. Nyní souměrně sdružíme podle přímky $AG$ bod $F'$ s bodem $F$ a sestrojíme vrcholy kosočtverce $FGF'H$, (bod $H$ je koncový bod sečny $AGH$). Vzdálenost $AH = x$. Z bodů $A$, $A'$ opíšeme úsečkou $x$ oblouky a dostaneme hledaný průsečík $P$.

3. úl. Řešil p. *Ferd. Vitáček*, studující VI. tř. rg., Praha XVI.

Pro poloměr kružnice trojúhelníku opsané platí $r = \frac{abc}{4O}$. Nazveme strany obdélníku $x$, $y$ a úhlopříčku $u$. Pak $r_1 = \frac{u^2x}{4xy}$, $4r_1 = \frac{x^2+y^2}{y}$, $4r_2 = \frac{x^2+y^2}{x}$. Odtud dělením dostaneme $y = \frac{r_2}{r_1}x$. Potom rovnice pro $x$, $y$ dávají $x = 4\frac{r_1^2 r_2}{r_1^2+r_2^2}$ a podobně $y = 4\frac{r_1 r_2^2}{r_1^2+r_2^2}$. Pro úhel úhlopříček platí $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{y}{x} = \frac{r_2}{r_1}$.

V daném číselném příkladě $x = 36$, $y = 48$, $u = 60$, $\omega = 73^0\,44'\,28''$.

4. úl. Řešení p. autora *K. Lerla*.

Položme $\sqrt[5]{a^5+b} = a + e$; umocníme-li a přičteme-li po obou stranách $\frac{a^4}{4}$, získáme při zanedbání členu $e^5$, jako velmi malého, vztah

$$\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a} \doteq \frac{a^4}{4} + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4,$$

z čehož

$$\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a}} \doteq \sqrt{\frac{a^4}{4} + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4} = \tfrac{1}{2}a^2 + ae + e^2.$$

Z kvadratické rovnice pro $e$ pak

$$e = -\frac{a}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a}} - \frac{a^2}{4}}$$

a dosazením za $e$ uvedený přibližný vzorec.

5. úl. Řešil p. *St. Kohoušek,* studující VI. tř. rg., Benešov u Prahy.

Uvažujme tři kružnice: nulovou kružnici $P$, hledanou kružnici $k$ a danou $k'$. Sestrojíme si jejich potenční střed $O$, jenž jest průsečíkem chordály kružnic $P$, $k$ a chordály kružnic $P$, $k'$. Z potenčního středu $O$ opíšeme kružnici $k^0$, procházející bodem $P$. Tato kružnice protíná ortogonálně danou a hledanou kružnici. Proto střed hledané kružnice musí ležeti na chordále kružnic $k^0$, $k'$. Průsečík chordály kružnic $k^0$, $k'$ s kolmicí, spuštěnou z pólu $P$ na poláru $p$, jest středem hledané kružnice.

6. úl. Řešil p. *Jindřich Mikeska,* studující VII. tř. rg., Hlučín.

Jmenovatelé řady jsou částečné součty přirozené řady čísel. Je tedy $n$-tý člen dané řady

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Pro součet $n$ členů dané řady je

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n} - \sum_{n=2}^{n+1} \frac{2}{n} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Součet dané řady je potom $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = 2$.

7. úl. Řešil p. *Egon Fluss,* studující VI. tř. rg., Bratislava.

Každý pravidelný $s$-stěn je omezen $m$-úhelníky a $n$-hrany. Vyloučíme-li z úvahy pravidelný čtyrstěn a šestistěn pro jejich malý úhel $\omega$, zůstanou nám: osmistěn ($m = 3$, $n = 4$), dvanáctistěn ($m = 5$, $n = 3$) a dvacetistěn ($m = 3$, $n = 5$). V známém trojhranu s vrcholem ve vrcholu mnohostěnu platí:

$\sin \frac{1}{2}\omega = \dfrac{\cos(180:n)}{\sin(180:n)}$. V našem případě: $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} = \dfrac{\cos(180:n)}{\sin(180:n)}$.

Této rovnici vyhovuje jen případ, kdy $n = 3$ a $m = 5$. Jedná se tedy o dvanáctistěn. Počet jeho tělesných úhlopříček je 100, neboť všech spojnic 20 vrcholů je 190 a dvacetistěn má 30 hran a 60 stěnových úhlopříček, které nutno odečísti.

8. úl. Řešil p. *Jos. Jíra,* studující VII. tř. r., Písek.

Kružnice $k_1$, $k_2$ se protínají v bodech $M$, $N$. Tečny v bodě $M$ sestrojené ke kružnicím $k_1$, $k_2$ protínají kružnice $k_2$, resp. $k_1$ v bodech $Q$ a $P$. Paprsky $p_1$ a $p_2$ vedené z bodu $M$ protínají kružnici $k_1$ v bodech $A$ a $B$, kružnici $k_2$ v bodech $C$ a $D$. Průsečík prodloužených tětiv $AB$ a $CD$ budiž $E$. Úhel těchto tětiv

$$\omega = \sphericalangle EDB + \sphericalangle DBE = \sphericalangle DCM + \sphericalangle CMD + \sphericalangle ABM = \sphericalangle DQM + \\ + \sphericalangle CMD + \sphericalangle APM = \sphericalangle DMP + \sphericalangle CMD + \sphericalangle CMQ = \sphericalangle PMQ,$$

j. b. d.

*a*) Když obě sečny splynou, stane se $D \equiv C$, $B \equiv A$, $CD$ se stane tečnou v bodě $C$, $AB$ pak tečnou v bodě $A$. Platí tedy věta:

Vedeme-li průsečíkem dvou kružnic libovolný paprsek, pak tečny, sestrojené v průsečících paprsku s kružnicemi, svírají spolu úhel rovný úhlu daných kružnic.

*b*) Je-li sečna $MAC$ pevná a sečna $MBD$ se mění, pak úhel $CEA$ je konstantní a tedy geometrickým místem bodu $E$ je kružnice sestrojená nad tětivou $AC$ tak, aby této tětivě příslušel obvodový úhel $= 180^0 - \sphericalangle PMQ$.

9. úl. Řešil p. *Karel Bém*, studující VI. tř. r., Pardubice.

Kořeny dané rovnice jsou: $x_1 = x_3 - 2d$, $x_2 = x_3 - d$, $x_3$, $x_4 = x_3 + d$, $x_5 = x_3 + 2d$ ($d$ = rozdíl řady aritmetické). Symetrické funkce kořenů rovnice dávají: $x_3 - 2d + x_3 - d + x_3 + x_3 + d + x_3 + 2d = 5$; neboli $x_3 = 1$ a dále $(1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45$; neboli $4d^4 - 5d^2 - 44 = 0$. Odtud $d_1^2 = 4$; $(d_2^2 = -\frac{11}{4})$. Reálné kořeny tedy jsou $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = +1$, $x_3 = 3$, $x_5 = 5$.

10. úl. Řešili pp. *Jos. Jíra*, studující VII. tř. r., Písek, a *Ferd. Vitáček*, studující VI. tř. rg., Praha XVI.

Vzdálenosti středu opsané kružnice od stran jsou

$$d_1 = r \,.\, \cos\alpha, \qquad d_2 = r \,.\, \cos\beta, \qquad d_3 = r \,.\, \cos\gamma. \tag{1}$$

Poněvadž jest $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, jest

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$$

a tedy

$$r^2\cos\gamma + r^2\cos\alpha\cos\beta = r^2\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

Dosazením z rovnic (1) do rovnice (2) obdržíme

$$d_3 r + d_1 d_2 = \sqrt{r^2 - d_1^2} \,.\, \sqrt{r^2 - d_2^2},$$

z čehož po náležité úpravě plyne rovnice 3. stupně pro neznámý poloměr $r$ kružnice opsané

$$r^3 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\, r - 2d_1 \,.\, d_2 \,.\, d_3 = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. Úloha má jen 2 řešení, když rovnice má kořen dvojnásobný; přejde-li rovnice v rovnici druhého stupně, má úloha jediné řešení. Aby rovnice měla kořen dvojnásobný, musí se diskriminant rovnice rovnati nule, t. j. musí

$$2\,(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^3 = 27 d_1^2 d_2^2 d_3^2.$$

Potom

$$r_1 = 2\sqrt[3]{d_1 d_2 d_3}, \quad r_2 = r_3 = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{3}}.$$

Aby rovnice přešla v kvadratickou, musí se jedna z hodnot $d_1$, $d_2$, $d_3$ rovnati nule. Je-li na př. $d_3 = 0$, je poloměr kružnice opsané $r = +\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ a trojúhelník je pravoúhlý (řešení záporné pro $r$ nemá pro řešení úlohy smyslu).

11. úl. Řešil p. *Jos. Jíra*, studující VII. tř. r., Písek.

Znásobme první rovnici $x$, druhou $y$ a třetí $z$ a pak je sečtěme. Tím obdržíme rovnici

$$a^2x + b^2y + c^2z = 0. \tag{1}$$

Odečtěme třetí rovnici od druhé, první od třetí a druhou od první. Tím dostaneme rovnice

$$z^2 - y^2 - xy + xz = b^2 - c^2, \tag{2}$$
$$x^2 - z^2 - yz + yx = c^2 - a^2, \tag{3}$$
$$y^2 - x^2 - zx + zy = a^2 - b^2. \tag{4}$$

Znásobme rovnici (2) $x$, (3) $y$, (4) $z$ a pak sečtěme. Vyjde nám rovnice

$$(b^2 - c^2)\, x + (c^2 - a^2)\, y + (a^2 - b^2)\, z = 0. \tag{5}$$

Z rovnic (1) a (5) vypočteme

$$\frac{y}{x} = \frac{a^4 + c^4 - b^2 (a^2 + c^2)}{b^4 + c^4 - a^2 (b^2 + c^2)}, \quad \frac{z}{x} = \frac{a^4 + b^4 - c^2 (a^2 + b^2)}{b^4 + c^4 - a^2 (b^2 + c^2)}. \tag{6}$$

Dosadíme-li z těchto rovnic za $y$ a $z$ do kterékoli z daných rovnic, vypočteme

$$x = \pm \frac{b^4 + c^4 - a^2 (b^2 + c^2)}{\sqrt{2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}}$$

a pak dosazením do (6)

$$y = \pm \frac{c^4 + a^4 - b^2 (c^2 + a^2)}{\sqrt{2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}},$$

$$z = \pm \frac{a^4 + b^4 - c^2 (a^2 + b^2)}{\sqrt{2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}}.$$

12. úl. Řešil p. *Jos. Šnobl,* studující VIII. tř rg., Třeboň.

Rozdíl obsahů označme $y = \frac{1}{2}a_1v - \frac{1}{2}a_2v = \frac{1}{2}v\,(a_1 - a_2)$. Úseky $a_1$, $a_2$ strany $a$ lze dostati jako kořeny rovnice

$$x^2 - ax + v^2 - av \cot \alpha = 0.$$

Po dosazení za $a_1 - a_2$ bude $y = \sqrt{\frac{1}{4}a^2v^2 - v^4 + av^3 \cot \alpha}$. K stanovení maxima určíme si první derivaci a položíme ji rovnou nule. Dostaneme: $(v_1 = 0)$, $8v^2 - 6av \cot \alpha - a^2 = 0$. Řešením

$$v_{2,3} = \tfrac{1}{8}a\,(3 \cot \alpha \pm \sqrt{9 \cot^2 \alpha + 8}).$$

Snadno nahlédneme, že $y'' < 0$ pro kladnou hodnotu odmocniny. Další prvky lze vypočísti na základě rovnice $x^2 - ax + v^2 - av \cot \alpha = 0$ a základních trigonometrických. V daném číselném příkladě je $v = 4$, $\gamma = 86^0\, 34'\, 26''$, $\beta = 21^0\, 51'\, 40''$, $c = 8{,}416$, $b = 3{,}14$.

13. úl. Řešil p. *Jos. Jíra,* studující VII. tř. r., Písek.

Průsečík sečen $AB$, $CD$ budiž $M\,(x, y)$. Souřadnice bodů $A$, $B$, $C$, $D$ možno psáti takto:

$A\,(x + s_1 \cos \alpha,\ y + s_1 \sin \alpha)$, $B\,(x + s_2 \cos \alpha,\ y + s_2 \sin \alpha)$,
$C\,(x + s_3 \cos \beta,\ y + s_3 \sin \beta)$, $D\,(x + s_4 \cos \beta,\ y + s_4 \sin \beta)$,

kdež $s_1$, $s_2$ jsou kořeny rovnice

$$s^2 + \frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\, s + \frac{2xy - a^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = 0. \tag{1}$$

Zároveň však jsou $s_1$, $s_2$ také kořeny rovnice

$$s^2 + 2\,[(x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha]\, s + (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0. \tag{2}$$

Z toho plyne

$$\frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2\,[(x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha], \tag{3}$$

$$\frac{2xy - a^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2. \tag{4}$$

Zcela obdobně obdržíme

$$\frac{x \sin\beta + y \cos\beta}{\sin\beta \cos\beta} = 2\,[(x - m)\cos\beta + (y - n)\sin\beta], \qquad (5)$$

$$\frac{2xy - a^2}{2 \sin\beta \cos\beta} = (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2. \qquad (6)$$

Srovnáním rovnic (4) a (6) obdržíme

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

a poněvadž $\beta = \alpha$, jest $\beta = 90^0 - \alpha$, takže rovnici (5) můžeme psáti

$$\frac{x \cos\alpha + y \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 2\,[(x - m)\sin\alpha + (y - n)\cos\alpha]. \qquad (7)$$

Z rovnic (3) a (7) vypočteme

$$x = -\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}(m \sin 2\alpha + n), \quad y = -\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}(m + n \sin 2\alpha). \qquad (8)$$

Dělením rovnic (8) obdržíme

$$\frac{x}{y} = \frac{m \sin 2\alpha + n}{m + n \sin 2\alpha}, \quad \text{z čehož} \quad \sin 2\alpha = \frac{mx - ny}{my - nx},$$

Dosadíme-li do první rovnice (8), obdržíme po náležité úpravě rovnici hledaného geometrického místa

$$(x - \tfrac{1}{2}m)^2 - (y - \tfrac{1}{2}n)^2 = \tfrac{1}{4}(m^2 + n^2),$$

t. j. geometrickým místem bodu $M$ je rovnoosá hyperbola o středu $s\,(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n)$ a poloose $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$.

14. úl. Řešil p. *Jos. Šnobl,* studující VIII. tř. rg., Třeboň.

Parametrické rovnice přímky protínající elipsu v bodech $A$, $B$ a jdoucí ohniskem jsou: $x = e + t \cos\varphi$, $y = t \sin\varphi$, kde $\varphi$ je směrový úhel. Dosadíme-li je do rovnice elipsy, dostáváme pro průsečíky podmínku

$$t^2\,(b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi) + 2b^2et \cos\varphi - e^4 = 0.$$

Z této rovnice vypočteme

$$t_1 - t_2 = \frac{2ab^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi} = AB.$$

Pro směr sdružený s $\varphi$ platí

$$\sin\varphi_1 = \frac{\pm\, b^2}{\sqrt{a^4 \operatorname{tg}^2\varphi + b^4}}, \ \cos\varphi_1 = \frac{\mp\, a^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^4 \operatorname{tg}^2\varphi + b^4}}.$$

Poněvadž jsme výraz pro $AB$ odvodili obecně, stačí dosaditi $\varphi_1$ za $\varphi$, a máme tětivu $CD$. Po úpravě dostaneme

$$\overline{CD} = \frac{2\,(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi - a^2b^2)}{a\,(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)},$$

takže součet $\overline{AB} + \overline{CD} = \dfrac{2}{a}\,(a^2 + b^2) =$ konst., což bylo dokázati.

15. úl. Riešil p. *Vojtech Hönig,* žiak VIII. tr. r. rg., Nové Mesto nad Váhom.

Delme každú rovnicu $\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$; keď riešime tieto rovnice, dostaneme:

$$\frac{4x^3}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 1, \quad \frac{4y^3}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 8, \quad \frac{4z^3}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 64.$$

Keď ich znásobíme, máme $xyz = 8$, čiže

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 4, \ (-2 \pm 2i\sqrt{3}).$$

Dosaďme hodnoty ty do rovníc a získame potom výsledok

$$x_1 = 1, \ x_{2,3} = \tfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \ y_1 = 2, \ y_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}, \ z_1 = 4, \ z_{2,3} = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

16. úl. Riešil p. *Vojtech Hönig*, žiak VIII. tr. r. rg., Nové Mesto nad Váhom.

Pre strany máme rovnice

$$a = \varrho\,(\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta), \quad b = \varrho\,(\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha), \quad c = \varrho\,(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\beta), \quad d = \varrho\,(\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\beta).$$

Podľa vety Ptolemaiovej je $mn = ac + bd$, čiže

$$mn = 4\varrho^2 \frac{1 + \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Pre obsah je $O = \frac{1}{2}\sin\beta\,(ab + cd)$ a za strany $a, b, c, d$ dosadíme. Po úprave dostaneme

$$O = 2\varrho^2 \,.\, \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}.\text{*)}$$

Obsah $O$ rovná sa však $O = \frac{1}{2}mn \,.\, \sin\omega$, čiže $\sin\omega = \frac{2O}{mn}$. Po dosadzení máme

$$\sin\omega = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

17. úl. Řešil p. *Ferd. Vitáček*, studující VI. tř. rg., Praha XVI.

Trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ jsou podobné s původním $\triangle$. Nazveme-li jednu stranu v $\triangle$ $a$, stejnolehlé strany v ostatních trojúhelnících $a_1, a_2, a_3$, pak je

$$a : a_1 : a_2 : a_3 = \sqrt{O} : \sqrt{O_1} : \sqrt{O_2} : \sqrt{O_3}.$$

Tedy $a : (a_1 + a_2 + a_3) = \sqrt{O} : (\sqrt{O_1} + \sqrt{O_2} + \sqrt{O_3})$. Poněvadž $a_1 + a_2 + a_3 = a$, je $\sqrt{O} = \sqrt{O_1} + \sqrt{O_2} + \sqrt{O_3}$.

18. úl. Řešil p. *Jos. Šnobl*, studující VIII. tř. rg., Třeboň.

Jest $N = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n}$. Vylučme z úseku přirozené řady číselné $1, 2, 3, \ldots, N$ násobky $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, pak zbývající čísla jsou nesoudělná s $N$ a udávají čitatele hledaných zlomků. Počet násobků $a_1$ je $\frac{N}{a_1}$, takže zbude $N - \frac{N}{a_1} = N\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)$ čísel, počet násobků $a_2$ je $\frac{N}{a_2}$ a mezi těmito

*) Poznámka red.: V textu 16. úlohy na str. 25 je tisková chyba: místo: $\varrho$ poloměr kružnice opsané, má býti: $\varrho$ poloměr kružnice vepsané. Pp. řešitelé si ji vesměs laskavě opravili sami.

je již $\frac{N}{a_1 a_2}$ čítaných v $\frac{N}{a_1}$, tedy toliko

$$\frac{N}{a_2} - \frac{N}{a_1 a_2} = \frac{N}{a_2}\left(1 - \frac{1}{a_1}\right),$$

neboli z řady čísel 1, 2, . . ., $N$ zbývá nyní již jen

$$N\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) - \frac{N}{a_2}\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) = N\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \text{ atd.}$$

Pokračujeme-li, seznáme, že počet hledaných zlomků je, jak známo

$$N\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right)\left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= a_1^{\alpha_1 - 1} a_2^{\alpha_2 - 1} a_3^{\alpha_3 - 1} \dots a_n^{\alpha_n - 1} (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) \dots (a_n - 1).$$

19. úl. Řešila sl. *Jarmila Kličková*, studující VII. tř. rg., Bratislava.

Součet prvních $n$ členů řady bude

$$S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{1 + x^{2^n - 1}}.$$

Zvolme pomocnou řadu

$$s_n = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{4}{1-x^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{1 - x^{2^n - 1}}.$$

Sečtením stejnolehlých členů dostaneme

$$S_n + s_n = \frac{2}{1-x^2} + \frac{4}{1-x^4} + \dots + \frac{2^n}{1 - x^{2^n}}.$$

Z toho plyne

$$S_n + s_n = s_n - \frac{1}{1-x} + \frac{2^n}{1 - x^{2^n}},$$

tedy

$$S_n = \frac{2^n}{1 - x^{2n}} - \frac{1}{1-x}.$$

**20. úl. Řešil p. *Jindřich Mikeska*, studující st. čsl. rg., Hlučín.**

**Poněvadž $k > 0$, jsou $x_n > 0$ pro všechna $n$. Je dále**

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{(2k+1)^2 (x_{n+1} - x_n)}{(4kx_n + 2k + 1)(4kx_{n+1} + 2k + 1)}.$$

**Potom $x_0 = k$ a $x_1 = k + \frac{(2k+1)k}{4k^2 + 2k + 1}$; je tedy $x_1 > x_0$. Podle hořejšího je tedy $x_2 > x_1$, $x_3 > x_2$, . . ., $x_{n+1} > x_n$ atd. Při tom ale $x_n$ nestoupají neomezeně. Je: $x_{n+1} < k + \frac{2k+1}{4k}$. Existuje tedy limita $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $(> 0)$, pro kterou $x = k + \frac{2k+1}{4kx + 2k + 1}$. Z této rovnice dostaneme $\lim_{n\to\infty} x_n = x = = k + \frac{1}{2}$.**

**21. úl. Riešil p. *Tibor Kolbenheyer*, žiak VIII. tr. r. rg., Lučenec.**

**Ak sa zmení smer rovnobežných a bársaký uhol $\delta$, zostávajú uhly $AMC$ a $CNB$ nezmenené, lebo $\sphericalangle ACM$ sa zmenší a $\sphericalangle MAC$ zväčší o $\delta$. Preto**

všetky body $M$ ležia na kružnici $k_1$, idúcej bodmi $A$ a $C$, všetky body $N$ na krúž. $k_2$ idúcej bodmi $B$ a $C$, body $P$ na kruž. $k_3$ idúcej bodmi $A$ a $B$. Body Pascalovej priamky $M$, $N$ a $P$, ležiace na $k_1$, $k_2$, $k_3$, vytvoria na príslušných kružniciach obluky patriace obvod. uhlom $\delta$ ($\sphericalangle MAM'$, $\sphericalangle NBN'$, $\sphericalangle PAP'$), čo je však leň vtedy možné, keď obe Pascalove priamky ($p$ a $p'$) idú spoločným bodom kružníc $k_1$, $k_2$, $k_3$, tedy pevným bodom a tvoria tiež $\sphericalangle \delta$. (Úvaha je jednoduchšia pri šesťuholníku $AA_kBC_kCB_k$, kde $P$ priamka je rovnobežná s $AA_k$.)

22. úl. Řešení p. autora prof. *B. Starosty.*

Proložíme-li rovinu středem koule a osou omezující válcové plochy promítne se do ní jádro proniku jako rovnoramenný trojúhelník $OAB$ vepsaný do hlavní kružnice. Považujme přímku bodem $O$ za osu pořadnic a průměr k ní kolmý za osu úseček, takže bod $A$ má souřadnice $x_1$, $y_1$. $OA = 2\varrho$ jest průměr kruhového řezu na kouli.

Rovina proložená středem koule kolmo k přímkám válcové plochy, protne plochu v elipse ($a = \varrho$, $b$) a rozpůlí jádro proniku, takže můžeme psáti

$$V = \pi a b y_1.$$

Poněvadž $(2\varrho)^2 = 2r \,.\, x_1$, jest $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{2rx_1} = a;\quad b = \frac{1}{2}x_1$.

Z rovnice kružnice $k \equiv x^2 - 2rx + y^2 = 0$ plyne $y_1 = \pm\sqrt{x_1(2r - x_1)}$,

takže $\quad V = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2rx_1} \,.\, x_1 \,.\, \sqrt{x_1(2r - x_1)} = \frac{1}{4}\pi x_1^2 \,.\, \sqrt{2r - x_1} \,.\, \sqrt{2r}.$

Derivujeme-li výraz $m = x_1^2\sqrt{2r - x_1}$, obdržíme

$$\frac{dm}{dx} = \frac{8rx_1 - 5x_1^2}{2\sqrt{2r - x_1}}.$$

Pro extrémní hodnotu musí býti $8rx_1 - 5x_1^2 = 0$, z toho

$$x_1 = 0,\ x'_1 = \tfrac{8}{5}r.$$

Pro $x'_1$ je $\dfrac{d^2m}{dx_1^2}$ záporné a $V$ je maximální. Potom $a = \frac{2}{5}r\sqrt{5}$, $b = \frac{4}{5}r$, $y_1 = \frac{4}{5}r$ a $VM = \frac{32}{125}\pi r^3\sqrt{5}$.

23. úl. Řešení p. autora dr. *Václava Veselého.*

*a*) Označíme-li cifru stanovící desítky čísla dvojciferného $x$, pak jednotky jsou stanoveny cifrou $x \pm 1$. Jde pak o řešení neurčité rovnice, která po úpravě má tvar

$$11x \pm 1 = y(2x \pm 1)$$

neboli

$$y = 5 + \frac{x \mp 4}{2x \pm 1}.$$

Z toho dostáváme toto řešení: v případě znaménka $+$: $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 4$; $x = 4$, $y = 5$; v případě znaménka $-$: $x = 1$, $y = 10$; $x = 2$, $y = 7$; $x = 5$; $y = 6$. Z toho dostáváme těchto 5 dvojciferných čísel žádaných vlastností: ***10, 12, 21, 45, 54.***

*b*) Označme cifru určující sta čísla trojciferného $x$, pak hledané číslo trojciferné je některého ze 6 následujících tvarů. Z těch pak dojdeme opět k neurčitým rovnicím.

1. Čísla tvaru $x(x + 1)(x + 2)$ vedoucího k rovnici $111x + 12 = y(3x + 3)$ s řešením: $x = 0$, $y = 4$; $x = 2$, $y = 26$. Tedy čísla trojciferná (pouze 1): **234.**

2. Čísla tvaru $x(x+2)(x+1)$. Neurčité rovnice: $111x + 21 = y(3x+3)$ s řešením: $x = 0$, $y = 7$; $x = 1$, $y = 22$; $x = 2$, $y = 27$; $x = 4$, $y = 31$; $x = 5$, $y = 32$. Hledaná čísla trojciferná jsou: 132, 243, 465, 576.

3. Čísla tvaru $x(x-1)(x+1)$. Neurčité rovnice: $111x - 9 = 3yx$. Řešení: $x = 1$, $y = 34$; $x = 3$, $y = 36$. Čísla hledaná: 102, 324.

4. Čísla tvaru $x(x+1)(x-1)$. Neurčité rovnice: $111x + 9 = 3xy$. Řešení: $x = 1$, $y = 40$; $x = 3$, $y = 38$. Hledaná čísla: 120, 342.

5. Čísla tvaru $x(x-1)(x-2)$. Neurčité rovnice: $111x - 12 = y(3x-3)$. Řešení: $x = 2$, $y = 70$; $x = 4$, $y = 48$. Hledaná čísla: 210, 432.

6. Čísla tvaru $x(x-2)(x-1)$. Neurčité rovnice: $111x - 21 = y(3x-3)$. Řešení: $x = 2$, $y = 67$; $x = 3$, $y = 52$; $x = 4$, $y = 47$; $x = 6$, $y = 43$; $x = 7$, $y = 42$. Hledaná čísla jsou: 201, 312, 423, 645, 756.

Je tedy 16 trojciferných čísel žádaných vlastností to: 102, 120, 132, 201, 210, 234, 243, 312, 324, 342, 423, 432, 465, 576, 645, 756.

24. úl. Řešil p. *Antonín Bohun*, studující VIII. tř. rg., Strážnice, a p. *Jos. Jíra*, studující VII. tř. r., Písek.

*a*) Konstrukce proveďme na základě stejnolehlosti. Sestrojíme libovolnou kružnici dotýkající se dvou daných přímek a k ní kružnici soustřednou, jakožto geom. místo bodů, z nichž je viděti tuto kružnici pod úhlem $\alpha$. Pak průsečík spojnice daného bodu se středem podobnosti spojme se středem kružnice. Rovnoběžka vedená daným bodem se spojnicí průsečíku se středem protne osu úhlu daných dvou přímek v bodě, který je středem hledané kružnice. Úloha dvojznačná.

*b*) Dané dva body buďtež $A$, $B$, daná přímka $p$. Je-li $S$ střed a $r$ poloměr hledané kružnice, jest poměr vzdáleností bodu $S$ od bodu $A$ a od přímky $p$ roven $1 : \sin \frac{1}{2}\alpha$, takže geometrickým místem bodu $S$ je hyperbola $h_1$, jejíž ohniskem je bod $A$ a řídicí přímkou přímka $p$ a číselná výstřednost $\varepsilon_1 = 1 : \sin \frac{1}{2}\alpha$. Poměr vzdáleností bodu $S$ od bodu $B$ a od přímky $p$ jest $1 : \sin \frac{1}{2}\beta$; geometrickým místem bodu $S$ jest hyperbola $h_2$, jejíž ohniskem je bod $B$, řídicí přímkou je přímka $p$ a číselná výstřednost $\varepsilon_2 = 1 : \sin \frac{1}{2}\beta$. Střed $S$ hledané kružnice je průsečík hyperbol $h_1$ a $h_2$. Úloha je čtyrznačná. Stačí sestrojiti jen hyperbolu $h_1$ a její průsečíky s kružnicí, která je geometrickým místem bodů $S$, pro něž platí úměra

$$AS : BS = \sin \tfrac{1}{2}\beta : \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

25. úl. Řešil p. *Jos. Jíra*, studující VII. tř. r., Písek.

Je-li $x$ rameno, $m$ střední příčka lichoběžníka, jest obsah $O = mx \sin \alpha$, při čemž $m + x = s$, takže $O = (s - x)\, x \,.\, \sin \alpha$. Derivací podle $x$ obdržíme $O' = (s - 2x) \sin \alpha$, $O'' = -2 \sin \alpha$. Obsah bude maximální pro $s - 2x = 0$, $x = \frac{1}{2}s$, $m = \frac{1}{2}s$. Strany rovnoramenného lichoběžníka jsou: základny $s \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$, $s \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$, ramena $\frac{1}{2}s$, obsah $O = \frac{1}{4}s^2 \sin \alpha$.

---

## Z fysiky.

1. úl. Řešil p. *Josef Jíra*, studující VII. tř. r., Písek.

Je-li $c$ počáteční rychlost, $\alpha$ elevační úhel při výstřelu prvního granátu, $d_1$ dálka jeho dostřelu, jest

$$t_1 = \frac{2c \sin \alpha}{g}, \quad d_1 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} = ct_1 \cos \alpha.$$

Druhý granát vystřelený v elevačním úhlu $2\alpha$ bude za dobu $t_2$ právě nad místem dopadu prvního granátu, takže

$$\frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} = ct_2 \cos 2\alpha \quad \text{neboli} \quad c \sin 2\alpha = gt_2 \cos 2\alpha.$$

Z rovnic plyne

$$t_1 \cos \alpha = t_2 \cos 2\alpha \quad \text{neboli} \quad 2t_2 \cos^2 \alpha - t_1 \cos \alpha - t_2 = 0,$$

a z toho

$$\cos \alpha = \frac{t_1 + \sqrt{t_1^2 + 8t_2^2}}{4t_2}.$$

(Poněvadž $\alpha$ může býti jen úhel ostrý, nutno připustiti jen tuto hodnotu.)

Z toho pak plyne

$$\cos 2\alpha = \frac{t_1}{4t_2^2} (t_1 + \sqrt{t_1^2 + 8t_2^2}),$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2\,(t_2^2 - t_1^2)}{4t_2^2 - t_1^2 + t_1 \sqrt{t_1^2 + 8t_2^2}}}.$$

Dále jest $c = gt_1/2 \sin \alpha$, $d_1 = ct_1 \cos \alpha$. Doba, po které dopadne druhý granát,

$$t'_2 = \frac{2c \sin 2\alpha}{g} = \frac{4c \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2t_1 \cos \alpha = 2t_2 \cos 2\alpha;$$

dálka druhého dostřelu

$$d_2 = ct'_2 \cos 2\alpha = 2d_1 \cos 2\alpha\,.$$

2. úl. Řešil p. *J. Šnobl*, studující VIII. tř. rg., Třeboň.

Nechť na počátku ($t = 0$) je bod ve vodorovné rovině na ose $X$. Koule se otáčí úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (bod po poledníkové kružnici obíhá úhlovou rychlostí $\omega/2$). Po době $t$ je vzdálenost průmětu bodu od středu koule $\varrho = r \cos \frac{1}{2}\omega t$ a leží na průměru, který je od osy $X$ odchýlen o úhel $\omega t$. Jest tedy

$$x = \varrho \cos \omega t = r \cos \tfrac{1}{2}\omega t \cos \omega t,$$

$$y = \varrho \sin \omega t = r \cos \varphi \sin 2\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = r^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega t = \tfrac{1}{2} r^2 (1 + \cos \omega t).$$

Poněvadž
$$\cos \omega t = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2 \omega t}} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \omega t = \frac{y}{x},$$

jest
$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2} r \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

neboli
$$2\sqrt{(x^2 + y^2)^3} = r^2 (x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

**Dráha průmětu je křivka 6. stupně. Přímka $y = kx$ má s ní společné dva splývající body (0, 0) a 4 další body po dvou souměrně položené podle středu. Na ose $y$ jsou body 0, 0 a $\pm \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, všechny dvojité.**

Celková rychlost průmětu

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\omega t}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\tfrac{1}{2} r\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega t, \qquad \varrho \frac{d\omega t}{dt} = \omega\varrho = \omega r \cos \tfrac{1}{2}\omega t;$$

jest tedy

$$v = \tfrac{1}{2} r\omega \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}\omega t + 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega t} = \tfrac{1}{2} r\omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega t}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\tfrac{3}{4} r\omega^2 \frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega t \cos \tfrac{1}{2}\omega t}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega t}}.$$

Z toho plyne, že rychlost je maximální pro $t = 0$ a minimální pro $t = \tfrac{1}{2}T$.

3. úl. Řešil p. *Josef Jíra*, studující VII. tř. r., Písek.

Vzdušný sloupec se zmenší o $x$ cm, takže jeho délka bude $2 . 76 - x = 152 - x$ (k poklesnutí hladiny rtuti v nádobě netřeba přihlížeti, poněvadž její poloměr je nepoměrně širší než poloměr trubice). Podle zákona Boyleova jest $(114 - x) . (152 - x) = 114 . 76$, což vede k rovnici $x^2 - 266x + 8664 = 0$. Z ní $x = 38$ cm. Druhý kořen nevyhovuje.

4. úl. Riešil p. *Vojtech Hönig*, žiak VIII. tr. rrg., Nové Mesto nad Váhom.

Pre základny tón u krytej píšťaly platí $N = c/4x$. Pre strunu naladenú na kmitočet $N$ platí $N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}}$. Podľa úlohy

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}} = \frac{c}{4x} \quad \text{a} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}} = \frac{c}{4x} - 34;$$

keď za $\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}}$ dosadíme $c/4x$, dostaneme $x = 50$ cm.

5. úl. Řešil p. *Tibor Kolbenheyer*, studující VIII. tř. rrg., Lučenec.

Z rovnic $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ a $a + b = d$ plyne

$$a = \tfrac{1}{2}(d \pm \sqrt{d (d - 4f)}) \text{ a } b = \tfrac{1}{2} (d \mp \sqrt{d (d - 4f)}).$$

Dosadíme-li $\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, jest

$$a = \tfrac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{d\left(d - \frac{4r_1r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)}\right)}\right],$$

$$b = \tfrac{1}{2}\left[d \mp \sqrt{d\left(d - \frac{4r_1r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)}\right)}\right].$$

6. úl. Řešil p. *Jar. Ptáček*, studující III. roč. uč. úst., Praha II.

**Řetěž délky $l$ rozdělíme na $n$ stejných dílů. K posuvu jednoho dílku po šikmé rovině je třeba síly $\frac{ql}{n}(\sin\alpha + f \cos\alpha) = \frac{ql^2}{n \cos\varepsilon} \sin(\alpha + \varepsilon)$, při čemž $f = \operatorname{tg}\varepsilon$. Na horizontální rovině překonává se toliko tření $\frac{fql}{n} = \frac{ql \sin\varepsilon}{n \cos\varepsilon}$.**

Celková práce na šikmé rovině jest

$$L_1 = \frac{ql^2}{n \cos \varepsilon} \sin (\alpha + \varepsilon) \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n}{n} \right) =$$

$$= \frac{q(1+n) l^2}{2n \cos \varepsilon} . \sin (\alpha + \varepsilon)$$

a na horizontální rovině

$$L_2 = \frac{ql^2}{n \cos \varepsilon} . \sin \varepsilon \left( \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{q(1+n) l^2}{2n \cos \varepsilon} \sin \varepsilon.$$

Úhrnná práce

$$L = L_1 + L_2 = \frac{q(1+n)l^2}{2n \cos \varepsilon} [\sin (\alpha + \varepsilon) + \sin \varepsilon] =$$

$$= \frac{q(1+n)l^2}{n \cos \varepsilon} \sin (\tfrac{1}{2}\alpha + \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Pro $n = \infty$ jest

$$L = \frac{ql^2}{\mathrm{os}\, \varepsilon} \sin (\tfrac{1}{2}\alpha + \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

7. úl. Řešil p. autor *Miroslav Šejvl.*

Na průřez $S$ ve vzdálenosti $x$ zdola působí síla $P = \nu . S$ ($\nu$ normální napětí, $S$ průřez). Diferencováním dostaneme d$P = \nu$ d$S$. Přírůstek síly d$P$ jest váha sloupce výšky d$x$; jest tedy d$P = S$ . d$x$ . $s$ ($s$ hustota). Z toho separací proměnných a integrací plyne

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \frac{\nu}{s} \int_{S_0}^{S} \frac{\mathrm{d}S}{S}, \quad x = \frac{\nu}{s} \ln \frac{S}{S_0}.$$

Pro $x = 0$ jest $S_0 = \frac{Q}{\nu}$ a tedy $S = S_0 e^{\frac{sx}{\nu}} = \frac{Q}{\nu} e^{\frac{sx}{\nu}}$.

8. úl. Řešil p. autor dr. *Mik. Šmok.*

Za dobu $t$ bude zdroj ve vzdálenosti $s = \frac{1}{2}at^2$ a nabude rychlosti $v = at$. Podle principu Dopplerova zaslechne pozorovatel místo tónu kmitočtu $N$, vysílaného zdrojem, tón snížený $N_1 = \frac{Nc}{c+v} = \frac{Nc}{c+at}$, kdež $c$ je rychlost zvuku ve vzduchu. Tento tón nezaslechne ovšem pozorovatel po době $t$, nýbrž později v dobu $t_1 = \frac{s}{c} = \frac{at}{2c}$, tedy od počátku pohybu zdroje po době $t'_1 = t + t_1 = \frac{t}{2c}(2c + at)$.

Kdyby se po době $t$ rychlost $v$ již neměnila, poznal by to pozorovatel z toho, že by po době $t'_1$ slyšel stále jen tón $N_1$. Kdyby se po době $t$ zdroj zastavil, poznal by to pozorovatel, že by se mu po době $t'_1$ tón $N_1$ náhle zvýšil na $N$. Bude-li rychlosti dále přibývati, bude se tón $N_1$ postupně stále snižovati.

Kdyby tedy na př. $N_1$ bylo o oktávu nižší než $N$, bylo by $\frac{N_1}{N} =$

$= \dfrac{c}{c + at} = \frac{1}{2}$. Z toho plyne $t = \dfrac{c}{a}$ a tudíž $t'_1 = \dfrac{3c}{2a}$. Při daných hodnotách jest $t = 34^s$, $t'_1 = 51^s$, $v = 340$ m/sec, $s = 5780$ m. Při snížení na sextu je $t = 6{,}8^s$, $t'_1 = 7{,}48^s$, $v = 68$ m/sec, $s = 231{,}2$ m. Snižuje-li se tón postupně na septimu, sextu atd. stupnice diatonické dur, bude

$$\frac{N_1}{N} = \frac{c}{c + at} = \tfrac{15}{16}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{9}{16}, \tfrac{1}{2},$$

a příslušné

$$t = \frac{c}{15a}, \frac{c}{5a}, \frac{c}{3a}, \frac{c}{2a}, \frac{3c}{5a}, \frac{7c}{16a}, \frac{c}{a}.$$

9. úl. Řešil p. *Tibor Kolbenheyer*, studující VIII. tř. rrg., Lučenec.

Obraz bodového zdroje $S$ vznikne ve vzdálenosti $b$ od čočky. Podle čočkové rovnice $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$ jest $b = \dfrac{af}{a - f}$. Vzdálenost stinítka od obrazu zdroje $c = d - (a + b) = \dfrac{ad - a^2 - fd}{a - f}$. Svítivost obrazu a zdroje jsou v poměru $b^2 : a^2$; je tedy intensita osvětlení na stinítku v blízkosti osy rovna $S \dfrac{b^2}{a^2 \cdot c^2} = \dfrac{S \cdot f^2}{(ad - a^2 - fd)^2}$. U rozptylky je závislost intensity osvětlení na $a$ vyjádřena stejným vztahem, avšak $f$ je číslo záporné.

Při odvození bylo předpokládáno, že vzdálenost stinítka od čočky je větší než $a + b$. Je-li menší, je $c = (a + b) - d$. To však nemá vlivu na výsledek, poněvadž $c^2$ zůstává stejné.

Dodatek p. autora dr. *Mik. Šmoka*.

Mělo se též vyšetřiti, jak se mění intensita osvětlení $I$, roste-li $a$ od 0 do $d$. K tomu je potřeba vyšetřiti, jak se mění hodnota výrazu $y = -a^2 + ad \mp fd$, v němž $f$ a $d$ jsou konstantní a proměnná $a$ roste od 0 do $d$. Grafickým znázorněním funkce $y$ je parabola, jejíž osa má směr záporné poloosy $y$ a jejíž vrchol má při spojné čočce souřadnice $a_0 = \frac{1}{2}d$, $y_0 = \frac{1}{4}d^2 - fd$. Toto $y_0$ je kladné, je-li $d > 4f$; při $d = 4f$ je $y_0 = 0$ a při $d < 4f$ je $y_0$ záporné. Pro $a = 0$ anebo $a = d$ je $y = -fd$ a jeho absolutní hodnota je větší než absolutní hodnota $y_0$.

Je-li tedy $d < 4f$ a je-li čočka v bodě $S$ ($a = 0$), je na stinítku $I = S/d^2$. Pohybujeme-li čočkou ke stinítku, zvětšuje se $a$, absolutní hodnota $y$ se zmenšuje, $I$ se zvětšuje až do maxima $I_0 = \dfrac{16Sf^2}{d^2\,(4f - d)^2}$ při $a_0 = \frac{1}{2}d$. Nato $I$ opět klesá až k hodnotě $I = S/d^2$ při $a = d$.

Je-li $d = 4f$, zvětšuje se postupně $I$ od $I = S/d^2$ až do maxima $I = \infty$ (na stinítku je všechno světlo soustředěno v jediný bod) při $a = 2f$, na to se $I$ zmenšuje až k hodnotě $I = S/d^2$.

Je-li $d > 4f$, protíná osa $a$ parabolu ve dvou bodech, určených kořeny $a_1$, $a_2$ rovnice $a^2 - ad + fd = 0$, které jsou oba kladné a menší než $d$. Intensita $I$ tedy postupně se zvětšuje od $I = S/d^2$ až k hodnotě $I = \infty$ při $a = a_2$; pak se zmenšuje až ke krajní hodnotě $I_0 = \dfrac{16Sf^2}{d^2\,(4f - d)^2}$ při $a_0 = \frac{1}{2}d$, na to se zase zvětšuje k hodnotě $I = \infty$ při $a = a_1$ a pak klesá až k hodnotě $I = S/d^2$.

Při rozptylce jde o parabolu $y = -a^2 + ad + fd$. Pro $a = 0$ nebo $a = d$ je $y = fd$, vrchol paraboly má souřadnice $a_0 = \frac{1}{2}d$, $y_0 = \frac{1}{4}d^2 + fd$, takže $y_0 > fd$. Průsečíky s osou $a$ leží však mimo interval $0 - d$ (jeden kořen je záporný, druhý větší než $d$). Intensita se zmenšuje od hodnoty $S/d^2$ až k hodnotě $I_0 = \frac{16Sf^2}{d^2(4f + d)^2}$, pak se zase zvětšuje až k hodnotě $S/d^2$. Na př. pro $d = 4f$ je $I = S/16f^2$ a $I_0 = S/64f^2$, je tedy $I_0 = \frac{1}{4}I$.

10. úl. Řešil p. *Jar. Ptáček*, studující III. roč. uč. úst., Praha II.

Odpor větve s galvanometrem budiž $R$; pod $R_3$ se rozumí odpor celého nerozvětveného vedení (tedy včetně vnitřního odporu článku elektromotorické síly $E_1$).

Proud ze zdroje $E_1$ má intensitu

$$E_1 : \left(R_1 + \frac{1}{1/R + 1/R_2}\right) = \frac{E_1(R + R_2)}{RR_1 + R_1R_2 + RR_2}.$$

Na větev s galvanometrem připadá intensita $\frac{E_1 R_2}{RR_1 + R_1R_2 + RR_2}$. Proud ze zdroje má intensitu $E_2 : \left(R + \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2}\right) = \frac{E_2(R_1 + R_2)}{RR_1 + R_1R_2 + RR_2}$. Z rovnosti obou intensit plyne $E_1 : E_2 = (R_1 + R_2) : R_2$. Za změněných odporů jest $E_1 : E_2 = (R_1 + \varrho_1 + R_2 + \varrho_2) : (R_2 + \varrho_2)$. Srovnáme-li obě úměry, nalezneme $E_1 : E_2 = (\varrho_1 + \varrho_2) : \varrho_2$.

## Z deskriptivní geometrie.

1. úl. Riešil p. *Tibor Kolbenheyer*, žiak VIII. tř. rrg., Lučenec.

Spojnica $AB$ pretína rovinu $\varrho$ v bode $P$. Stred hľadanej gule leží na kolmej valcovej ploche so stredom základu $P$ a polomerom $\sqrt{PA \cdot PB}$, ktorej priemetom na rov. $\varrho$ je kružnica $k_1$. Geom. miestom stredov guli dotýkajúcich sa roviny $\varrho$ a danej gule polomeru $r$ sú 2 plochy paraboloidu, ktorých osy sú kolmé na $\varrho$, vzdialenosti riadiacich rovin od $\varrho$ sú $\pm r$ a ohniskom je stred gule. Rezy týchto paraboloidov s rovinou súmernosti úsečky $AB$ sú obecne elipsy, ktorých priemetom na rovinu $\varrho$ sú kružnice $k_2$, $k'_2$. Priesečníky $k_1$ a $k_2$ ($k'_2$) sú priemety hľadaných stredov na rov. $\varrho$.

2. úl. Řešil p. *Karel Joza*, studující VIII. tř. rg., Benešov u Prahy.

Řešení příkladu je užitím věty Dandelinovy. V ohnisku $F_1$ v rovině $\sigma$ vztyčme kolmici k rovině $\sigma$. Na této leží střed koule, kuželi vepsané. Střed její bude také ležeti na rovině symetrie $\varphi_1$ nebo $\varphi_2$ rovin $\varrho$ a $\sigma$. Průsečík přímky $k$ s rovinou $\varphi_1$ nebo $\varphi_2$ je střed hledané koule. Pak průsečík přímky $k$ s koulí spojíme s druhým ohniskem $F_2$ a průsečík této spojnice s rovinou $\varrho$ určí vrchol $V$. Úloha jest obecně dvojznačná.

3. úl. Řešil p. autor *Pospíšil.*

Považujme body $A$, $B$ za půdorysy vrcholů dvou kvadratických kuželů se společnou základnou $k$ v průmětně a bod $C$ za půdorysný stopník jejich spojnice. Předepsaná konstrukce odpovídá sestrojení proniku obou kuželů. Jednou částí proniku jest daná kuželosečka $k$, tedy další částí jest zase kuželosečka $k_1$.

Druh kuželosečky $k_1$ závisí na tom, jsou-li její nevlastní body reálné různé (hyperbola), reálné splývající (parabola) nebo komplexně sdružené (elipsa). Tedy jsou-li na kuželi s vrcholem $A$ dvě reálné různé přímky rovnoběžné s dvěma reálnými různými přímkami kužele s vrcholem $B$, jest naše geom. místo hyperbolou. To poznáme, sestrojíme-li ke kuželi $B$ kužel podobný podle středu podobnosti $C$ tak, aby jeho vrchol splynul s $A$. V půdoryse se to projeví tak, že ke kuželosečce $k$ sestrojíme podle středu podobnosti $C$ a poměru podobnosti $\frac{CA}{CB}$ kuželosečku podobnou $k^*$.

Když $k$ a $k^*$ se protnou (mimo společné body nevlastní)

1. ve dvou bodech reálných různých, jest $k_1$ hyperbolou;
2. ve dvou bodech reálných splývajících, jest $k_1$ parabolou;
3. ve dvou bodech kompl. sdr., jest $k_1$ elipsou.

Aby naše geom. místo bylo parabolou, musí se $k$ a $k^*$ dotýkati. Vzájemná poloha bodů $A$, $B$, $C$ musí tedy býti taková, aby tento dotyk nastal. Tomuto požadavku vyhovíme, když $C$ leží na průměru $k$ a $A$, $B$ jsou průsečíky přímky vedené bodem $C$ s tečnami $k$ v průsečných bodech téhož průměru s $k$.

$k_1 \backsim k$ bude tehdy, když i další dva průsečíky $k$ a $k^*$ budou nevlastními body obou těchto kuželoseček neboli když $k$ a $k^*$ budou soustředné. To nastane, když $C$ splyne se středem $k$. Když tedy $C$ je ve středu dané kuželosečky $k$ a body $A$, $B$ na jednom jejím průměru, jest geom. místo $k_1$ podobné dané kuželosečce $k$.

Konstrukce $k_1$ se provede tak, že určíme kolineaci, která platí mezi $k$ a $k_1$ na každém našem kuželi.

4. úl. Řešil p. *Karel Joza*, studující VIII. tř. rg., Benešov u Prahy.

*a*) Danými body $A$, $B$ sestrojíme rovinu $\sigma$, kolmou k dané rovině $\varrho$. Rovina $\sigma$ protne hledanou plochu obecně v hyperbole, jejíž jedna asymptota je kolmá k $\varrho$. Tuto asymptotu sestrojíme podle věty Pascalovy, neboť známe 5 bodů hyperboly: body $A$, $B$, dva průsečíky roviny $\sigma$ s danou kružnicí v rovině $\varrho$ a pátý bod je úběžný bod kolmice k rovině $\varrho$. Hledaná asymptota je tečnou v tomto bodě. Přímka ortogonální plochy kuželové, kolmá k rovině $\varrho$, má tečnou rovinu, která prochází nalezenou asymptotou. Takové roviny jsou dvě a úloha je tedy obecně dvojznačná. Vrchol plochy kuželové se stanoví rovinou pomocnou, která prochází nalezenou kolmou přímkou k rovině $\varrho$ a jedním daným bodem (třeba $A$). Tato rovina protne plochu kuželovou v druhé přímce, jdoucí bodem $A$ a průsečíkem této roviny s danou kružnicí. Obě přímky stanoví vrchol hledané plochy.

*b*) Danými tečnami sestrojme tečné roviny (jsou 4) k dané kružnici; jejich průsečnice procházejí již vrcholem hledané plochy. Těchto průsečnic je celkem 6, ale v úvahu přicházejí jen 4, ježto dvě z nich jsou dané tečny, jež vrcholem neprocházejí. Sestrojme nyní nad danou kružnicí rotační válcovou plochu, která s uvedenými průsečnicemi stanoví již vrcholy hledané plochy kuželové. Úloha má obecně 8 řešení.

5. úl. Řešil p. *František Brož*, studující VIII. tř. rrg., Prachatice.

V daném ohnisku musí se dané roviny dotýkati koule, vepsaná hledanému válci. Tato koule se musí dotýkati též dané přímky; lze ji proto sestrojiti, neboť je dokonale určena. Plocha válcová, opsaná kouli a jejíž přímky jsou rovnoběžné s danou přímkou, náleží hledanému válci. Podle Dandelinovy věty získáme i druhé ohnisko průsečné elipsy a její hlavní osu. Hlavní vrcholy této elipsy patří pak podstavám válce. Jejich roviny jsou kolmé k dané přímce.

## Seznam řešitelů úloh.

*Bachleda Jos.*, VII. rg., Kežmarok, m.: 1, 6, 9, f.: 1; *Balala Jos.*, r., Bratislava, m.: 1, 4, 5, 6, 9; *Bém Karel*, VI. r., Pardubice, m.: 1, 3, 5, 6, 9, 15, 16, f.: 2; *Bohun Ant.*, VIII. rg., Strážnice, m.: 1, 3, 5—7, 9—12, 14—19, 22—25; *Brož Frant.*, VIII. rrg., Prachatice, m.: 1, 3, 5, 6, 9, 14—17, 22, 25, g.: 5; *Dvořáková Marie*, VII. rg., Benešov u Prahy, m.: 6, 9; *Ehlich Stanislav*, V. rg., Praha II, m.: 1, 3, 6, 9, 19, 25; *Farková Vilma*, VII. rg., Benešov u Prahy, m.: 10, 17; *Friebeiszová Flora*, VIII. rg., Bratislava, m.: 1, 3, 25; *Fluss Egon*, VI. rg., Bratislava, m.: 1, 3, 5—10, 15, 17, 22, 23, 25; *Francl Jos.*, VII. rg., Benešov u Prahy, m.: 1, 2; *Hönig Vojtěch*, VIII. rrg., Nové Mesto nad Váhom, m.: 1, 3, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 25, f.: 1, 3, 4, 8; *Jindrová M.*, VII. rg., Benešov u Prahy, m.: 3, 16; *Jíra Josef*, VII. r., Písek, m.: 1—25, f.: 1—6, 8, 10; *Joza Karel*, VIII. rg., Benešov u Prahy, g.: 1, 2, 4, 5; *Kličková J.*, VII. rg., Bratislava, m.: 1, 6, 9, 19; *Klímek Karel*, VIII. rg., Uherské Hradiště, m.: 1, 3, 9, 15, 25; *Kliment Vojt.*, VI. rrg., Zvolen, m.: 4, 6, 9, 11, 17, 24, 25; *Kohoušek St.*, VI. rg., Benešov u Prahy, m.: 1, 5; *Kolbenheyer Tibor*, VIII. rrg., Lučenec, m.: 1—16, 17, 19—25, f.: 1—10, dg.: 1, 2, 4, 5; *Merhaut Josef*, rg., Praha XII, m.: 3, f.: 6; *Mikeska Jindřich*, VII. rg., Hlučín, m.: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 14, 16, 17, 20, 22, 23, 25, f.: 4, 7; *Nantl Břetislav*, VII. rg., Litovel, m.: 1, 6, 9, 11, 15, 16, 19; *Němec Stanislav*, VI. rg., Litovel, m.: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10; *Nespál Pavel*, VI. rrg., Zvolen, m.: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 19, 23, 25; *Ptáček Jaroslav*, III. roč. učitel. ústavu, Praha II, m.: 1, 3, 5, 6, 9, 15; f.: 1—6, 8, 9, 10; *Šenkyřík J.*, VIII. arcib. g., Kroměříž, m.: 9, 25; *Schwarzová Viera*, IV. rrg., Nové Mesto nad Váhom, m.: 1; *Šnobl Josef*, VIII. rg., Třeboň, m.: 1, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 22, 24a, 25, f.: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8; *Turnovský Leo*, VI. rg., Něm. Brod, m.: 1, 3, 5, 9, 10; *Valek Stan.*, VIII. rrg., Kralupy nad Vl., m.: 1, 2, 3, 6, 9, 13, 15; *Vitáček Ferd.*, VI. rg., Praha XVI., m.: 1—10, 15, 16, 17, 19, 25.

---

## Udělení cen.

Redakce přihlížejíc k jakosti a počtu řešených úloh, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem Jednoty československých matematiků a fysiků:

### Z matematiky:

První cenu obdrží: p. *Josef Jíra*, VII. r., Písek; druhou cenu obdrží p. *Tibor Kolbenheyer*, VIII. rrg., Lučenec, a p. *Ferd. Vitáček*, VI. rg., Praha XVI.

Z fysiky:

Obdrží ceny: p. *Tibor Kolbenheyer*, VIII. rrg., Lučenec, a p. *Jaroslav Ptáček*, III. roč. uč. úst., Praha II.

Z deskriptivní geometrie:

Obdrží cenu: p. *Karel Joza*, VIII. rg., Benešov u Prahy.

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdrží: p. *Vojtech Hönig*, VIII. rrg., Nové Mesto nad Váhom, p. *Josef Šnobl*, VIII. rg., Třeboň, a žák třídy I. obecné školy v Čes. Budějovicích, označený správou školy za nejlepšího počtáře.

*Poznámka.* Vypsané ceny za provedení úloh z deskr. geometrie ve vzorných rysech nebyly uděleny.

---

**Upozornění.** Posledním výnosem MŠO obsahujícím předpisy pro výroční zprávy středních škol bylo znemožněno, aby ve výročních zprávách byly otištěny maturitní úlohy z deskriptivní geometrie. Redakce chce v příštím ročníku Rozhledů otisknouti vybrané takové úlohy. Obrací se proto na pány profesory deskriptiváře s prosbou, aby jí zasílali lístkem přesné texty úloh z deskr. geometrie, které byly letošního roku na jejich ústavě dány při zkouškách dospělosti, a vzdává za to předem svůj dík. (Adresa redakce: Praha II, Žitná 25.)