Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Chládek

Některé věty týkající se rozkladu mnohočlenů jedné proměnné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 3, 247--251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121639

Étant donnée une série semi-convergente dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice, soit

$$S_{1,1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + - \cdots$$

on démontre aisément qu'on peut considérer la série S_{pq}, dans laquelle p termes positifs sont suivis de q termes négatifs, comme une série absolument convergente dont le terme général est

$$u'_n = (u_{np} + u_{np+1} + \cdots + u_{np+p-1} - u_{nq} - u_{nq+1} - \cdots - u_{nq+q-1})$$

et dont la somme se calcule aisément par la méthode de Weyr. On peut faire voir, d'une manière analogue, qu'on peut réunir les facteurs d'un produit infini semi-convergent de manière qu'on obtienne un produit absolument convergent et dont la valeur se calcule par la méthode de Weyr.

Některé věty týkající se rozkladu mnohočlenů jedné proměnné.

Napsal *Zdeněk Chládek.*

Známá věta Eisensteinova, o níž se opírá důkaz irreducibility rovnice pro primitivní n-té kořeny jednotkové, je-li n prvočíslo, jest východiskem pro řadu vět jiných, udávajících kriteria k zjištění irreducibility mnohočlenů jedné proměnné se součiniteli celistvými. Takové věty odvodili Koenigsberger,[1]) Netto[2]) a Perron,[3]) který nad to všecky věty jemu známé, sem spadající, odvodil znovu pomocí teorie ideálů, při čemž mohl některé z nich rozšířiti.

Zde odvodím dvě věty obsahující větu Eisensteinovu jako zvláštní případ, které, ač jsou na snadě, dle mého vědomí dosud uveřejněny nebyly.

První větu obdržíme užívajíce postupu Weberova[4]) při důkazu věty Eisensteinovy na rozklad mnohočlenu

$$M(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-l-1} x^{l+1} + q\, a_{n-l} x^l + q\, a_{n-l+1} x^{l-1} + \ldots + q a_n,$$

kde q značí prvočíslo, jímž a_{n-l-1}, a_n nejsou dělitelna a $2l + 1 > n$.

Předpokládejme totiž možný rozklad $M(x) = m(x) \cdot n(x)$, kde

[1]) Crelles Journal, sv. 115.

[2]) Mathem. Annalen, sv. 48.

[3]) Mathem. Annalen, sv. 60.

[4]) Weber, Algebra.

mnohočleny $m(x)$, $n(x)$ stupňů μ, ν mají celistvé součinitele 1, α_1, α_2, ... α_μ, 1, β_1, β_2, ... β_ν. Jest pak

$$qa_n = \alpha_\mu \beta_\nu$$

a obecně
$$qa_r = \sum_{i=o}^{r} \alpha_i \beta_{r-i}.$$

Dejme tomu, že α_μ obsahuje q co dělitele, pak vzhledem ku předpokladu jest β_ν s q nesoudělno. Z dalších rovnic pak plyne, že všecka α_i $(i = \mu, \mu-1, \ldots \mu - l)$ jsou dělitelna q. Tím však nemohou být součinitelé mnohočlenu $m(x)$ vyčerpáni, neboť by byl dělitelný číslem q, jímž mnohočlen $M(x)$ dělitelný není. Má tedy $m(x)$ nutně ještě alespoň součinitele $\alpha_{\mu-l-1} \not\equiv o$ (mod q), z čehož vychází

$$\mu \geqq l+1, \quad \nu \leqq n-l-1.$$

Pro $l = n-1$ vede tento postup k důkazu věty Eisensteinovy, zde však byl podán důkaz věty obecnější:

I. Mnohočlen

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-l-1} x^{l+1} + qa_{n-l} x^l + qa_{n-l+1} x^{l-1} + \ldots$$
$$\ldots + qa_n,$$

kde q značí prvočíslo, jímž a_{n-l-1}, a_n nejsou dělitelna a $2l+1 > n$, nemá dělitele racionálního stupně s takového, aby $n-l-1 < s < l+1$.

Okolnost, že substituce $x = \frac{1}{\xi}$ (obecně substituce lineárná lomená o koefficientech racionálných) na vlastnostech daného mnohočlenu vztahujících se k racionálné rozložitelnosti ničeho nemění, vede k tomu, uvažovati mnohočleny symmetrických vlastností vzhledem k této substituci. Tak lze dokázati větu touto úvahou z věty I. plynoucí:

II. Mnohočlen

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \ldots + c_n x^n$$

jehož součinitelé vesměs až na součinitele c_k jsou dělitelni prvočíslem p, součinitelé c_o, c_n pak pouze první jeho mocninou je-li reducibilní, má toliko dělitele k-tého a $(n-k)$tého stupně.

Označme daný mnohočlen zase $M(x)$ a předpokládejme možný rozklad jeho $M(x) = m(x)\, n(x)$ se součiniteli $a_i\, b_j$, pak je-li a_s dělitelno prvočíslem p obdobně jako při důkazu věty I. soudíme, že $m(x)$ musí být alespoň stupně k-tého.

Sčítanci součtu $\sum_{i=o}^{k} a_i b_{k-i} = c_k \not\equiv o$ (mod p) jsou, jak z předešlého plyne, vesměs dělitelni p až na sčítance $a_k b_o$, tedy a_k s p

nesoudělno. V dalších součinitelích c_l $(l > k)$, jež jsou zase násobky prvočísla p, vyskytuje se a_k po řadě násobeno součiniteli $b_1, b_2, \ldots. b_\nu$, z čehož zřejmo, že všecka tato čísla jsou násobky p, ježto součet zbývajících sčítanců v dotyčných součinitelích c_l je pokaždé p dělitelný. Kdyby však dělitel $m(x)$ byl stupně $> k$, tu by se vyskytovali ještě součinitelé $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$. v součinitelích c_l $(l > k)$ a to vždy násobeni b_0 kdykoliv se poprvé vyskytnou a byli by nutně násobky p. Byli by pak oba součinitelé nejvyšších přípon a_μ, b_ν násobky p, proti předpokladu $c_n \equiv\!\!|\!\!\equiv o$ (mod p^2). Číslo c_n jen tenkrát bude dělitelno pouze první mocninou p, jestliže a_k jest součinitelem nejvyšší přípony v mnohočlenu $m(x)$. Tím důkaz věty II., která pro $k = n$ přechází ve větu Eisensteinovu, proveden.

Násobíme-li mnohočlen $M(x)$ číslem p^{n-1} a zavedeme pak substituci $y = px$, obdržíme — je-li $c_n = p$ — mnohočlen, jehož součinitel při nejvyšší mocnině rovná se jedné. Srovnáme-li pak větu II. s jistou větou Koenigsbergerovou v Perronově práci pod (2) uvedenou, specialisovanou tak, že veličinu, již Koenisberger označuje e, položíme rovnou $n-1$, shledáme, že je k ní v témže poměru jako naše věta ku větě Eisensteinově.

Možno si mysliti nyní mnohočlen splňující předpoklady věty II. vzhledem k prvočíslu p a proto svědčící o možných dělitelích stupňů k a $n-k$, zároveň však splňující předpoklady ty vzhledem k prvočíslu $q \neq p$, z čehož bylo by lze souditi na možné dělitele stupňů l, $n-l$. Z uvedeného důkazu věty II. však patrno, že obě možnosti se navzájem vylučují je-li $k \neq l$, i kdyby k bylo rovno $n-l$. Plyne tedy věta:

III. Mnohočlen

$$pq c_0 + \ldots. + pq c_{k-1} x^{k-1} + q c_k x^k + pq c_{k+1} x^{k+1} + \ldots..$$
$$\ldots. + pq c_{l-1} x^{l-1} + p c_l x^l + pq c_{l+1} x^{l+1} + \ldots..$$
$$\ldots.. + pq c_n x^n,$$

kde $k \neq l$, p, q různá prvočísla a jehož součinitelé splňují podmínky $c_0 \equiv\!\!|\!\!\equiv o$, $c_n \equiv\!\!|\!\!\equiv o$ (modd: p, q), $c_k \equiv\!\!|\!\!\equiv o$ (mod p), $c_l \equiv\!\!|\!\!\equiv o$ (mod q) jest irreducibilní.

V pojednání Nettově, k němuž na začátku bylo poukázáno, nalézá se věta, dle níž mnohočlen

$$x^n + pa_1 x^{n-1} + \ldots + p a_{n-k-1} x^{k+1} + p^2 a_{n-k} x^k + p^2 a_{n-k+1} x^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + p^2 a_n,$$

kde a_{n-k-1}, a_n prvočíslem p nejsou dělitelna a $n > 2k+1$, nemá racionálního dělitele stupně nižšího než $k+1$.

Mnohočlen však, který nepřipouští racionálního dělitele stupně n i ž š í h o než $k+1$, nemá též dělitele racionálního stupně v y š š í h o než $n-k-1$. (Aniž by takto uvažoval, odvozuje Netto jinou cestou pro $n=2k+1$ irreducibilitu mnohočlenu.) Jinými slovy: uvažovaný mnohočlen nemá racionálního dělitele stupně s takového, aby $s<k+1$ nebo $n-k-1<s$.[5])

Postavíme-li tuto větu vedle naší věty I., seznáme, že se v jistém smyslu doplňují; mnohočlen, jehož součinitelé hoví podmínkám v těchto větách položeným vzhledem ku dvěma různým prvočíslům p, q, nemůže míti racionálného dělitele stupně s takového, aby

$$\begin{matrix} s<k+1 & & n-k-1<s \\ & \text{nebo} & \\ n-l-1<s & & s<l+1. \end{matrix}$$

Interval pro možný stupeň s přípustného dělitele lze tu libovolně zúžiti, zvláště důležitý bude pak případ, kdy tento interval vymizí vůbec. Tím jsme vedeni ku větě:

IV. Mnohočlen

$$x^n+pa_1x^{n-1}+\ldots+pa_{n-l-1}x^{l+1}+qpa_{n-l}x^l+qpa_{n-l+1}x^{l-1}+\ldots$$
$$\ldots+qpa_{n-k-1}x^{k+1}+qp^2a_{n-k}x^k+qp^2a_{n-k+1}x^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+qp^2a_n,$$

kde p, q jsou dvě prvočísla různá, $a_{n-l-1}\equiv|\equiv o \pmod q$, $a_{n-k-1}\equiv|\equiv o \pmod p$, $a_n\equiv|\equiv o$ (modd. p, q), $2l+1>n>2k+1$ a $n\leq k+l+1$, jest irreducibilní.

*

Sur quelques théorèmes concernant la décomposition des polynômes à une variable.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre deux théorèmes sur la réductibilité des polynômes à une variable, lesquels contiennent, comme cas particulier, le théorème d'Eisenstein bien connu. Les voilà:

I. Le polynôme

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-l-1}x^{l+1}+qa_{n-l}x^l+qa_{n-l+1}x^{l-1}+\ldots$$
$$\ldots+qa_n,$$

ou q est un nombre premier par lequel les coefficients a_{n-l-1}, a_n ne sont pas divisibles et où $2l+1>n$, ne possède pas de diviseur rationnel dont le degré s satisfasse à la relation

$$n-l-1<s<l+1$$

5) Zdůrazňuji, že tyto nerovniny nutno uvažovati odděleně, jinak by vedly k mylným úsudkům, jak patrno z příkladu $n=12$, $k=5$, kdy jedině možný jest rozklad ve dva mnohočleny 6. stupně.

II. Le polynôme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{k-1}x^{n-k+1} + a_kx^{n-k} + a_{k+1}x^{n-k-1} + \ldots + a_n$$

dont tous les coefficients, à l'exception de a_k, sont divisibles par le nombre premier p, dont a_o, a_n ne contiennent que la première puissance, ne possède, en cas de réductibilité, que des diviseurs de degré k et $n-k$.

L'auteur déduit, de ces deux théoremes, deux critères d'irréductibilité.

Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného.

Napsal Dr. *Václav Hlavatý.*

§ 1.[1]

1. Prostor pětirozměrný můžeme určiti dvěma rovinami ${}^3\pi$ a ${}^1\pi$, které se neprotínají. Rovina ${}^3\pi$ nechť leží v našem prostoru a je půdorysnou. O rovině ${}^1\pi$ činím následující předpoklady: 1. Jest polorovnoběžna s naším prostorem, protínajíc ho v úběžném bodě „$u^0{}_\infty$“. 2. Extremní odchylky (a tudíž všechny odchylky) rovin ${}^3\pi$ ${}^1\pi$ jsou $\alpha=\beta=45^0$. — Úběžnou rovinu prostoru totálně kolmého ku ${}^3\pi$ nazvu ${}^2\pi$. Každý bod $\substack{{}^1a\\ {}^2a}$ roviny $\substack{{}^1\pi\\ {}^2\pi}$ určuje, s rovinou $\substack{{}^2\pi\\ {}^1\pi}$ prostor, který protíná průmětnu v $\substack{\text{„druhém“}\\ \text{„prvém“}}$ průmětu $\substack{{}^1a_2\\ {}^2a_1}$ bodu $\substack{{}^1a\\ {}^2a}$. Prostor $({}^3\pi{}^1a)$ protne ${}^2\pi$ v takovém bodě ${}^2a$, že ${}^1a_2 \equiv {}^2a_1$. Pak tedy každá přímka ${}^1A$ roviny ${}^1\pi$, procházející bodem $u^0{}_\infty$ zastává úlohu přímky C kapitoly prvé v nadprostoru $({}^1A{}^3\pi)$. Přímce ${}^1A$ odpovídá v rovině ${}^2\pi$ přímka ${}^2A$ $({}^2A_1 \equiv {}^1A_2)$, která v prvé kapitole se nazývala Γ.

2. V rovině ${}^3\pi$ zvolím dvě přímky $C_2 \parallel C'_2$ bodem „u^0“ (tab. 4.), kteréž považuji za druhé průměty přímek C resp. C' v rovině ${}^1\pi$ bodem $(u^0{}_\infty)$. Vrcholy jejich distančních rovnoosých hyperbol (kap. I.) nechť jsou „h“ na „C'_2“ „h'“ na „C_2“ a $hh' \perp C_2$. Přímka C'', jejíž druhý průmět je $C''_2 \equiv hh'$ svírá (tak jako i všechny ostatní přímky v ${}^1\pi$ dle předpokladu) s ${}^3\pi$ úhel 45^0, i jest její distanční hyperbola o středu „c_2“ taktéž rovnoosá o vrcholu h'' $[h''h = h''h' = hh']$. Těmito třemi přímkami jest pole ${}^1\pi_2$ stanoveno tak, že ${}^1\pi$ hoví hořejším dvěma přímkám. Důkaz je snadný.

[1] Práce tato — z února 1922 — je pokračováním pojednání „Promítání z přímky na rovinu prostoru čtyřrozměrného“ (v minulém ročníku. Značím ji kapitola I). Vzhledem k tiskovým poměrům omezil jsem se jen na z á k l a d n í konstrukce. Důkazy, které jsou snadné, nebo vyplývají z kapitoly I, pomíjím. Vysvětlení konstrukcí provádím jen, kde je to bezpodmínečně nutné.