František Josef Studnička

O neodvislém vyjádření vyšších variantů a retrovariantů rovnicových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 4, 208--212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121626

O neodvislém vyjádření vyšších variantů a retrovariantů rovnicových.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Všeobecný tvar rovnice stupně n-tého možná podle *Cayley-e* vyjádřiti binarním polynomem

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n)\widehat{\ }(x, 1)^n = 0,$$

aneb rozvineme-li, výrazem

$$f(x) \equiv a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + (n)_2 a_2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (n)_1 a_{n-1} x + a_n = 0, \qquad (1)$$

z něhož se přejde k obyčejnému tvaru, položíme-li

$$(n)_k a_k = b_k, \qquad a_0 = 1.$$

Odstraníme-li tu druhý člen od $\left\{ \begin{matrix} \textit{začátku} \\ \textit{konce} \end{matrix} \right\}$, obdržíme rovnici *změněnou* neboli *varirovanou*, jejíž koëficienty pak slují $\left\{ \begin{matrix} \textit{varianty} \\ \textit{retrovarianty} \end{matrix} \right\}$.

Poněvadž se obé provádí linearní substitucí, mají tyto varianty složení druhu zvláštního, takže možná je určiti spůsobem *odvislým* čili *rekurrentním*, jakož jest dosud obyčejem, *) anebo spůsobem *neodvislým* neb *independentním*, jak tuto budiž vyloženo.

Abychom odstranili druhý člen, zaveďme do rovnice (1) místo x neznámou y linearní substitucí

$$x = y - \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 y - a_1}{a_0}, \qquad (2)$$

z níž patrně plyne naopak

$$y = \frac{a_0 x + a_1}{a_0}, \qquad (3)$$

načež obdržíme především

$$f\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right) \equiv a_0\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right)^n + a_1 (n)_1 \left(y - \frac{a_1}{a_0}\right)^{n-1} + \ldots = 0;$$

spořádáme-li pak členy podlé mocnin nové neznámé y a dělíme-li koëficientem a_0, povstane konečně

*) Viz *Matthiessen* „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen" pag. 31.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_0} f\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right) \equiv y^n &- \frac{(n)_2}{a_0^2}(a_1^2 - a_0 a_2) y^{n-2} \\
&+ \frac{(n)_3}{a_0^3}(2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3) y^{n-3} \qquad (4) \\
&- \frac{(n)_4}{a_0^4}(3a_1^4 - 6a_0 a_1^2 a_2 + 4a_0^2 a_1 a_3 - a_0^3 a_4) y^{n-4} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

kdež součinitelové v závorkách obsažení jsou *varianty.*

Násobíme-li tu mocninou a_0^n a zavedeme-li pak za y hodnotu vzorcem (3) stanovenou, obdrží se totiž

$$
\begin{aligned}
a_0^{n-1} f(x) \equiv (a_0 x + a_1)^n &- (n)_2 V_2 (a_0 x + a_1)^{n-2} \\
&+ (n)_3 V_3 (a_0 x + a_1)^{n-3} \\
&- \ldots\ldots \pm V_n = 0, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

kdež tedy značí V_k *variant stupně k-tého.*

Porovnáme-li výsledek tento se vzorcem (4), vidíme sice, jakou hodnotu má variant *kvadratický* V_2, *kubický* V_3, *bikvadratický* V_4, že totiž

$$
\begin{aligned}
V_2 &= a_1^2 - a_0 a_2 \\
V_3 &= 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + 4a_0^2 a_3 \\
V_4 &= 3a_1^4 - 6a_0 a_1^2 a_2 + a_0^2 a_1 a_3 - a_0^3 a_4,
\end{aligned}
$$

avšak není tu snadno vyšetřiti zákon, jemuž podléhají tyto výrazy.

Abychom poznali tuto souvislost, znásobme rovnici (1) mocninou a_0^{n-1} a spořádejme výraz (5), vyvinutý podlé binomické poučky, podlé klesajících mocnin neznámé x, načež obdržíme dvě stejně zřízené a sobě se rovnající řady, tedy

$$
a_0^{n-1}[a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + (n)_2 a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n]
$$

$$
= a_0^n x^n + (n)_1 a_0^{n-1} a_1 x^{n-1} + \left.\begin{array}{r} (n)_2 a_0^{n-2} a_1^2 \\ - (n)_2 V_2 a_0^{n-2} \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{l} (n)_3 a_0^{n-3} a_1^3 \\ - (n)_2 (n-2) V_2 a_0^{n-3} a_1 \\ + (n)_3 V_3 a_0^{n-3} \end{array}\right| x^{n-3} + \ldots
$$

Porovnáme-li pak koëfficienty stejně vysokých mocnin neznámé x, obdržíme podlé poučky o neurčitých součinitelích soustavu rekurrentních vzorců

$$
\begin{aligned}
&a_1^2 - a_0 a_2 - V_2 = 0,\\
&a_1^3 - a_0^2 a_3 - 3a_1 V_2 + V_3 = 0,\\
&a_1^4 - a_0^3 a_4 - 6a_1^2 V_2 + 4a_1 V_3 - V_4 = 0,^{*)}\\
&a_1^5 - a_0^4 a_5 - 10a_1^3 V_2 + 10a_1^2 V_3 - 5a_1 V_4 + V_5 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\pm V_n + a_1^n - a_0^{n-1} a_n - (n)_2 a_1^{n-2} V_2 + (n)_3 a_1^{n-3} V_3 - \dots = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnic těchto jest na počet $(n-1)$; i můžeme z nich vyloučiti, jelikož jsou podlé veličin V linearní, $(n-2)$ neznámé

$$V_2,\ V_3,\ V_4,\ \dots,\ V_{n-1};$$

spojíme-li totiž $\pm V_n$ v poslední rovnici s členem prvním, bude výsledek eliminace se zřetelem k sloupcům negativním, jež přímo proměniti možná v positivní,

$$
\begin{vmatrix}
(a_1^2 - a_0 a_2) + 0, & 1, & 0, & \dots,\\
(a_1^3 - a_0^2 a_3) + 0, & 3a_1, & 1, & \dots,\\
(a_1^4 - a_0^3 a_4) + 0, & 6a_1^2, & 4a_1, & \dots,\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
(a_1^n - a_0^{n-1} a_n) \pm V_n, & (n)_2 a_1^{n-2}, & \dots & na_1
\end{vmatrix} = 0.
$$

Poněvadž tu prvky prvního sloupce jsou složeny z výrazů v závorkách obsažených a z druhé části, s vyjmutím posledního řádku nullou zastoupené, můžeme podlé toho rozložiti, načež majíce zřetel k tomu, že determinant stupně sudého má $+V_n$, stupně lichého pak $-V_n$ vedlé subdeterminantu 1 obnášejícího, obdržíme neodvislý vzorec

$$
V_n = \begin{vmatrix}
a_1^2 - a_0 a_2, & 1, & 0, & \dots, & 0\\
a_1^3 - a_0^2 a_3, & 3a_1, & 1, & \dots, & 0\\
a_1^4 - a_0^3 a_4, & 6a_1^2, & 4a_1, & \dots, & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_1^n - a_0^{n-1} a_n, & (n)_2 a_1^{n-2}, & (n)_3 a_1^{n-3}, & \dots, & na_1
\end{vmatrix}, \quad (6)
$$

z něhož plynou pro $n = 2, 3, 4$ vzorce dříve již uvedené jakož i všechny ostatní hodnoty variantů vyšších. Že by možná bylo i tento determinant rozložiti v součet dvou, poznává se na první pohled, ale rozklad tento nevede k výrazům všeobecně prakticky důležitějším.

---

*) Od tohoto vzorce počínajíc vyskytuje se u *Matthiessena* l. c. v následujících vzorcích nesprávnost, kteráž vede ke všeobecnému vzorci rekurrentnímu tam umístěnému a taktéž nesprávnému.

Abychom určili retrovarianty, třeba jen rovnici (1) děliti mocninou x^n a pak ji obrátiti, načež obdrží tvar

$$\frac{a_n}{x_n} + (n)_1 \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + (n)_2 \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}} + \ldots + (n)_1 \frac{a_1}{x} + a_0 = 0. \quad (7)$$

Zavedeme-li tu obdobnou substituci

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (8)$$

z níž plyne patrně

$$\frac{a_n}{y} = \frac{a_n + a_{n-1}x}{x} \quad (9)$$

obdrží se postupem stejným, jako prvé, nová rovnice

$$a^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \left(\frac{a_n + a_{n-1}x}{x}\right)^n - (n)_2 V_2' \left(\frac{a_n + a_{n-1}x}{x}\right)^{n-2}$$

$$+ (n)_3 V_3' \left(\frac{a_n + a_{n-1}x}{x}\right)^{n-3} \quad (10)$$

$$\ldots\ldots\ldots \pm V_n' = 0,$$

kdež značí V_k' *retrovariant stupně k-tého.* Porovnáme-li pak rovnici (7) s rovnicí (1), poznáme snadno, že všeobecně platí

$$V'_k = V_{n-k}, \quad (11)$$

takže se přímo ze vzorce (6) obdrží pro retrovarianty vzorec, neodvisle jich hodnoty ustanovující

$$V_n' = \begin{vmatrix} a^2_{n-1} - a_n a_{n-2}, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ a^3_{n-1} - a_n^2 a_{n-3}, & 3a_{n-1}, & 1, & \ldots & 0 \\ a^4_{n-1} - a_n^3 a_{n-4}, & 6a^2_{n-1}, & 4a_{n-1}, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n_{n-1} - a_n^{n-1} a_0, & (n)_2 a_{n-1}^{n-2}, & (n)_3 a_{n-1}^{n-3}, & \ldots & n a_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Podlé toho jest na př. u rovnice stupně druhého

$$ax^2 + 26x + c = 0$$

variant totožný s retrovariantem, jelikož tu druhý člen jest totožný s předposledním; obdrží se totiž

$$V_2 = b^2 - ac = V_2'.$$

U rovnice kubické tvaru

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

vyvine se však podlé vzorců předešlých

$$V_2 = b^2 - ac \qquad V_2' = c^2 - db$$
$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2d \qquad V_3' = 2c^3 - 3dcb + d^2a.$$

Podobně se obdrží pro rovnici bikvadratickou

$$ax^4 + 4bx_3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

co kvadratický, kubický a bikvadratický variant a retrovariant vzorce obdobné a sice v případě posledním

$$V_4 = 3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e,$$
$$V_4' = 3d^4 - 6ed^2c + 4e^2db - e^3a.$$

Jakou úlohu při řešení rovnic hrají varianty a retrovarianty, bude příležitostně ukázáno později.

Note sur la théorie des polaires dans les courbes géométriques.

Par le Dr. C. le Paige,

Professeur de Géométrie Supérieure à l' université de Liége.

Nous nous proposons, dans cette courte Note, de démontrer quelques propriétés des groupes polaires d' un groupe de points par rapport à un point donné, propriétés qui permettent de ramener aisément la détermination des courbes polaires d' un point relativement à une courbe C_n indécomposable, à celle des mêmes polaires pour des courbes décomposables. Ces propriétés permettent aussi de trouver les élements nécessaires à leur construction et à la détermination de leur ordre.

I. *Pour que les* $(n-k)^{mes}$ *polaires d' un point* P *par rapport à deux groupes de* n *points* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$, *coïncident, il faut et il suffit que l' involution* I_1^n, *déterminée par ces deux groupes, possède un point* $(k+1)^{ple}$ *en* P.

En effet, soient

$$\gamma = \alpha_0 x^n + \binom{n}{1}\alpha_1 x^{n-1}y + \binom{n}{2}\alpha_2 x^{n-2\,2} y + \ldots + \alpha_n y^n = 0,$$

$$\varphi = \beta_0 x^n + \binom{n}{1}\beta_1 x^{n-1}y + \binom{n}{1}\beta_2 x^{n-2\,2} y + \ldots + \beta_n y^n = 0,$$

les équations dont les racines représentent les deux groupes donnés. La $(n-k)^{me}$ polaire du point P, par rapport au premier groupe, sera représentée par