Václav Jeřábek

O grafickém řešení rovnic druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 169--175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121611

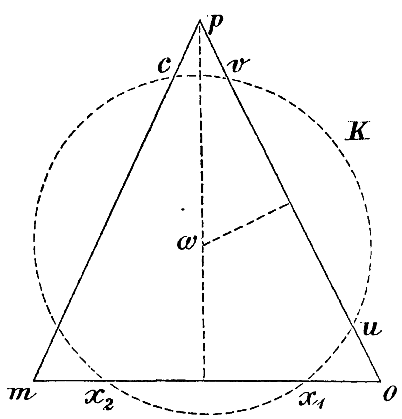
O grafickém řešení rovnic druhého stupně.

Napsal

V. Jeřábek,

c. k. professor v Brně.

1. V rovnoramenném trojúhelníku omp ($\overline{op} = \overline{mp}$) sestrojme kružnici K (obr. 1.) mající svůj střed ω na výšce s vrcholu p na podstavu $\overline{om}$ spuštěné. Kružnice tato seče podstavu $\overline{om}$ v bodech x_1, x_2, rameno $\overline{op}$ v bodech u, v a rameno $\overline{mp}$ v bodu c, který je souměrně sdružen s bodem v dle výšky $p\omega$.



Obr. 1.

Jest patrno, že

$$\overline{ox_1} + \overline{ox_2} = \overline{ox_1} + \overline{x_1 m} = \overline{om},$$

položíme-li $\overline{ox_1} = x_1$, $\overline{ox_2} = x_2$, $\overline{om} = -p$,

bude
$$x_1 + x_2 = -p. \tag{1}$$

Mocnost bodu o ke kruhu K lze vyjádřiti rovnicí

$$\overline{ox_1} \,.\, \overline{ox_2} = \overline{ou} \,.\, \overline{ov} = ou \,.\, mc,$$

a znamenáme-li délky $\overline{ou} = u$, $\overline{ov} = \overline{mc} = v$,

jest $$x_1 x_2 = uv = q. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vysvítá, že lze poměrná čísla x_1, x_2 považovati za kořeny rovnice

$$x^2 + px + q = 0.$$

Z úvah předešlých plyne grafické řešení rovnice poslední. Za tím účelem rozložme číslo q v součin dvou činitelův uv, a vyjádřeme poměrná čísla p, u, v úsečkami. Dále sestrojme rovnoramenný trojúhelník omp, v němž $om = -p$, učiňme na $\overline{op}$ délky $\overline{ou} = u$, $\overline{ov} = v$ v témž směru, nebo ve směrech protivných dle toho, jsou-li číslu u, v stejných nebo protivných znamének. Zároveň lze na rameni $\overline{mp}$ učiniti délku $\overline{mc} = v$ tak, aby body c, v byly po téže straně podstavy $\overline{om}$. Sestrojíme-li kružnici K jdoucí body u, v, c a mající svůj střed ω na výšce rovnoramenného trojúhelníka, protne ona podstavu jeho $\overline{om}$ v bodech x_1, x_2, i jsou poměrná čísla úseček $\overline{ox_1} = x_1$, $\overline{ox_2} = x_2$ vzatá s náležitými znaménky kořeny rovnice hořejší.

V obrazci 1. řešena jest graficky rovnice

$$x^2 + 46\,x + 360 = 0.$$

Prostý člen rozložen v součin $360 = 8 \times 45$, a sestrojeno $\overline{om} = -p = -46$, $\overline{ou} = u = 8$, $\overline{ov} = v = 45$. Rovnice má kořeny $\overline{ox_1} = x_1 = -10$, $\overline{ox_2} = x_2 = -36$, které jsou záporny, neboť směry ox_1, ox_2 souhlasí se záporným směrem $\overline{om} = -46$.

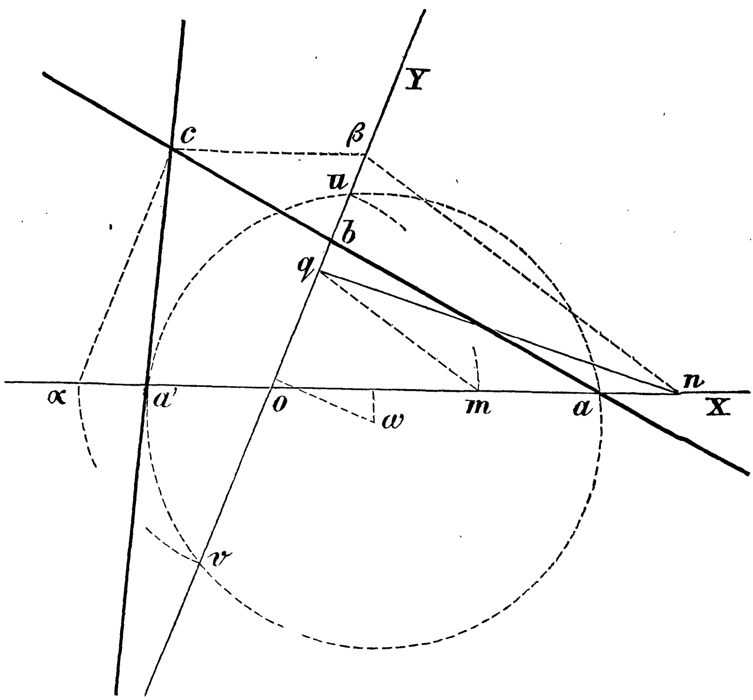
Jednotkou míry zvolen 1 *mm*.

Poznámka. Je-li vrchol p trojúhelníka v nekonečnu, stojí úsečky $\overline{ou} = u$, $\overline{mc} = v$ kolmo na podstavě $\overline{om}$, a střed ω leží na přeponě uc pravoúhlého trojúhelníka cuv. Tímto způsobem jsou graficky řešeny kvadratické rovnice ve známé *Strnadově geometrii.*

Nyní ukážeme, kterak lze návodem předešlým řešiti známou úlohu: *daným bodem c sestrojiti přímku tak, aby s různoběžkami*

X, Y, *v bodu o se protínajícími omezovala trojúhelník oab, jenž by se rovnal svým obsahem danému trojúhelníku onq.*

Řeš: Přímky X, Y (obr. 2.) považujme za osy a o za počátek kosoúhlé soustavy souřadnic.



Obr. 2

Souřadnice bodu c buďtež $\overline{o\alpha} = \alpha$, $\overline{o\beta} = \beta$. Učiníce $\overline{mq} \parallel \overline{n\beta}$, vyjádříme plochu trojúhelníka onq trojúhelníkem $om\beta$.

Rovnice přímky $\overline{ab}$ zní

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

a že bod c (α, β) v této přímce leží, jest

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1, \tag{1}$$

avšak

$$\Delta\, om\beta = \Delta oab,$$

pročež

$$\overline{om} \,.\, \overline{o\beta} = \overline{oa} \,.\, \overline{ob}$$

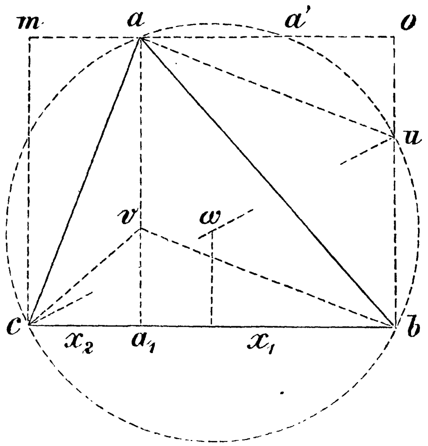
čili, píšeme-li p místo $\overline{om}$,

$$p\beta = ab. \qquad (2)$$

Vyloučíme-li b z rovnic (1) a (2), obdržíme

$$a^2 - pa + p\alpha = 0. \qquad (3)$$

V rovnici této jsou $p = \overline{om}$, $\alpha = \overline{o\alpha}$ známy a $\overline{oa} = a$ jest neznámým kořenem, který se má sestrojiti.



Obr. 3.

Za tím účelem učiňme na ose Y délku

$$\overline{ou} = \overline{om} = p, \quad \overline{ov} = \alpha$$

ve směrech $\begin{matrix}\text{souhlasných}\\ \text{protivných}\end{matrix}$ dle toho, jsou-li $\overline{om}$ a $\overline{o\alpha}$ směrů $\begin{matrix}\text{souhlasných}\\ \text{protivných}\end{matrix}$, potom kružnice jdoucí body u, v a mající svůj střed na ose souměrnosti úsečky $\overline{om} = p$, protíná osu x v bodech

a, a', i jsou úsečky bodů těchto $\overline{oa} = a$, $\overline{oa'} = a'$ kořeny rovnice (3) a tedy $\overline{ca}$, $\overline{ca'}$ přímkami hledanými.

Zároveň poznáváme, kterak lze daným bodem c sestrojiti tečny hyperboly určené asymptotami X, Y a jednou tečnou $\overline{nq}$.

Jest patrno, že možnost a počet řešení závisí na počtu bodů, v nichž kružnice (ω) a osa X se protínají.

2. Budiž v trojúhelníku abc (obr. 3.) podstava $\overline{cb} = a$, $\overline{a_1 a} = v$ příslušná výška a v průsečík výšek. Výška $\overline{a_1 a}$ nechť dělí podstavu ve dva díly $\overline{ba_1} = x_1$, $\overline{a_1 c} = x_2$, i jest

$$\overline{ba_1} + \overline{a_1 c} = bc = -cb = -a$$

čili

$$x_1 + x_2 = -a. \qquad (1)$$

Z podobných trojúhelníků aa_1c, ba_1v plyne

$$\frac{a_1 c}{a_1 v} = \frac{a_1 a}{ba_1},$$

a položíme-li $\overline{a_1 v} = u$, bude

$$\frac{x_2}{u} = \frac{v}{x_1}$$

čili

$$x_1 x_2 = uv. \qquad (2)$$

Snadno lze nahlédnouti, že jsou-li $\overline{a_1 a} = v$, $\overline{a_1 v} = u$ směrů $\begin{matrix}\text{souhlasných}\\\text{protivných}\end{matrix}$, že i úsečky $\overline{ba_1} = x_1$, $\overline{a_1 c} = x_2$ jsou směrů $\begin{matrix}\text{souhlasných}\\\text{protivných}\end{matrix}$, a že tedy rovnice (2) platí i tehdy, když x_1, x_2, a, u, v za veličiny relativní pojímáme. Též rovnice (1), jak z jejího odvození vysvítá, má platnost obecnou.

Z rovnic (1) a (2) jest zřejmo, že poměrná čísla úseků $\overline{ba_1} = x_1$, $\overline{a_1 c} = x_2$ jsou kořeny rovnice $x^2 + ax + uv = 0$, v níž a značí podstavu, v délku příslušné výšky a $\overline{a_1 v} = u$ úsek výšky mezi podstavou a průsečíkem výšek trojúhelníka abc.

Nyní poznáváme, že grafické řešení kvadratické rovnice zakládá se též na řešení úlohy; *sestrojiti trojúhelník abc, je-li dána jeho podstava $\overline{cb} = a$, výška $\overline{a_1 a} = v$ a úsek výšky mezi podstavou a průsečíkem výšek ($\overline{a_1 v} = u$).*

Rozbor. Stranou bc jsou určeny dva vrcholy b a c, i jde pouze o sestrojení vrcholu a. Ježto výška $\overline{a_1a} = v$, jest jedním geom. místem vrcholu a přímka $\overline{oa}$ jdoucí rovnoběžně ve vzdálenosti $\overline{bo} = v$ s podstavou bc.

Druhé geom. místo pro vrchol a hledejme za podmínkou, že hořejší úsek výšky $\overline{va} = a_1a - a_1v = v \quad u$ jest délky stálé. K tomu účelu veďme $\overline{bu} \parallel a_1a$ a učiňme $bu = va$, sestrojíme-li ještě spojnice $\overline{au}$, $\overline{bv}$, bude čtyřúhelník $aubv$ rovnoběžníkem, v němž $\overline{au} \parallel \overline{vb}$, a že $bv \perp ac$, musí též $au \perp ac$, čili $\sphericalangle\, cau = R$. Nyní jest zřejmo, že druhým geom. místem vrcholu a jest kružnice pravoúhlému trojúhelníku bcu opsaná. Vrchol a jest tedy určen průsekem obou míst geometrických.

Sestrojení: Narýsujme podstavu $\overline{cb} = a$, $\overline{bo} \perp \overline{bc}$, $\overline{bo} = v$, $\overline{uo} = a_1v = u$. Opíšeme-li trojúhelníku bcu kružnici (bcu) a vedeme-li bodem o rovnoběžku $\overline{oa}$ s podstavou $\overline{bc}$, jest průsečík a této rovnoběžky s kružnicí (bcu) hledaným vrcholem a. Sestrojíme-li ještě výšku $\overline{aa_1} \perp bc$, jsou poměrna čísla x_1, x_2 úseček $\overline{ba_1}$, $\overline{a_1c}$ vzata s náležitými znaménky, kořeny rovnice

$$x^2 + ax + uv = 0.$$

Důkaz. V trojúhelníku abc jest dle sestrojení $\overline{bc} = -a$ a výška $\overline{a_1a} = \overline{bo} = v$. Sestrojme $bv \parallel au$. Ježto $\overline{au} \perp ac$, musí též $bv \perp ac$, pročež jest v průsečíkem výšek trojúhelníka abc. Zbývá nám ještě dokázati, že $\overline{a_1v} = \overline{uo} = u$. V rovnoběžníku $aubo$ jest $\overline{bv} = \overline{ua}$, a poněvadž též $\overline{a_1b} = \overline{ao}$, jsou pravoúhlé trojúhelníky ba_1v, aou shodny, tedy $\overline{a_1v} = \overline{uo} = u$. Že x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $x^2 + ax + uv = o$, bylo již dříve dokázáno.

Omezení. Protíná-li přímka $\overline{oa}$ kružnici (bcu) ve dvou bodech a, a', obdržíme dva shodné trojúhelníky abc, $a'bc$, které jsou dle osy souměrnosti podstavy $\overline{bc}$ souměrně položeny. Výška $a'a'_1$ dělí podstavu též ve dva díly $\overline{ba'_1} = x_2$, $\overline{a'_1c} = x$, i obdržíme tytéž kořeny, jako dříve

Dotýká-li se přímka $\overline{oa}$ kružnice, dostaneme pouze jeden trojúhelník, který úloze vyhovuje, a oba kořeny x_1, x_2 splývají v jediný. Nemá-li přímka $\overline{oa}$ s kružnicí žádného bodu společného, jest sestrojení trojúhelníka nemožné a kořeny rovnice jsou pomyslné.

Poznámka. 1. Snadno lze nahlédnouti, že $\overline{oa} = x_1$, $\overline{oa'} = x_2$, $\overline{om} = \overline{bc} = -a$, $\overline{ou} \perp \overline{om}$, $\overline{ou} = u$, $\overline{mc} \perp \overline{mo}$, $\overline{mc} = v$, i setkáváme se opět s grafickým řešením kvadratických rovnic, které prof. Al. Strnad ve své *geometrii* provedl.

2. Je-li dolejší úsek a_1v roven výšce $a_1a = v$, potom trojúhelník bac jest při vrcholu a pravoúhlý, a známé grafické řešení rovnice $x^2 + ax + v^2 = 0$ jest zvláštním případem řešení námi uvedeného.

O měření tvrdosti.

Napsal

Dr. **Vlad. Novák,**

assistent c. k. ústavu fysikálního v Praze.

Některé vlastnosti hmoty, které se týkají její ustrojení čili onoho rozmanitého způsobu, jímž částice hmoty vespolek souvisí, určují se quantitativně velmi nesnadno, ač jsou to právě vlastnosti, o nichž denní zkušenost poučuje. Takovou vlastností u těles pevných jest *tvrdost*, jíž rozumíme obyčejně odpor tělesa oproti tělesu jinému, které se v těleso první snaží vniknouti.

Tuto větu nelze ovšem pokládati za *definici* tvrdosti, neboť podmínky zjevu — vnikání tělesa jednoho v druhé — jsou tu velmi neurčity. Každé měření pak vyžaduje *určité stanovení, přesnou definici* veličiny měřené, dále ovšem i vhodné *jedničky*, jež z takové definice jednoduchým způsobem vyplývá. Měření nazývá se *absolutním*, je-li zvolená jednička závisla pouze na absolutních jednotkách *základních: cm, g, sec.*

Přirozený postup badání fysikálního neuvede ovšem ihned na tento vrchol — předchází mu měření *relativné*, srovnávání veličin téhož druhu.

Tak shledáno na př., že křemen tvrdší jest než kazivec, tento tvrdší než kamenná sůl a podobně.

Hauy sestavil první škálu tvrdosti čítající 4 stupně, *Mohs* rozšířil ji až na 10 stupňů a jeho stupnice udržuje se v mineralogii do dnešního dne. Tvrdost stanoví se číslem od 1 do 10 kde značí: