Václav Hübner

Stanovení pláště rotačního kužele šikmo seříznutého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 5, 407--412

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121588`

Stanovení pláště rotačního kužele šikmo seříznutého.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

Protneme rotační kužel rovinou ϱ v ellipse o poloosách a, b, jejíž odchylka od roviny základny budiž ω. Tu musí $\alpha > \omega$, značí-li α odchylku stran kužele od základny.

Promítneme-li seříznutou část pláště do roviny základny, jest průmětem této seříznuté části plocha obsažená mezi základnou a průmětem řezu elliptického. Ježto obsah průmětu plochy rovná se obsahu plochy násobenému cosinem odchylky její od průmětny, jest

$$Z - E_1 = p \cos \alpha,$$

kdež značí Z plochu základny kužele, E_1 obsah průmětu ellipsy E, p plášť seříznutého kužele a α odchylku stran kužele od základny. Ježto

$$E_1 = \pi ab \cos \omega, \qquad z = \pi r^2,$$

(ω odchylka roviny ϱ od základny kužele), tudíž

$$p = \frac{\pi (r^2 - ab \cos \omega)}{\cos \alpha}.$$

Další úlohou jest z obou poloos a, b ellipsy E určiti úhel ω.

K tomu užito článku v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky z roku 1898: „Určování rozměrů kuželoseček na rotační ploše kuželové.“

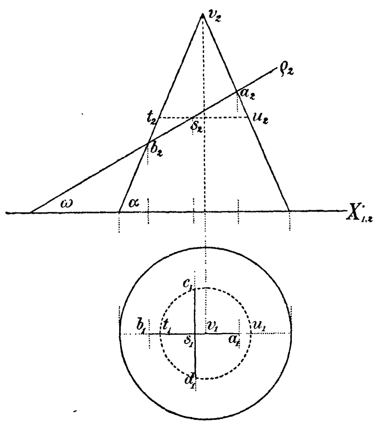
Z trojúhelníka $v_2 a_2 b_2$ (obr. 1.) jest dle věty sinové

$$m : 2a = \sin(\alpha - \omega) : \sin 2\alpha,$$

kdež značí $\overline{v_2 a_2} = m$, $\overline{a_2 b_2} = 2a$, z čehož

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \omega)} = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha - \omega)}. \tag{1}$$

Poloosa $b = \overline{s_1 c_1}$ určí se z prvního průmětu, $b^2 = \overline{s_1 t_1} \, . \, \overline{s_1 u_1}$.



Obr. 1.

Ježto $\overline{s_1 t_1} = \overline{s_2 t_2}$, $\overline{s_1 u_1} = \overline{s_2 u_2}$, obdržíme z trojúhelníků $s_2 b_2 t_2$ a $s_2 a_2 u_2$ dle věty sinové

$$\overline{s_2 t_2} : a = \sin(\alpha - \omega) : \sin(180 - \alpha),$$

tedy

$$\overline{s_2 t_2} = \frac{a \, . \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha};$$

dále

$$\overline{s_2 u_2} : a = \sin[180 - (\alpha + \omega)] : \sin \alpha,$$

z čehož

$$\overline{s_2 u_2} = \frac{a \sin(\alpha + \omega)}{\sin \alpha},$$

tudíž

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin(\alpha - \omega) . \sin(\alpha + \omega)}. \tag{2}$$

Dosadíme-li do této rovnice patřičnou hodnotu za a z rovnice (1), jest

$$b = m \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}}.$$

Poměr

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\sin(\alpha - \omega)\sin(\alpha + \omega)}}{\sin\alpha}.$$

Z rovnice (2) plyne

$$b^2 \sin^2\alpha = a^2 (\sin^2\alpha \cos^2\omega - \sin^2\omega \cos^2\alpha),$$

nebo též

$$b^2 \sin^2\alpha = a^2 (\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\omega - \sin^2\omega \cos^2\alpha)$$

čili

$$b^2 \sin^2\alpha = a^2 (\sin^2\alpha - \sin^2\omega).$$

Z této rovnice určíme odchylku ω, i jest

$$a^2 \sin^2\omega = (a^2 - b^2) \sin^2\alpha,$$

tedy

$$\sin\omega = \frac{e \sin\alpha}{a}, \tag{3}$$

kdež e značí délkovou výstřednost ellipsy.

Jest tudíž

$$p = \frac{\pi\left(r^2 - ab\sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2\alpha}{a^2}}\right)}{\cos\alpha}.$$

čili

$$p = \frac{\pi(r^2 - b\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2\alpha})}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Důsledky. 1. Je-li $a = b$, tu přejde řez E v kruh o poloměru a a plášť šikmě seříznutého kužele v plášť kužele komolého. I jest pak

$$p = \frac{\pi\,(r^2 - a^2)}{\cos\alpha} = \pi\,(r + a)\,.\,\frac{r - a}{\cos\alpha}$$

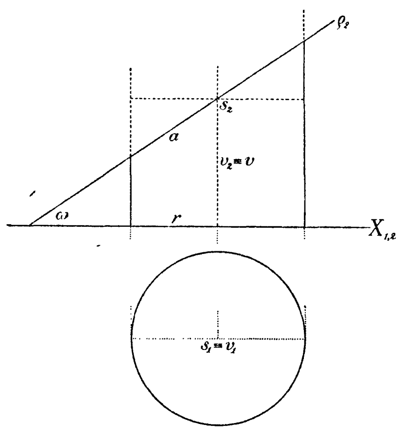
nebo též

$$p = \pi\,(a + r)\,s,$$

kdež s značí délku strany kužele komolého.

2. Je-li $a = b = r$, jest $p = 2\pi rs$ plášť válce.
3. Je-li $a = b = 0$, jest $p = \pi rs$ plášť kužele.
4. Je-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný), jest

$$p = 2\pi\,(r^2 - b\sqrt{a^2 - \frac{3e^2}{4}})$$



Obr. 2.

nebo též

$$p = 2\pi\,(r^2 - b\sqrt{\frac{4a^2 - 3a^2 + 3b^2}{4}}) = \pi\,(2r^2 - b\sqrt{a^2 + 3b^2})$$

a pro $a = b$ jest

$$p = \pi\,(2r^2 - 2a^2) = 2\pi\,(r + a)\,(r - a)$$

a pro $a = b = 0$ máme $p = 2\pi r^2$ plášť kužele rovnostranného.

Při válci jest $\alpha = 90^0$ a $p = \frac{0}{0}$ výraz neurčitý, ježto $Z - E_1 = 0$.

Z obr. 2. jest zjevno, že plášť válce rotačního šikmo seříznutého jest $p = 2\pi r v$, kdež v značí vzdálenost středu s ellipsy E od základny válce. Odchylku ω určíme z rovnice (3)

$$\sin \omega = \frac{e}{a}.$$

Z veličin r a ω určíme obě poloosy průseku elliptického E. Z obr. 2. plyne

$$r = a \cos \omega, \text{ z čehož } a = \frac{r}{\cos \omega}$$

a z rovnice

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

stanovíme

$$b = a \cos \omega, \quad \text{t. j.} \quad b = r.$$

Poznámka redakční. Souměrného vzorce nabudeme, vyjádříme-li plášť kužele obsažený mezi vrcholem a rovinou sečnou. Plášť tento jest

$$\Pi = \frac{\pi a b \cos \omega}{\cos \alpha}.$$

Označíme-li nejkratší a nejdelší strany odříznutého kužele

$$\overline{va} = m, \quad \overline{vb} = n,$$

jest patrně

$$2a \cos \omega = (m + n) \cos \alpha,$$

mimo to pak

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{m \sin 2\alpha}{2a}, \quad \sin(\omega + \alpha) = \frac{n \sin 2\alpha}{2a}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do vzorce (2), ustanovíme

$$b = \sqrt{m.n} \,.\, \cos \alpha,$$

pročež hledaný plášť

$$\Pi = \pi \,.\, \frac{m+n}{2} \sqrt{mn} \,.\, \cos\alpha \,.$$

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 21.

Úhly α, β, γ sférického trojúhelníka mají se k jeho nadbytku ε v poměru $\alpha : \beta : \gamma : \varepsilon = m : n : p : q$.

a) Ustanovte obsah trojúhelníka.

b) Dokažte, že trojúhelník jest pravoúhlý, je-li

$$m + n = p + q.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Závada,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.)

Z dané úměry vyvodíme

$$\alpha = \frac{m\varepsilon}{q}, \quad \beta = \frac{n\varepsilon}{q}, \quad \gamma = \frac{p\varepsilon}{q}$$

a dosazením do rovnice

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 2R,$$

vypočítáme $\qquad \varepsilon = \dfrac{q \,.\, 2R}{m + r + p - q}.$

Jest proto obsah sférického trojúhelníka

$$\Delta = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180} = \frac{\pi r^2 q}{m + r + p - q}.$$

Při podmínce $\qquad m + r = p + q,$

jest $\qquad \varepsilon = \dfrac{q \,.\, 2R}{2p} = \dfrac{qR}{p},$

tudíž $\qquad \gamma = \dfrac{p\varepsilon}{q} = R;$

trojúhelník jest tedy pravoúhlý.