Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Jak Kepler objevil své zákony

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 237--245

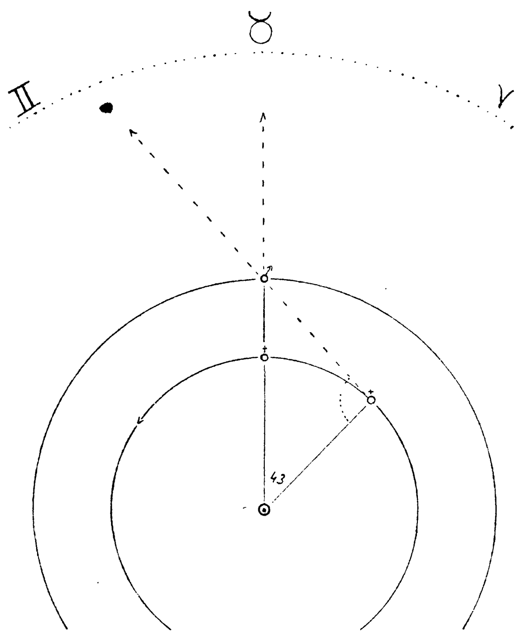
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121577

Jak Kepler objevil své zákony.

Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Kepler strávil v Praze 11 let. V čase tom vykonal své neskvělejší práce. Zprvu byl Tychonovým příručím, po smrti jeho stal se sám dvorním astronomem a císařským mathematikem. Úřad ten ukládal mu, aby zdokonaloval astronomické tabulky na základě četných pozorování Tychonových. K tomu potřeboval přesnější znalost pohybů planetárních, než mu tehdejší astronomie mohla poskytnouti. Zejména Mars dělal obtíže. Studium jeho dráhy započal ještě za života Tychonova v obtížné odvislosti od tohoto prchlivého starce, na němž si svou neodvislost jako odborník teprve musil vybojovati, jenž jej prý ještě umíraje přemlouval, aby se vzdal Koperníkovy soustavy. Zdá se ostatně, že první myšlenky Keplerovy nevybočovaly přespříliš z rámce tehda obvyklých astronomických představ. Kdežto ale Koperník sám bez váhání a pochybností přejímá dogma hellénské astronomie: *pohyby na nebi skládají se z rovnoměrných pohybů kruhových*, Kepler přece jen se snaží, aby myšlenku tu pokusem na dráze Marta potvrdil. Na celém založení důvtipného geometrického experimentu vidíme, že potvrzení očekával. Vždyť předpokládá, že drahou Země jest kružnice. Kdo to činí, očekává, že též dráha Marta bude kružnicí; vždyť je přece planeta jako planeta. Skutečně nalezl si Kepler pomocí své geometrické fantasie cestu k ohledání dráhy Marta, která by byla stačila, kdyby planety v kruzích hnaly se kol Slunce, jak mínil Koperník. Způsob jeho záleží v tom, že ku každé opposici Marta lze pomocí dalšího pozorování, jež se konalo později o 687 dnů — jeho dobu oběhu — ustanoviti jeden bod domnělé kružnice, po níž Mars obíhá.

Mars jest v opposici se Sluncem, když Země prochází spojnicí Marta a Slunce. Viz kolmici na obr. 1. proloženou Sluncem. Událost tato jest dokonale určena datem „*t*“, *kdy* byla. *Kde* byla, t. j. do kterého souhvězdí zvěrokruhu se tehda Mars se Země promítal, lze z data opposice stanoviti. Z tohoto časového údaje plyne, kam se toho dne se Země promítalo Slunce. V místo přesně protilehlé na zvěrokruhu se pak promítal (se Země) Mars. Opposice určuje tedy pro polohu Marta jednoduché geometrické místo, přímku, jež se Slunce Zemi promítá. Na obr. 1. jest přímka ta svislá. Sledujme nyní pohyb Marta i Země po 687 dnů. Za ten čas domnělý kruh Martův se uzavře, tak že Mars vrátí se zase v místo, odkud vyšel, t. j. na obr. 1. svisle nad Slunce. Ale Země nedostane se do bývalé polohy. Uzavřela



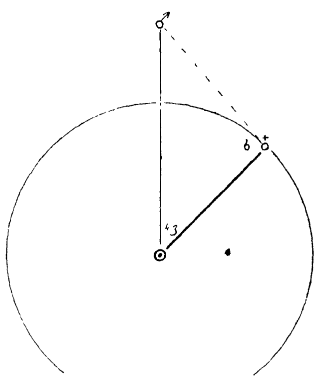
Obr. 1.

svůj kruh poprvé za 365 dnů a běžela pak ještě 322 dnů dál. Schází jí tedy ještě 43 dnů, t. j. okrouhle 43°, aby podruhé zavřela svůj kruh. O těch 43° zůstane Země pozadu. Poloha její vyznačena na obr. 1. Z této polohy pozoruje se nyní, *kde* stojí Mars, t. j. kam se promítá na zvěrokruh. Z data „$t + 687$“ plyne, kde toho dne stálo Slunce. Nalezneme-li si obě ty polohy na hvězdném globu, lze pomocí kružidla určiti, o jaký úhel „b“ jest Mars vzdálen od Slunce. V obr. 1. jest to úhel, přetnutý tečkovaným obloukem; vrchol jest v druhé poloze Země, ramena jeho promítají s ní jednak Slunce, jednak Marta.

A nyní budeme rýsovati. Libovolně voleným poloměrem opíšeme dráhu Země. Vyznačíme průvodič od Slunce k Zemi, jenž přísluší času „$t + 687$“. K němu přiložíme u Slunce úhel 43^0, u Země úhel „b“. Kde se ramena těchto dvou úhlů protnou stál Mars v čas „t“ neb „$t + 687$“ či obecně v čase

$$t + \varkappa\, 687\,;\quad \pm\,\varkappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Tím zjednali jsme si ve zmenšení soustavy Slunce, Země, Mars na obr. 2. jednu přesnou polohu Marta.



Obr. 2.

Kepler měl v záznamech Tychonových 12 pečlivě pozorovaných opposicí. Očekával však tak silně, že dráha Marta bude kruhem, že užil jen 4 opposicí, což jest nutné minimum. Lze si totiž pomocí každé opposice v obr. 2. zjednati jednu přesnou polohu Marta. Třemi takovými polohami lze vždy proložiti kružnici, neboť tři body kružnici určují, tvoří-li trojúhelník. Padne-li však čtvrtý bod také na onu kružnici, je to geometrická událost, zjev, jehož si všimneme. — Kepler přibral jen jeden bod k nutným třem a pokusil se pak o proložení kružnice těmito čtyřmi body. Ale ač zkusil i kružnice mající střed mimo Slunce, nezdařilo se to, čím bylo prokázáno, že dráha Martova *najisto kružnicí není*!

Ale tím shroutila se základna Keplerovy práce. Země je hvězdou jako Mars. Když dráha Marta není kruhem, nesmí se předpokládati, že dráha Země je kružnicí, což Kepler při rýsování činil. Musil tedy začíti znova, ale práce na problém již vynaložená nebyla ztracena. Konstrukce trojúhelná na obr. 2. vysvětlená zůstane i nadále východiskem. Jen, že se nejdříve na základě této konstrukce musí sestrojiti dráha Země, než lze zpracovati dráhu Marta.

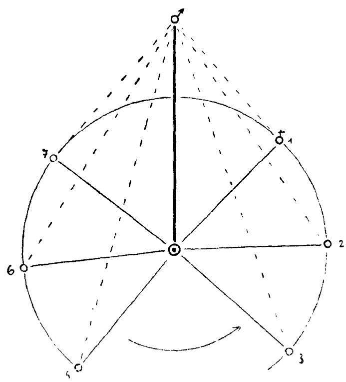
Víme-li, že v čas „t“ byla opposice Marta a v které místo zvěrokruhu se Mars se Země promítal v čase „$t + 687$“, t. j. po uplynutí doby oběhu Marta, lze sestrojiti tvar, zmenšení, trojúhelníka, jejž v čase $t + 687$ tvořily Slunce, Země a Mars. Jediným předpokladem úvahy jest, že dráha planety (a tedy i Marta) jest uzavřenou křivkou a, že se tytéž polohy přesně ob určitou dobu oběhu opakují. Tento předpoklad Kepler vědomě činí. V trojúhelníku zmíněném známe pak všechny tři úhly: jeden z data, druhý z měření, třetí na základě věty, že součet úhlů v trojúhelníku rovná se 180^0. Tím je dán tvar tohoto trojúhelníka, ale velikost jeho stran (v mílích na př.) zůstane nepřístupnou. V minulém použití bylo základnou konstrukce neznámé zmenšení průvodiče od Slunce k Zemi. Nyní budou se přikládati příslušné úhly k spojnici Slunce a Marta. Pro tuto změnu v pojímání konstrukce máme vážný důvod. Co jsme zde provedli pro čas „$t + 687$“, lze totiž opakovati pro časy další vždy o jeden oběh Marta pozdější, změří-li se pro každý ten čas úhlová vzdálenost Marta od Slunce na zvěrokruhu. Ale jak tyto trojúhelníky, jež známe jen dle tvaru, prostřednictvím úhlů sjednotíme do téže figury? — Tu nám právě pomůže jediný předpoklad Keplerův: *že dráhy planet jsou uzavřené a pohyby jejich periodické.* Z toho plyne, že Mars v čase

$$t, \quad t + 687, \quad t + 2 \times 687, \ldots$$

zaujímá vůči Slunci a stálicím vždy přesně totéž místo v prostoru. Odtud jest právo klásti trojúhelníky dosud jen tvarem známé v konstrukci 3. jeden přes druhý k společné základně, jež spojuje Slunce s Martem. Vrcholy této společné základně protilehlé — značené 1, 2, 3, . . . — stanoví pak skutečné polohy Země ve zmenšení, jež průvodič od Slunce k Martu vedený, příslušný časům

$$t + \varkappa \,.\, 687\,; \quad \varkappa = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

zkrátí na silně vytaženou vertikálu našeho obr. 3. Polohy jdou za sebou proti směru pohybu planet.



Obr. 3.

Kepler řešil úkol svůj počtem; proto sdělím, jak se konstrukce předchozí vyjádří řečí vzorců.

Času

$$t + \varkappa\, 687\,; \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

přísluší měřená úhlová vzdálenost Marta od Slunce, rovná

$$\beta_\varkappa\,; \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Úhel při Slunci, počítaný z data $t + \varkappa\, 687$, označíme

$$\gamma_\varkappa\,; \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Z obou se počítá úhel při Martu

$$\alpha_\varkappa\,; \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

z relace

$$\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa + \gamma_\varkappa = 180^0.$$

V souhlase s obvyklým označením trojúhelníka označíme času $t + \varkappa\, 687$ příslušející průvodič Země $a_\varkappa$, průvodič Marta $b_\varkappa$. Vykreslíme-li si znovu trojúhelník z obr. 1., zaneseme-li v něm označení zde zavedené, pak čteme z něho přímo, že dle věty sinusové

$$\frac{a_\varkappa}{b_\varkappa} = \frac{\sin \alpha_\varkappa}{\sin \beta_\varkappa}; \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

Poněvadž Kepler považuje dráhu Marta za uzavřenou, vrací se průvodič jeho ob

687 dnů

k téže hodnotě, kterou zvolíme za jednotku; bude tedy

$$b_\varkappa = 1; \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

tak, že

$$a_\varkappa = \frac{\sin \alpha_\varkappa}{\sin \beta_\varkappa}; \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

Vzorec ten poskytne tolik průvodičů Země, kolik známe k sobě náležejících párů úhlů α, β. Vyjádřeni jsou (průvodiči) jednotkou, jež se rovná (v mílích neznámému) průvodiči Marta, jenž přísluší času t. K prozkoumání zmenšeného obrazu dráhy zemské to však stačí.

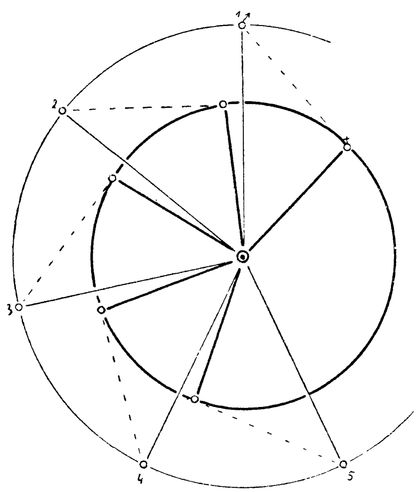
Když Kepler takovouto práci početní (bez logarithmů!) provedl, ukázalo se, že dráhu Země v praxi od kružnice, jejíž střed jest maličko mimo Slunce, nelze rozeznati. Že *přesně* kružnicí není, věděl z nezdaru s planetou Martem; ale zkoumání, čím dráha ta vlastně jest, musil se u Země vzdáti, poněvadž odchylka její dráhy od kružnice jest příliš nepatrná. K účelu tomu měl Marta v reservě; ale než se mohl k němu obrátiti, musil řešiti jistý problém interpolační. Znal numericky průvodiče Země pro konečný počet poloh 1, 2, 3, ... Jak se ale nalezne průvodič od Slunce pro polohu přechodní, někde mezi těmito body? — Při řešení této úlohy měl Kepler štěstí. Konstrukce na obr. 3. obrací pozornost na výseče, omezené párem sousedních průvodičů a obloukem dráhy zemské. Úhly průvodičů měří asi 43°, ale nejsou přesně stejné, ač přísluší stejným časům:

$$2 \times 365 - 687 \text{ dnům,}$$

dvojnásobnému oběhu Země bez doby oběhu Marta. Kepler všiml si nyní, že tam, kde je výseč širší, jsou průvodiči ji omezující kratší. Zdali pak to zrovna nenabádá k myšlence, že toto přikrácení jest jakousi náhradou za širší rozevření úhlu? Zda to nedělá dojem, jako by plocha výseče předem byla předepsána. Kepler, jenž byl neúmorně pilným počtářem, sedl a vypočítal plochy těchto výsečí. Ukázaly se stejnými! Jaký se však za tím skrývá zákon? — Tyto stejné plochy přísluší stejným časům, je tedy vůbec *plocha opsaná průvodičem Země úměrna času, jemuž přísluší.* Tím byl I. zákon Keplerův pro Zemi nalezen. Jak se úhel průvodiče mění s časem, čili jak se (zdánlivě) pohybuje Slunce po ekliptice, bylo dávno již známo. Kepler toho užil, aby pro každý den slunečního roku určil ze svého zákona délku průvodiče Země. Dostal ji arci v neznámé míře, rovné vzdálenosti Marta od Slunce v čas základní opposice. Neznámou ji nazývám, poněvadž Kepler numerickou hodnotu její v mílích neznal; vůbec ani později ji nepoznal. Zemřel dříve, než dokončil začatou práci o absolutních rozměrech soustavy planetární.

Nyní ovládal dráhu Země dvojitou řadou čísel; jedna, dávno známá, udává pro každý den úhlovou polohu průvodiče, druhá — jím objevená — stanovila pro každou tuto polohu jeho délku. Tím byl připraven k stanovení dráhy Marta. Pomocí konstrukce z obr. 2. lze nyní z každé pozorované opposice zjednati si jeden bod dráhy Martovy; ale nyní opírá se trojúhelná konstrukce o — silně vytažené — průvodiče Země, jež se délkou byť i maličko různí. Základem Keplerových počtů jest tedy figura takové povahy, jak na obr. 4. naznačeno. Tak mohl si Kepler z 12-ti opposic Tychonových zjednati 12 bodů dráhy Martovy. I tato jest blízká kružnici, ale tak málo, že Kepler ihned viděl, že za kružnici — třeba výstřednou vůči Slunci — ji pokládati nesmí. Zkusil potom, zda by se dráha aspoň v přísluní neb odsluní na větší trati nemohla považovati za oblouk kruhový. Ale to také nestačí. Pak zkusil nejjednodušší ovální křivku, kterou znal: elipsu. — A ta stačila! To arci není nic divného neb překvapujícího. Tuctem bodů, jež přibližně naznačují ovál blízký kružnici, lze snadno proložiti přibližnou elipsu, už proto, že teprve 6., pak 7. atd. bod by mohl dělati obtíže; lze totiž pěti body vždy proložiti kuželosečku. Myšlenka eliptické dráhy potřebuje ještě dalšího doporučení, máme-li tuto elipsu ceniti výše než pouhou interpolační křivku. Kepler je nalezl v tom, že *Slunce stojí právě* v geometricky význačném bodě Martovy elipsy, totiž *v jednom jejím ohnisku.* Takto byl II. zákon Keplerův nalezen pro Marta. Ukázalo se, že *drahou* této *planety jest elipsa, v jejímž jednom ohnisku stojí Slunce.*

Další kroky Keplerovy práce jsou tak samozřejmy, že by i mírný talent na ně připadl. Jednak musil se přesvědčiti, zda také dráhu Země, tak málo od kruhu se lišící, lze pokládati za elipsu, v jejímž ohnisku jest Slunce, jednak bylo potvrditi průvodičový zákon též na Martu. Obé se zdařilo. — Konečně potvrzeny oba zákony pomocí geometrických method, podobných



Obr. 4.

jako u Marta a Zemi též na ostatních planetách. Tam bylo vlastně jen zjistiti, zda měření na planetách oběma zákonům neodporuje.

Obracím se k poslednímu zákonu Keplerovu. Nad hledáním III. zákona strávil 10 let. Hledal úmornými numerickými počty vztah od planety k planetě, o jehož existenci byl přesvědčen z důvodů spíše theologického neb mystického než vědeckého. Pevně věřil, že bůh v umístění planet ukryl mathematickou myšlenku. Za tuto myšlenku považoval vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = konst.,$$

v němž „a“ značí velkou poloosu elipsy, „T“ dobu oběhu elipsy, konstanta je arci pro všechny planety tatáž. Je to t. zv. III. zákon Keplerův, jenž se zpravidla vyslovuje pomocí úměry: *Čtvercové doby oběhu mají se k sobě jako krychle poloos.* Jádrem jeho jest vztah poloosy a doby oběhu všech planet k *malým celistvým* číslům 2, 3, jež se vyskytují v exponentech. Kdyby místo těchto čísel objevily se nekonečné zlomky neperiodické, necenili bychom zákon ten výše než interpolační křivky fysiky, neb přibližné relace lineárné či kvadratické tak často se vyskytující.

Historická cesta Keplerova k III. zákonu není tak čistě logickou a induktivní jako postup jeho k zákonu I. a II. Úctu naši před Keplerem to arci nezmenšuje. Naopak: kdo pracuje bez t. zv. method, t. j. bez zhuštěné práce předchozích generací, jest silnějším odborníkem než ten, kdo jde cestou, kterou už jiní razili.

Keplerovy zákony jsou podnes, ještě po 300 letech, předmětem zajímavým. Lze z nich takřka vypočítati gravitační zákon Newtonův, a připojíme-li jisté myšlenky Newtonovy o pohybu těžiště, dospějeme ku vzorcům klassické mechaniky, jež měla tak obdivuhodné úspěchy při propracování soustavy planetární. Jsou tedy zákony Keplerovy po dnes důležitým předmětem pro každého, jenž z jakéhokoliv důvodu o mechaniku se zajímá.

Akkumulátory a jich použití.

Píše Dr. **Ferd. Pietsch.**

(Pokračování.)

Kapacita akkumulátorů udává se v Ampèrehodinách tak asi, že akkumulátor dávající 7 Ampère po dobu 10 hodin má kapacitu 70 Ampèrových hodin. Než kapacita závisí také na síle proudu, jejž z akkumulátorů béřeme; čím slabším proudem vy-