Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Láska
O nomografii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 209,209a,210--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121570

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1913

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O nomografii.

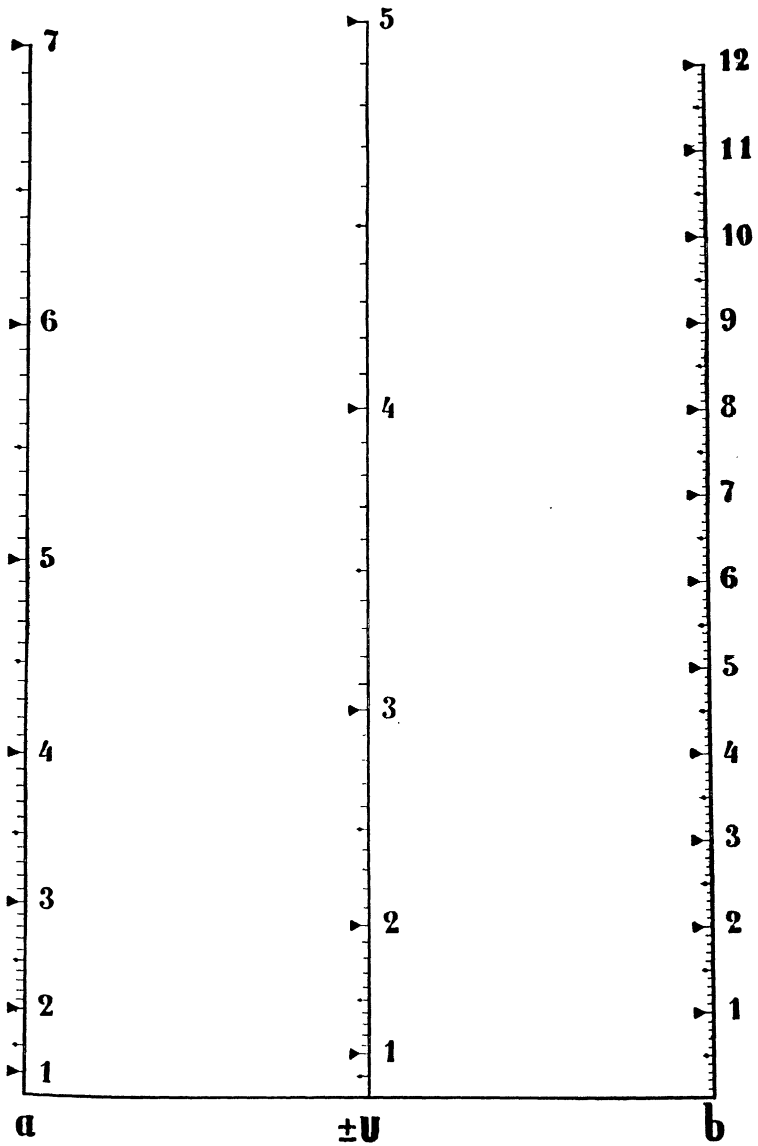
Píše **V. Láska.**

Stává se často, že provedení určitých výkonů početních má jen potud cenu, pokud může býti rychle uskutečněno, jak to na př. bývá při orientaci letadel. V tomto případě přímý výpočet nebyl by na místě, a nutno jej nahraditi tak zvaným nomogrammem.

Sestrojováním nomogrammů zabývá se nomografie, která v applikované mathematice zaujímá as podobné místo, jako grafická statika ve vědách stavebních. Základy některých nomogrammů jsou ale tak elementárné povahy, že se velmi dobře hodí k oživení studia mathematiky na středních školách. Porovnáním přímého výsledku početního s tím, co nomogramm podává, nejlépe poznáme, jak přesně lze rýsovati, a přesvědčíme se o užitečnosti tabulek grafických pro život praktický.

V čase studia jest zpravidla lhostejno, zda hodinu neb dvě určitému problému početnímu věnujeme. Jinak ovšem v životě. Zde často jeden a týž problém opakuje se neustále. Inženýr na př. při zpracování tachymetrických měření denně provádí (ovšem pomocí tabulek) mnohosetkrát jeden a týž výpočet. Zde dvojnásobný čas znamenal by již mnoho.

Vzhledem k tomu všemu jest nutno, aby každý co možná nejdříve naučil se jednak býti hospodárným při výpočtech, jednak co nejvíce používati všech pomůcek, které výpočet usnadňují. V praktickém životě dlužno dále každou práci a tudíž i každý početní výkon kontrolovati. Taková kontrola znamená ovšem dvojnásobný výkon, a musí býti co možná usnadněna. I k tomu se výborně hodí nomogrammy.



Tabulka ke článku prof. *V. Lásky* „O nomografii“.

Především budiž uvedeno, *že každé grafické řešení předpokládá geometricky správně napsanou rovnici.*

Píšeme-li nějaké číslo všeobecně algebraicky, podáváme tím vlastně poměr toho čísla k početní jednotce 1. Tuto početní jednotku blíže nedefinujeme. Jinak, jde-li o geometrickou konstrukci. Zde nutno přímo místo čísla a psáti $a \,.\, e$, kde e značí libovolnou sice, ale určitou jednotku délky. Naneseme-li tuto jednotku a-kráte za sebou na přímku, obdržíme geometrický obraz veličiny $a \,.\, e$.

Dále nutno toho vzpomenouti, že každá geometricky správně napsaná rovnice musí býti stejnorodá.

Z té příčiny píšeme na př. kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax + b = 0$$

buď ve tvaru

$$x^2 + ax + \sqrt{b} \,.\, \sqrt{b} = 0$$

aneb

$$x^2 \,.\, e + ax \,.\, e + b \,.\, e = 0,$$

kde jako dříve e jest jednotkou délky.

Prvá rovnice dává základní tvar pro rýsování geometrické, druhá pro rýsování grafické.

Při prvé představují veličiny x, a, $\sqrt{b}$ *určité délky,* při druhé *určitá čísla.*

Po tomto úvodu přejděmež k vlastnímu předmětu našeho článku, k sestrojení některých jednoduchých nomogrammů. Každý nomogramm skládá se z určitého počtu vhodně umístěných *funkčních stupnic.*

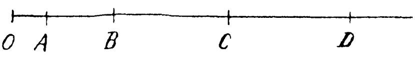
Tento pojem musí tudíž býti především náležitě vysvětlen. Budiž $f(\alpha)$ takovou libovolnou funkcí argumentu α, která mizí zároveň s argumentem $\alpha = 0$, tak že jest:

$$f(0) = 0.$$

Pro funkci $f(\alpha)$ vypočteme si následující tabulku:

α	$f(\alpha)$
1	$f(1)$
2	$f(2)$
3	$f(3)$
.	. . .

Naneseme-li délky $f(\alpha)$ tak na libovolnou přímku, že (viz obr. 1.)



Obr. 1.

$$OA = ef(1), \quad OB = ef(2), \quad OC = ef(3)$$

atd. a označíme-li koncové body příslušnou hodnotou argumentu, obdržíme funkční stupnici pro funkci $f(\alpha)$.

Podobné stupnice náležitě sestavené tvoří pak nomogramm, to jest grafickou početní tabulku.

Volme na př. kvadratickou rovnici tvaru

$$x^2 \pm ax = b. \tag{1}$$

kde a a b jsou čísla kladná.

Abychom obdrželi vhodný nomogramm, pišme rovnici, jak následuje:

$$2\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 e = \frac{a^2}{2} e + 2be$$

a položme

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u & f_1(\alpha_1) &= \alpha_1^2 \\ \alpha_2 &= a & f_2(\alpha_2) &= \tfrac{1}{2}\alpha_2^2 \\ \alpha_3 &= b & f_3(\alpha_3) &= 2\alpha_3. \end{aligned}$$

Rovnice (1) přejde tím ve tvar

$$2 f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3), \tag{2}$$

kde

$$\alpha_1 = u = x \pm \frac{a}{2}. \tag{3}$$

Určíme-li veličinu u, převedeme řešení původní kvadratické rovnice (1) na řešení jednoduché lineární rovnice (3).

Nomogramm odpovídající funkční souvislosti určené rovnicí (2) a řešící speciálně rovnici (1) obdržíme, jak následuje. Na přímce AC (viz obr. 2.) rýsujeme tři kolmice

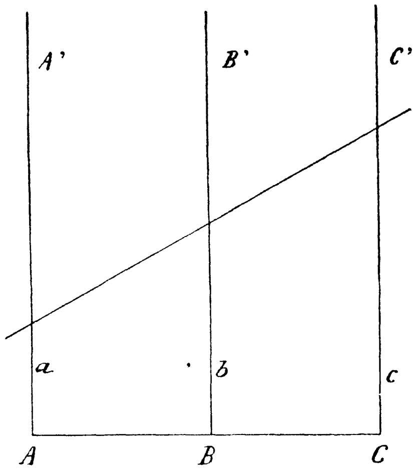
$$AA', \ BB', \ CC',$$

tak, aby

$$AB = BC,$$

kde AB jest libovolnou délkou. Počátek funkčních stupnic položme do bodů A, B, C a rýsujme na přímku AA' funkční stupnici $f_2\,(\alpha_2)$, na přímku CC' funkční stupnici $f_3\,(\alpha_3)$ a konečně na střední přímku BB' stupnici $f_1\,(\alpha_1)$.

Tím jest náš nomogramm sestrojen.



Obr. 2.

Protneme-li nomogramm libovolnou přímkou, kterou krátce nazveme nomografickou, platí všeobecně:

$$28 = a + c$$

a tudíž s ohledem na sestrojení nomogrammu

$$2 \,.\, f_1\,(\alpha_1) = f_2\,(\alpha_2) + f_3\,(\alpha_3).$$

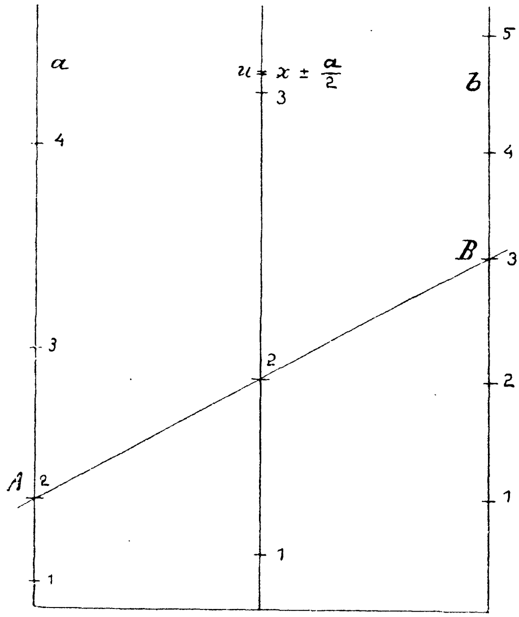
K praktickému sestrojení stupnic počítáme především tabulky:

α_1	$f_1\,(\alpha_1) = \alpha_1^2$
1	1
2	4
3	9
4	16
:	:

α_2	$f_2\,(\alpha_2) = \frac{1}{2}\alpha_2^2$
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	$4\frac{1}{2}$
4	8
:	:

α_3	$f_3\,(\alpha_3) = 2\alpha_9$
1	2
2	4
3	6
4	8
:	:

Tím obdržíme nomogramm, který v přehledné úpravě podán jest na obr. 3. a v přesnějším provedení v příloze.



Obr. 3.

Je-li na př. dána rovnice

$$x^2 \pm 2x = 3,$$

vyhledejme na stupnici $f_2(\alpha_2)$ t. j. na stupnici pro a, bod 2 a na stupnici $f_3(\alpha_3)$ veličin b, bod 3. Proložíme-li těmito body přímku AB, protne táž stupnici $f_1(\alpha_1)$ v bodu

$$2 = \pm\left(x \pm \frac{a}{2}\right) = \pm(x \pm 1),$$

tak že obdržíme

$$x \pm 1 = \pm 2$$

aneb

$$x_1 = \pm 3 \qquad x_2 = \mp 1.$$

Ve skutečnosti ovšem přímku AB nerýsujeme, nýbrž jen přikládáme k příslušným bodům pravítko aneb ještě lépe přímku narýsovanou na průsvitném papíru.

Podobně rovnici

$$x^2 \pm ax = -b$$

můžeme psáti ve tvaru:

$$\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 + b = 2 \cdot \frac{a^2}{8}$$

aneb

$$u^2 + b = 2\frac{a^2}{8}.$$

Stupnice sloužící ku sestrojení nomogrammu jsou zde

$$\alpha_1 = a \qquad \alpha_2 = b \qquad \alpha_3 = u$$

$$f_1(\alpha_1) = \frac{\alpha_1^2}{8} \quad f_2(\alpha_2) = \alpha_2 \quad f_3(\alpha_3) = \alpha_3^2.$$

Narýsování a vyzkoušení nomogrammu budiž vřele doporučeno. Jednotku rýsovací volíme nejúčelněji as 10 *cm*, a nerýsujeme nomogramm dále než až k $b = 1$.

Příklady naše jsou voleny jen s ohledem na minimum předpokladů. V nomografii slouží k řešení rovnic výhodnější nomogrammy, jichž sestrojení ovšem není tak jednoduché.

Podobně postupujeme i v jiných případech.

Abychom na př. obdrželi nomogramm nahrazující násobení a dělení, tudíž nomogramm pro rovnici

$$c = ab$$

a tím i nomogramm pro rovnici

$$a = \frac{c}{b},$$

pišme prvou logarithmicky, jak následuje:

$$2 \log \sqrt{c} = \log a + \log b.$$

Pomocí logarithmických papírů (jaké na př. vyrábí firma C. Schleicher a Schüll v Düren-Rheinland) snadno si sestrojíme nomogramm, který v mnohém nahradí značně dražší logarithmické pravítko.

Avšak nejen nomogrammy, ale i paedagogicky cenné diagrammy lze touto methodou sestrojiti, jak jednoduchý příklad ukáže.

Rozpůlme pravý úhel AOB (viz obr. 4.) přímkou OC. Protneme-li tuto konfiguraci přímkou AB a položíme-li

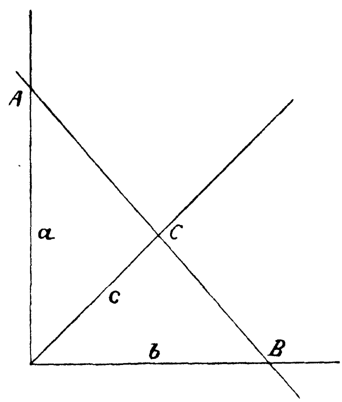
$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

obdržíme rovnici

$$ab \sin 45^0 + bc \sin 45^0 = ac \sin 90^0$$

a z toho

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{c}.$$



Obr. 4.

Tím sestrojen jest nomogramm pro funktionálné vztahy tvaru

$$\frac{1}{f_1(\alpha_1)} + \frac{1}{f_2(\alpha_2)} = \frac{1}{f_3(\alpha_3)}.$$

Rovnice podobné dosti zhusta se vyskytují. Tak na př. (viz Jeništa, Fys. pro vyšší gymn. díl II., str. 155.) v dioptrice lze tak zvanou rovnici zrcadlovou psáti, jak následuje:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Položíme-li

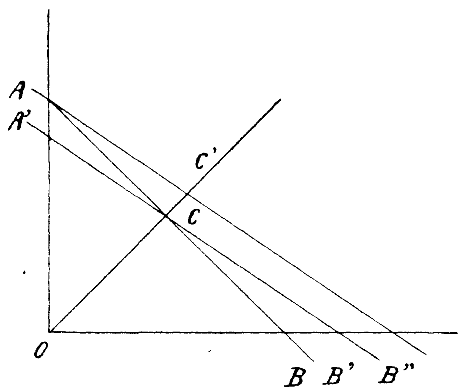
$$\frac{1}{f} = \frac{\sqrt{2}}{c},$$

jest bod C určen jako stálý, odpovídající určité ohniskové vzdálenosti f. Veličiny a a b jsou potom vzdáleností sdružených bodů od vrcholu zrcadlící plochy. Stupnice pro a i b jsou obyčejné lineárné:

Na základě toho lze sestrojiti názorný diagramm závislosti veličin a, b, f, který, spojen s příslušným optickým pokusem, jest velmi cennou pomůckou učební.

Za tím účelem třeba jen přímku AB zaměniti drátem, který lze kol bodu C obraceti.

Na konec dlužno upozorniti ještě na jednu zajímavou vlastnost nomogrammů.



Obr. 5.

Malý (elementárný) pohyb nomografické přímky určuje zároveň differenciální rovnici funkčního vztahu představeného nomogrammem. Poslední příklad (viz obr. 5.) krásně nám to ukazuje. Z nomogrammu lze totiž stanoviti hodnoty differenciálných poměrů

$$\frac{da}{db}, \quad \frac{df}{da}, \quad \frac{df}{db}.$$

Abychom na př. určili differenciálný poměr

$$\frac{da}{db}$$

(pro konstantní f), otočme nomografickou přímku o malý úhel kol bodu C, čímž obdržíme

$$\frac{da}{db} \doteq -\frac{AA'}{BB'}$$

a podobně pro stálé a

$$\frac{df}{db} \doteq +\frac{CC'}{BB''}.$$

To jest věc pro mathematickou applikaci nadmíru důležitá, o čemž snad jednou na tomto místě promluvíme.

Geometrické důkazy parametrické vlastnosti kuželoseček.

Sděluje *V. Jeřábek.*

V článku jednajícím o parametrické vlastnosti kuželoseček*) byla analyticky dokázána vlastnost tato: *V kuželosečce (M), jejíž hlavní osou je $AB = 2a$ a vedlejší $CD = 2b$, postavené kolmice MN, MP na tětivy AM, BM vytínají na AB úsek $PN = 2p = 2\frac{a^2}{b}$.*

V následujících řádcích dovolím si ještě podati geometrické důkazy této vlastnosti.

1. Přetvořme orth. affinitou ellipsu (M) v kruh $(M_1) \equiv (AB)$**) dle osy AB a poměru $\frac{b}{a}$***). Buď RM pořadnicí bodu M ellipsy (M) a RM_1 pořadnicí bodu M_1 kruhu (M_1). Je tedy

$$\frac{RM}{RM_1} = \frac{b}{a} \quad \ldots \tag{1}$$

---

*) Viz 41. ročník Časopisu str. 229., Příloha str. 69.

**) (AB) značí kruh o průměru AB.

***) Sestrojení ponechává se čtenáři.