Ladislav Seifert
Poznámka o prostorové kollineaci

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 170--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121565

Poznámka o prostorové kollineaci.

Napsal **L. Seifert**, prof. reálky v Praze-I.

V různých kompendiích geometrie synthetické pravidlem bývá jen málo jednáno o metrických vztazích. Výjimku činí R. Sturm svým obsáhlým dílem „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“. Zdá se však, že právě v tomto oboru jest ještě mnoho otázek, kterým dosud nebyla věnována náležitá pozornost a k jichž řešení třeba kombinovati nejrůznější methody geometrické.

V předloženém krátkém pojednání chci upozorniti na komplex kvadratický, jejž tvoří přímky prostoru třírozměrného, který sám si jest kollineárně přiřaděn, kolmé ku svým kollineárním, a na jiný zajímavý komplex tvořený příčkami, které orthogonálně sekou každé dvě v této kollineaci kolmo přiřaděné přímky. Ve zvláštním případě, kde jedná se o involuci osovou, jest druhý komplex dobře znám, dík pěknému pojednání St. Jolla: „Fokaltheorie der linearen Kongruenz“ *), ale na případ obecný, jejž zde uvádím, myslím, že není nikde poukázáno.

---

1. Buďte body prostoru přiřaděny kollineárně a označme Σ souhrn útvarů jeho, Σ' souhrn útvarů těmto přiřaděných, R absolutní kružnici v nekonečnu, ϱ rovinu v Σ, jež odpovídá rovině ϱ'_∞ v Σ' a ω' rovinu v Σ', která odpovídá rovině ω_∞ v Σ, takže $\varrho'_\infty \equiv \omega_\infty$.

Přímky systému Σ, jimž přísluší v Σ' přímky kolmé (body v nekonečnu polárně sdružené ku R), *tvoří komplex kvadratický K*, jejž takto lze vytvořiti:

Bodu A v ϱ odpovídá A' na ϱ'_∞, a tomuto polárně ku R přímka a^∞. Přímky svazku (A) v rov. (Aa^∞) jsou kolmé k pří-

*) Mathematische Annalen, sv. 66.

slušným přímkám v Σ', které jdou bodem A', tedy náleží komplexu K. Ale pole rovinné (ϱ) bodů A jest tímto korrelativně přiřaděno poli přímkovému (ω_∞) přímek a; přímky incidentní s přiřaděnými útvary obou tvoří komplex K. Tento jest tedy zvláštním případem t. zv. *Hirstova komplexu.* (Srov. R. Sturm, l. c. sv. II.) Podobně tvoří korrelativní pole ϱ'_∞ a ω' kollineární komplex K'.

Roviny (Aa) a ($A'a'$) obalují paraboloidy Π a Π', které kollineací vytknutou tak sobě odpovídají, že příslušné roviny tečné (Aa), ($A'a'$) jsou k sobě kolmé. Tečné rovině ϱ odpovídá ϱ'_∞ ($\equiv \omega_\infty$), tečné rov. ω_∞ rovina ω'. Ovšem také body i přímky obou paraboloidů jsou si kollineárně přidruženy. Uvésti sluší, že mimo tečné roviny paraboloidu Π není rovin v Σ kolmých k přidruženým; je-li totiž nekonečně vzdálená přímka takové roviny m, musí přidružená rovina obsahovati přímku m' v ω' a pól M přímky m ku R, t. j. dotýkati se Π'.

Libovolnou přímkou v Σ jdou tedy 2 roviny kolmé ku přidruženým; přímky některé osnovy paraboloidu Π jsou však osami svazků, jichž roviny vesměs jsou k přidruženým kolmé.

Přímce u_∞ roviny ϱ odpovídá v ϱ'_∞ přímka u'_∞. Na u jsou dva body O a P, jímž odpovídají O' a P' na u' tak, že jejich poláry o, p jdou body O, P. o, p jsou přímky paraboloidu Π v ω_∞; r, s buďte přímky v ϱ (příslušné k polárám r', s' bodů O, P ku R). Kollineární přímky v Σ' buďte o', p', r', s'. Poněvadž r, s jsou s o', p' sdruženy dle R, jsou r, s (o', p') přímky na Π (Π') kolmé k asymptotickým rovinám na Π' (Π).

2. O komplexu K nutno poznamenati, že singulární plocha jeho jako místo singulárních bodů sestává z Π a rovin ϱ, ω_∞, jako místo singulárních rovin z Π a svazků (O), (P). Komplex má *4 dvojné paprsky o, p, r, s.*

Jak známo, lze plochu Π a komplex K vytvořiti též duálně korrelativními svazky O, P, pokud jsou reálné. Třeba jen přiřaditi každé rovině α svazku (O) paprsek svazku (P), který prochází vrcholem druhého svazku komplexu K v α (mimo 0).

3. Zajímavá jest otázka, zda existují kollineace mimo (Σ, Σ'), které převádí komplex K do K' tak, že čtyrstěn

paprsků singulárních (o p, r, s) se transformuje do (o', p', r', s'), plocha Π do Π' a kollineární tečné roviny jsou k sobě kolmé.

Libovolné přímce k systému (o, r) na Π přiřaďme libovolnou přímku k' systému (o', r') na Π' a jedné tečné rovině přímkou k rovinu tečnou kolmou přímkou k'; tím jsou přiřaděny i dvě přímky l, l' druhého systému. Kollineace obou ploch jest tudíž určena přiřaděním přímek o, r, k — o', r', k' a přímek p, s, l — p', s', l'. Poněvadž roviny (kr), (ko), (kl) jsou kolmé k rovinám ($k'r'$), ($k'o'$), ($k'l'$), jsou všechny roviny svazku (k) kolmé k rovinám svazku (k'), podobně roviny svazků (l), (l') i ostatních.

Komplex K lze vytvořiti, přiřadíme-li bodu A v ϱ přímku a_∞, poláru bodu A' ku R; ale svazku (Aa) odpovídá ($A'a'$) v tečné rovině kolmé, tedy komplexu K komplex K'.

Přímce k lze přiřaditi každou přímku k' osnovy (o', r'), jest tedy ∞^1 *kollineací, které uvedeným způsobem převádějí Π do Π' a K do K'.*

Nejsou-li body O. P reálné, jsou ovšem přímky o, p, r, s také imaginárné a plochy Π, Π' neobsahují vůbec reálných přímek. Pak jest pohodlnější přihlédnouti k tomuto způsobu vytvoření kollineace: Rovině tečné α ku Π přiřaďme kolmou rovinu tečnou α' ku Π'. Pól přímky (ω', α') ku R buď M', jeho kollineární bod v ϱ buď M. Pole ω_∞, ϱ jsou korrelativní tak, že prvkům o, p, u, (ω, α) náleží O, P, $U \equiv (r, s)$, M. Ale pole ϱ'_∞ je kollineární s ϱ tak, že těmto prvkům patří O', P', U', M'. Jsou tedy ω_∞ a ϱ'_∞ pole reciproká, tečné roviny obou ploch k sobě kolmé.

4. Jiná zajímavá otázka jest, zda možno sestrojiti kollineaci (Σ, Σ') takovou, že komplexy K a K', tedy i Π a Π' splývají. Čtyrúhelník dvojných paprsků (o, p, r, s) transformuje se ovšem též sám v sebe.

Kollineace, jež převádí plochu druhého stupně v sebe, jsou dvojího druhu; při kol. prvého druhu transformuje se každý přímkový systém sám v sebe, při kollineacích druhého druhu převádí se jeden v druhý.

Při kollineaci prvého druhu obsahuje každý systém přímkový dvě přímky samodružné m, n a u, v. Tyto tvoří čtyrúhelník na ploše, jeho vrcholy $A \equiv (m, v)$, $B \equiv (n, u)$, $C \equiv (m, u)$, $D \equiv (n, v)$ a příslušné tečné roviny odpovídají si samy, mají tedy býti samy k sobě kolmé, t. j. dotýkají se křivky R. V nekonečnu vzniká tudíž čtyrúhelník tvořený body nekonečně vzdálenými M, N, U, V přímek m, n, u, v opsaný kol R; spojnice MN, UV t. j. přímky plochy Π jsou sdružené dle R, t. j. kolmé k sobě a Π jest *rovnostranný*.

Přímky v nekonečnu o, p jsou involutorně přiřaděny přímkám vrcholovým r, s.

Přímky m, n, u, v jsou osami svazků, jichž přiřaděné roviny jsou k sobě kolmé. Již z toho patrno, že stanovená kollineace jest *involutorní osová*. Osy jsou AB, CD. Toť jest právě onen zajímavý případ, který uvádí H. Reye, R. Sturm a St. Jolle v pojednání výše uvedeném. Na Π existuje ∞^1 čtyrúhelníků m, n, u, v (fokálních os), ∞^1 párů přímek AB, CD vyplňuje cylindroid.

Při kollineaci druhého způsobu jest známo, že dva vrcholy společného čtyrstěnu M, N jsou na ploše a 2 stěny se dotýkají plochy; body M, N procházejí přímky a, c — b, d, jež si odpovídají involutorně. Body $ab \equiv V$, $cd \equiv W$ si též odpovídají. Roviny (ac), (bd) jsou kolmé samy k sobě, $(ab) \perp (cd)$. Ve čtyrúhelníku $(o\ p\ r\ s)$ přímky téhož systému $o \equiv r'$, $o' \equiv r$ se sekou a jsou združené dle R, t. j. o (p) se dotýká R; Π je pl. *rotační*. Přímky obou systémů si odpovídají involutorně, máme patrně centrální homologii. Na Π jest ∞^1 čtyrúhelníků a, b, c, d, centrum C jest v ohnisku, rovina homologie jest rovina řídicí; její kruhové body v nekonečnu jsou singulární Hirstova komplexu, jenž sám jest rotační. Jinak nemá tento případ daleko té zajímavosti jako případ prvý.

5. Všimněme si nyní komplexu Γ paprsků s, které orthogonálně sekou dva kollineární paprsky komplexů K, K'.

Buď $(A, a_\infty) \equiv \alpha$ tečná rovina plochy Π, $(a'A'_\infty) \equiv \alpha'$ kollineární tečná rovina plochy Π', l průsečnice obou. Paprsky svazku (A'_∞) v rov. α' jsou kolmé k l, paprsky s v rovině α [kolmé k paprskům svazků (A), (A'_∞)] obalují parabolu, která se dotýká též paprsku l. Paprsky l, průsečnice kollineárních rovin kolmých ploch Π, Π' tvoří, jak známo, kongruenci Kr druhého stupně a šesté třídy. Tato náleží komplexu Γ.

Buďte dále m, m' kollineární paprsky svazků (A), (A'), s paprsek komplexu Γ; dokážeme, že rovina (sm') je také tečnou rovinou paraboloidu Π'. Bodu B^∞ paprsku m na a^∞ odpovídá $B' \equiv (a', m')$. Rovina (m', t) spojuje tedy B' v ω' s polárou bodu B^∞ ku R, dotýká se tudíž plochy Π'.

Každým paprskem s komplexu Γ jde tedy jedna rovina tečná plochy Π a kolmá tečná rovina plochy Π'.

Snadno poznáme, že komplex je st. 8., neboť dvojiny rovin tečných kolmých libovolným bodem indukují na libovolné přímce korrespondenci (4, 4).

Poněvadž jest ∞^1 kollineací (Σ, Σ'), které převádí Π do Π', obsahuje Γ též ∞^1 kongruencí Kr (2, 6). Každá kongruence dá se vytvořiti dvěma řadami orthogonálních hyperboloidů, které vytvoří pokaždé svazky rovin kolem kollineárních přímek ploch Π a Π'.

Ve specielním případě osové involuce přechází Kr (2, 6) v kongruenci lineární dvakráte čítanou a čtyři pole rovinná v rovinách tečných, jež obsahují osy fokální, z komplexu Γ se oddělí komplex tečen obalové plochy rovin tečných ku Π a R a zbytek je dvakráte čítaný kvadratický komplex Γ.

Jak známo (viz Rey, Geometrie der Lage II., neb St. Jolle, l. c.), lze v tomto případě Γ vytvořiti též řadou rotačních lineárních kongruencí. Tážeme se tedy po kongruenci v našem obecném případě, jejímž zvláštním případem tato jest. Tuto zajímavou otázku nechci zde řešiti, ale poukazuji k tomu, že to jest kongruence paprsků s, jež v jisté kollineaci (Σ, Σ') náleží dvojinám paprsků obou komplexů K, K', které se sekou. Tyto průseky samy vyplňují plochu stupně 4tého, která patrně obsahuje kružnici R a o jejíchž zajímavých vlastnostech snad v brzku budu moci čtenářům sděliti.