Milíč Sypták

Mocninné spirály v p-rozměrném euklidovských prostoru R_p

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 3, 107--127

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121552`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 72 (1947)

Mocninné spirály v p-rozměrném euklidovském prostoru R_p.

M. Sypták, Brno.

(Došlo 9. května 1947).

Úvod.

V předloženém pojednání jsou studovány jisté křivky, které možno považovati za zobecnění známých rovinných spirál, t. zv. *mocninných*. Tyto rovinné spirály jsou vyjádřeny v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = k \cdot \omega^m$ kde k, m jsou reálné konstanty $\neq 0$; mezi ně patří tedy spirála Archimedova ($m = 1$), hyperbolická ($m = -1$), lituus ($m = -\frac{1}{2}$), atd. Zobecnění spočívá v tom, že mocninné spirály definujeme v euklidovském prostoru R_p o libovolném počtu dimensí $p \geq 3$. V tomto pojednání jest ukázáno, že celá řada vlastností, jež známe o mocninných spirálách, zůstává zachována i po tomto zobecnění, ovšem nahradíme-li pojmy a definice, týkající se rovinných křivek, vhodnými pojmy a definicemi platnými v prostoru R_p. Důležitou úlohou hraje *hlavní rotační dvojkužel*. Je to (dvojrozměrná) plocha, kterou při *hlavním rotačním pohybu* vytvořuje přímka, jež prochází středem rotace (je-li p sudé), resp. protíná osu rotace (je-li p liché). Při tomto pohybu opisují jednotlivé body prostoru důležité křivky, jež v literatuře jsou označeny jménem *nadkružnice* (viz (C), (D)); jsou to křivky prostoru o sudém počtu dimensí, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. Mocninné spirály v R_p definujeme jako křivky, jež leží na hlavním rotačním dvojkuželi a jejichž body mají od vrcholu dvojkužele vzdálenosti úměrné m-té mocnině oblouku nadkružnice, kterou z dvojkužele vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru. Vztah mezi nadkružnicemi a mocninnými spirálami je také předmětem studia v této práci. V dodatku je pak rozšířena definice známé rovinné křivky *kochleoidy* na prostor R_{2n}. Její základní čtyři vlastnosti zůstávají v platnosti i v tomto prostoru.

Literatura:

(A) H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, Lipsko 1908.
(B) G. Loria: Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Lipsko 1902.
(C) O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. Masarykovy univ., Brno **146** (1931). Viz též stejně nazvané pojednání od téhož autora v Comptes rendus **193** (1931).
(D) M. Sypták: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p-dimensions, Comptes rendus **195** (1932).

1. Hlavní rotační dvojkužel.

Otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ v R_{2n}, definované v pravoúhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \quad x_{2i-1} \,.\, \cos L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \sin L_i\sigma \\ X_{2i} &= -\, x_{2i-1} \,.\, \sin L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \cos L_i\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

$(i = 1,2, \ldots, n)$ — v nichž σ je parametr a $L_i \neq 0$ konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*[1]) bodu P *okolo bodu* (zvaném *středu* otáčení) $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0$ v R_{2n}.

Podobně: Otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ v R_{2n+1}, definované v pravoúhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \quad x_{2i-1} \,.\, \cos L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \sin L_i\sigma \\ X_{2i} &= -\, x_{2i-1} \,.\, \sin L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \cos L_i\sigma \\ X_{2n+1} &= \quad x_{2n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

$(i = 1,2, \ldots, n)$ — v nichž σ je parametr a $L_i \neq 0$ konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*[1]) bodu P *okolo přímky* (zvané *osou* otáčení) $x_1 = x_2 = \ldots x_{2n} = 0$ v R_{2n+1}.

Otáčení (1) v R_{2n} se tedy skládá z n rovinných otáčení okolo n $(2n - 2)$ — rozměrných prostorů $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a jejich absolutní hodnoty různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny středem otáčení, budeme nazývati *axiálními prostory*.

Podobně: Otáčení (2) v R_{2n+1} se skládá z n rovinných otáčení okolo n $(2n - 1)$ — rozměrných prostorů $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ $(i =$

---

[1]) *Obecné* otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ v R_p $(p \geq 2)$ okolo $(p - m)$ — rozměrného prostoru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ $(2 \leq m \leq p)$ — tedy také okolo bodu a přímky — je vyjádřeno v pravoúhlém systému souřadném ortogonální transformací

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i,1} \,.\, x_1 + \ldots\ldots + a_{i,m} \,.\, x_m \text{ pro } 1 \leq i \leq m, \\ X_i &= x_i \text{ pro } m + 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Poslední rovnice odpadá v případě otáčení kol bodu, t. j. pro $m = p$.

$= 1,2, \ldots, n$), při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a absolutní hodnoty jejich různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny osou otáčení, budeme nazývati *axiálními prostory.*

Jak se snadno přesvědčíme, tvoří všechna otáčení (1) nebo (2) — příslušná různým hodnotám σ — grupu. Vůči této grupě jsou invariantní všechny axiální prostory a následkem toho každý prostor, který vznikne jako průsek m ($1 \leqq m \leqq n$) axiálních prostorů. Zejména to tedy platí o středu otáčení a o ose otáčení, u níž dokonce každý její bod je invariantní vůči grupě (2).

Při hlavním otáčení prostoru R_{2n} opisuje každý bod P ($x_1, \ldots, x_{2n}$) nadkružnici, jejíž střed je ve středu otáčení a jejichž axiální prostory jsou axiálními prostory otáčení, nebo v těchto prostorech leží. Při hlavním otáčení prostoru R_{2n+1} opisuje každý jeho bod P ($x_1, \ldots, x_{2n+1}$) nadkružnici, ležící v nadrovině R_{2n}^* kolmé k ose otáčení. Její střed je v průsečíku osy otáčení s R_{2n}^* a její axiální prostory jsou průsečné prostory axiálních prostorů otáčení s R_{2n}^*, nebo v těchto prostorech leží.

Důkaz: Křivka, kterou bod P opisuje, je dána rovnicemi (1), resp. (2). Použijme transformace souřadnic

$$X'_{2i-1} = \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i-1} + \frac{x_{2i}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i},$$

$$X'_{2i} = \frac{x_{2i}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i-1} - \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i},$$

resp. $X'_{2n+1} = X_{2n+1}$

pro taková i ($1 \leqq i \leqq n$), pro která x_{2i-1} nebo x_{2i} je různé od 0 a

$$X'_{2i-1} = X_{2i-1}, \quad X'_{2i} = X_{2i}$$

pro taková i ($1 \leqq i \leqq n$), pro která $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$. Tím dostaneme

$$X'_{2i-1} = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \,.\, \cos L_i\sigma,$$

$$X'_{2i} \;\; = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \,.\, \sin L_i\sigma,$$

resp. $X'_{2n+1} = x_{2n+1}$

($i = 1, \ldots, n$), což je nadkružnice, mající uvedené vlastnosti.[2])

Přímka p v R_{2n}, jež prochází středem otáčení O a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytvořuje při hlavním rotačním pohybu (1) plochu (K_{2n}), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem O*. Podobně: Přímka p v R_{2n+1}, jež protíná osu otáčení o v bodě O a není k ní kolmá, a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytvořuje při hlavním rotačním pohybu (2) plochu

[2]) Viz (C), (D).

(K_{2n+1}), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem O a osou o.*

Jejich parametrická vyjádření ($\equiv$ p. v.) můžeme snadno zjistiti. Jsou-li rovnice přímky p $x_1 = \varrho\alpha_1, \dots, x_{2n} = \varrho\alpha_{2n}$, resp. $x_{2n+1} = d + \varrho C$, kdež ϱ je parametr, $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{2n}^2 +$ resp. $C^2 = 1$, $\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2 \neq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a C je různé od 0 a 1, pak tato přímka při rotaci (1), resp. (2) vytvoří plochu

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \varrho\,(\alpha_{2i-1} \cos L_i\sigma + \alpha_{2i} \sin L_i\sigma) \\ X_{2i} &= \varrho\,(-\alpha_{2i-1} \sin L_i\sigma + \alpha_{2i} \cos L_i\sigma) \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= d + \varrho C \end{aligned}$$

$(i = 1, \dots, n)$. Provedeme-li transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} X'_{2i-1} &= \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i-1} + \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2i} &= \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i-1} - \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2n+1} &= X_{2n+1} - d \end{aligned}$$

$(i = 1, \dots, n)$, kde $r_i = \sqrt{\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2}$, dostaneme $X'_{2i-1} = \varrho r_i \,.\, \cos L_i\sigma$, $X'_{2i} = \varrho r_i \,.\, \sin L_i\sigma$, resp. $X'_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \dots, n)$. Proveďme dále transformaci parametru $s = \sigma\sqrt{r_1^2L_1^2 + \dots + r_n^2L_n^2}$, označme $l_i\sqrt{r_1^2L_1^2 + \dots + r_n^2L_n^2} = L_i$ a pišme x_j místo X'_j pro $j = 1, \dots, n, n+1$. Tím dostaneme p. v. rotačního dvojkužele (K_{2n}) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \,.\, \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \,.\, \sin l_i s \tag{3}$$

$(i = 1, \dots, n)$, při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic, $r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$, $r_1^2l_1^2 + \dots + r_n^2l_n^2 = 1$ a ϱ značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu, a p. v. rotačního dvojkužele (K_{2n+1}) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \,.\, \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \,.\, \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = \varrho C \tag{4}$$

$(i = 1, \dots, n)$, při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic, osa jeho v ose X_{2n+1}, $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$, $r_1^2l_1^2 + \dots + r_n^2l_n^2 = 1$ a ϱ značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu.

Poznámka: Rovnice (3), resp. (4) pro $s = s_0$ (konstanta) představují p. v. přímky, ležící na rotač. dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a dá se snadno dokázati, že rotací (1), resp. (2) této přímky vznikne týž rotač. dvojkužel. Obzvláště to tedy platí o přímce $x_{2i-1} = \varrho r_i$, $x_{2i} = 0$, resp. $x_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \dots n)$.

Je patrné, že rotační dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) se skládá ze dvou shodných částí, t. zv. (*hlavních*) *rotačních kuželů* (k_{2n}^1),

resp. (k^1_{2n+1}) pro $\varrho \geqq 0$ a (k^2_{2n}), resp. (k^2_{2n+1}) pro $\varrho \leqq 0$, jež jsou souměrně položeny dle společného vrcholu. Každý z nich vznikne rotací polopřímky, jejíž koncový bod je ve středu otáčení, resp. na ose otáčení.

Každá nadkoule o středu ve vrcholu rotačního dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) *protíná tuto plochu ve dvou shodných nadkružnicích, z nichž jedna leží na* (k^1_{2n}), resp. (k^1_{2n+1}) *a druhá na* (k^2_{2n}), resp. (k^2_{2n+1}). Nadkoule $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 +$ resp. $x_{2n+1}^2 = R^2$ $(R > 0)$ protíná totiž (3), resp. (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \pm Rr_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm Rr_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm R \,.\, C$ $(i = 1, \ldots, n)$. Současně vidíme, že nadkoule o poloměru $R = 1$ protíná (3), resp. (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \pm r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm r_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm C$, při čemž s jest jejich oblouk. Z toho je patrný geometr. význam parametru s v (3), resp. (4).

Každá nadrovina R_{2n}, *jež je kolmá na osu rotač. dvojkužele* (K_{2n+1}) *a jež neprochází jeho vrcholem, protíná tento dvojkužel v nadkružnici, mající střed v průsečíku osy a nadroviny* R_{2n}. Neboť nadrovina $x_{2n+1} = k$ $(\neq 0)$ protíná (4) v nadkružnici $x_{2i-1} = \frac{k}{C} r_i \,.$ $. \cos l_i s$, $x_{2i} = \frac{k}{C} r_i \,.\, \sin l_i s$, $x_{2n+1} = k$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Každá nadkoule se středem na ose rotač. dvojkužele (K_{2n+1}) *protíná tuto plochu ve dvou nadkružnicích, ležících v nadrovinách kolmých k ose a majících středy v průsečících nadrovin s osou.* Neboť nadkoule $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 + (x_{2n+1} - k)^2 = R^2$ protíná (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \varrho r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho r_i \,.\, \sin l_i s$, $x_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \ldots, n)$, kde $\varrho = Ck \pm \sqrt{C^2k^2 - k^2 + R^2}$. Označíme-li $v^2 = k^2 - c^2k^2$, což geometricky znamená čtverec vzdálenosti středu nadkoule od povrchových přímek dvojkužele, pak platí:

a) pro $R^2 > v^2$, po př. $R^2 < v^2$ jsou průsekem dvě reálné, po př. dvě imaginární nadkružnice.

b) pro $R^2 = v^2$ jest průsekem nadkružnice dvojnásobná, podél níž se rotač. dvojkužel dotýká nadkoule.

Protněme rotační dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) dvěma nadkoulemi — o poloměrech R_1 (> 0), R_2 (> 0) a společném středu ve vrcholu dvojkužele — v nadkružnicích $\varkappa_1$, $\varkappa_2$! Buďte P_1, P_2 dva body téže povrchové přímky, z nichž P_1 leží na $\varkappa_1$ a P_2 na $\varkappa_2$! Opisuje-li P_1 na $\varkappa_1$ oblouk $\widehat{P_1Q_1}$, opisuje P_2 na $\varkappa_2$ oblouk $\widehat{P_2Q_2}$ a platí

$$\widehat{P_1Q_1} : \widehat{P_2Q_2} = R_1 : R_2. \tag{5}$$

Je-li totiž dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) určen rovnicemi (3), resp. (4), má $\varkappa_1$ p. v. $x_{2i-1} = \pm R_1 r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm R_1 r_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm R_1 C$ a $x_{2i-1} = \pm R_2 r_i \cdot \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm R_2 r_i \cdot$ $\cdot \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm R_2 C$ $(i = 1, \dots, n)$. Jsou-li body P_1, Q_1 určeny parametry s_1, s_2, jsou body P_2, Q_2 určeny týmiž parametry. Platí tedy $\widehat{P_1 Q_1} = \int_{s_1}^{s_2} R_1 \, ds = R_1 (s_2 - s_1)$, $\widehat{P_2 Q_2} = \int_{s_1}^{s_2} R_2 \, ds = R_2 \cdot$ $(s_2 - s_1)$, z čehož následuje úměra (5).

2. Mocninné spirály.

Jestliže mezi ϱ, s v (3), resp. (4) platí vztah $f(\varrho, s) = 0$, pak tyto rovnice představují p. v. křivky, ležící na rotač. dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}). Křivku, u níž platí

$$\varrho = k \cdot (s - s_0)^m \tag{6}$$

— při čemž $k \neq 0$, $m \neq 0$, s_0 jsou reálné konstanty — budeme nazývati *mocninnou spirálou stupně m*. Zvláštní případy těchto křivek nazveme ve shodě s názvy v R_2 takto:

pro $m = 1$ *Archimedovou* spirálou,
pro $m = -1$ *hyperbolickou* spirálou,
pro $m = \frac{1}{2}$ *Fermatovou* spirálou,
pro $m = -\frac{1}{2}$ spirálou „*lituus*“,
pro $m = \frac{p}{q}$ (p, q celá kladná čísla, $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$, 2) *parabolickou spirálou vyššího stupně*,
pro $m = -\frac{p}{q}$ (p, q celá kladná čísla, $\frac{p}{q} \neq 1$) *hyperbolickou spirálou vyššího stupně*.

Dále nazveme křivku, u níž ϱ je rovno polynomu $P(s)$ stupně n $(\neq 0)$, *polynomickou spirálou stupně n*. Sem patří ku př. *Galileiova* spirála, u níž $\varrho = as^2 + bs + c$ ($a \neq 0$, b, c jsou konstanty a $b^2 - 4ac \neq 0$). Budiž zde poznamenáno, že u této spirály lze transformací (7) pro $s_0 = -\frac{b}{2a}$ docíliti toho, že ϱ přejde do tvaru $as^2 + B$ ($B \neq 0$ konst.). Všechny uvedené křivky patří pod *algebraické* spirály, u nichž mezi ϱ a s platí algebraický vztah $f(\varrho, s) = 0$. Z *transcendentních* spirál — u nichž ϱ je rovno transcendentní funkci v s — jest nejdůležitější spirála *exponenciální* čili *logaritmická*, u níž $\varrho = k \cdot e^{ms}$ ($k \neq 0$, $m \neq 0$ konstanty)[3]). Každá z těchto spirál má *pól* ve vrcholu dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a — v případě, že jde o R_{2n+1} — má kromě toho *osu* v ose dvojkužele (K_{2n+1}).

[3]) O jejích vlastnostech viz M. Sypták: O logaritmických spirálách v p-rozměrném euklidovském prostoru. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 70 (1940).

Z geometrického významu v (3), resp. (4) je patrné, že *konchoidy* těchto spirál, když pól konchoidy volíme v pólu spirály, dostaneme, když místo ϱ dáme $\varrho + d$, kdež d je libovolná konstanta. Jest tedy spirála, u níž $\varrho = a \, . \sqrt{s} + d$ ($a \neq 0$ konstanta) — zvaná někdy *parabolická* — konchoidou Fermatovy spirály.

Dosaďme do (3), resp. (4) $\varrho = k \, . \, (s - s_0)^m$ a proveďme transformaci systému souřadného (otočení)

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= - x_{2i-1} \, . \cos l_i s_0 + x_{2i} \, . \sin l_i s_0, \\ X_{2i} &= - x_{2i-1} \, . \sin l_i s_0 + x_{2i} \, . \cos l_i s_0, \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= \quad x_{2n+1} \end{aligned} \tag{7}$$

($i = 1, \ldots, n$). Po malé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= r_i k \, (s - s_0)^m \, . \cos l_i \, (s - s_0), \\ X_{2i} &= r_i k \, (s - s_0)^m \, . \sin l_i (s - s_0), \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= Ck \, (s - s_0)^m \, . \end{aligned}$$

Proveďme dále transformaci parametru $s = \sigma + s_0$ a pišme s, x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2n+1} místo σ, X_{2i-1}, X_{2i}, X_{2n+1}! Tím dostaneme p. v. *mocninné spirály stupně m*, ležící na rotačním dvojkuželu (K_{2n}) vyjádřeném (3), resp. (K_{2n+1}) vyjádřeném (4), v tomto jednoduchém tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \, . \, s^m \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \, . \, s^m \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= Ck \, . \, s^m \end{aligned} \tag{8}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$); přitom $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Kromě toho její pól je v počátku souřadnic a — jde-li o R_{2n+1} — její osa je souřadnou osou X_{2n+1}.

Dle (8) jest p. v. *Archimedovy spirály* ($m = 1$)

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \, . \, s \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \, . \, s \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= Ck \, . \, s \end{aligned} \tag{9}$$

($i = 1, \ldots, n$) a p. v. *hyperbolické spirály* ($m = -1$)

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \frac{k}{s} \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \frac{k}{s} \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \frac{k}{s} \end{aligned} \tag{10}$$

($i = 1, \ldots, n$). Vzorec (8) doplníme následující větou, na kterou se později budeme často odvolávati:

Parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= R_i\,(aS+b)^m \,.\, \cos L_i S, \\ x_{2i} &= R_i\,(aS+b)^m \,.\, \sin L_i S, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= K\,(aS+b)^m \end{aligned} \tag{11}$$

($i = 1, \dots n$), kde S je parametr a $R_i \neq 0$, $L_i \neq 0$, $a \neq 0$, $m \neq 0$, $K \neq 0$, b jsou konstanty a kde platí $|L_i| \neq |L_j|$ pro $i \neq j$, *lze vhodnou úpravou uvésti na tvar* (8), ve kterém $r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Je tedy křivka o p. v. (11) mocninnou spirálou stupně m, ležící v R_{2n}, resp. R_{2n+1}. A z důkazu bude patrno, že *všechny spirály — odpovídající různým hodnotám konstanty b — jsou, až na polohu, stejné a mají společný pól v počátku souřadnic a společnou osu v souřadné ose* X_{2n+1}.

Důkaz: Otočme nejprve systém souřadný dle rovnic

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \,.\, \cos\left(L_i \frac{b}{a}\right) - x_{2i} \,.\, \sin\left(L_i \frac{b}{a}\right), \\ X_{2i} &= x_{2i-1} \,.\, \sin\left(L_i \frac{b}{a}\right) + x_{2i} \,.\, \cos\left(L_i \frac{b}{a}\right), \\ X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned}$$

($i = 1, \dots, n$) a proveďme transformaci paramentru dle vztahu $\sigma = aS + b$! Tím dostaneme $X_{2i-1} = R_i \,.\, \sigma^m \,.\, \cos\left(\frac{L_i}{a}\sigma\right)$, $X_{2i} = R_i \,.\, \sigma^m \,.\, \sin\left(\frac{L_i}{a}\sigma\right)$, resp. $X_{2n+1} = K \,.\, \sigma^m$ ($i = 1, \dots, n$). Označíme nyní

$$1^\circ\ r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2}}, \text{ resp. } r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}$$

$$\text{a } C = \frac{K}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}$$

$$2^\circ\ k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2}}{\left[r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \dots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}m}},$$

$$\text{resp. } k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}{\left[r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \dots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}m}}$$

$$3^\circ\ l_i = \frac{L_i}{a \,.\, \sqrt{r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \dots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2}}$$

a provedeme dále transformaci parametru

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \ldots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2}}.$$

Parametrické vyjádření (11) můžeme pak v tomto označení psát ve tvaru (8), při čemž platí $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Poněvadž r_i, l_i, k, C nezávisí na b, nemá b vliv na tvar křivky. Má vliv pouze na její polohu, neboť se vyskytuje jen v rovnicích pro otočení systému souřadného. Z dokázané věty bezprostředně následuje:

Konchoida Archimedovy spirály — jestliže její pól je v pólu Archimedovy spirály — jest opět Archimedova spirála, shodná s původní, lišící se od ní pouze polohou. Pól, po př. osa jest však oběma spirálám společná.

Vraťme se ke vztahu (6) a všimněme si, že dle úměry (5) jsou oblouky s, S nadkružnic — které vytínají z rotač. dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) nadkoule, mající společný střed ve vrcholu a poloměry $R_1 = 1$, $R_2 = R$ (> 0) — mezi dvěma povrchovými přímkami, při vhodné volbě orientace, vázány vztahem $S = Rs$. Proto z $\varrho = k \, . \, (S - S_0)^m$ následuje $\varrho = kR^m \, (s - s_0)^m$. Z toho dle (3), resp. (4) a (7) plynou následující dvě věty:

Buď $\varkappa$ nadkružnice v R_{2n}, P, Q dva její body a O její střed, po př. — jde-li o R_{2n+1} — bod na kolmici o vztyčené ve středu $\varkappa$ na R_{2n}! Nanesme na spojnici $\overrightarrow{OQ}$ od O úsečku $\overrightarrow{OA}$ úměrnou m-té mocnině oblouku $\widehat{PQ}$! Jestliže bod P je pevný a Q se pohybuje na $\varkappa$, pak koncové body A leží na mocninné spirále stupně m. Všechny tyto spirály — odpovídající různým volbám bodu P na $\varkappa$ — jsou až na polohu shodné, mají však společný pól O a — v případě R_{2n+1} — společnou osu o.

Poznámka 1. Dle (11) platí pro Archimedovu spirálu obecnější věta: Naneseme-li od O úsečky rovné $k \, . \, \sigma + K$ — kdež $k \neq 0$, K jsou konstanty a $\sigma = \widehat{PQ}$ —, obzvláště tedy naneseme-li od Q úsečky rovné $k \, . \, \sigma$, pak body A leží na Archimedově spirále, jejíž tvar nezávisí na volbě P ani na konstantě K.

2. Dle (11) se snadno dokáže: Otáčí-li se rovnoměrně přímka p v R_{2n} dle (1), resp. v R_{2n+1} dle (2) — při čemž prochází středem otáčení O, resp. protíná osu otáčení o v bodě O — a současně na ní (vycházeje z určitého bodu) se pohybuje rovnoměrně bod P, pak tento bod opisuje Archimedovu spirálu, mající v O svůj pól a — v případě R_{2n+2} — v o svou osu.

Mocninná spirála (8) *stupně* $m < 0$ *má v pólu asymptotický bod a — v případě* $-1 \leqq m < 0$ — *má též asymptotu, jejíž rovnice jsou*

a) pro $m = -1$ (*hyperbolická spirála*)

$$x_{2i-1} = r_i, \; x_{2i} = r_i l_i k, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

b) pro $-1 < m < 0$

$$x_{2i-1} = \lambda r_i, \; x_{2i} = 0, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

při čemž λ *je parametr.*

Důkaz: Především je patrné, že u mocninné spirály (8) platí pro $s = 0$ $dx_{2i-1} : dx_{2i} :$ (resp.) $dx_{2n+1} = r_i : 0 :$ (resp.) C. Dále souřadnice bodu T (viz (27)), ležícího na tečně bodu $s = 0$ jsou

a) pro $m = -1 : x_{2i-1} = 0, \; x_{2i} = r_i l_i k$, resp. $x_{2n+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

b) pro $-1 < m < 0 : x_{2i-1} = 0, \; x_{2i} = 0$, resp. $x_{2n+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Proto rovnice asymptoty, určené bodem T a poměrem směrových kosinů, jsou v prvém případě (12) a ve druhém (13).

Poznámka: Jestliže $m < -1$, pak vzdálenost $v = \left| \dfrac{s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}} \right|$ pólu od tečny mocninné spirály (8) (viz (26)) vzrůstá do ∞, když $s \to 0$. Tedy u spirály stupně $m < -1$ asymptota jako tečna v nekonečně vzdáleném bodě křivky neexistuje.

3. Polární tečna, normála, subtangenta, subnormála.

Buď P regulární bod jakékoli spirály Σ, ležící na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a O buď její pól (vrchol dvojkužele)! Sestrojme v bodě P tečnu a protněme ji v bodě T nadrovinou, jdoucí bodem O kolmo na spojnici OP (průvodič bodu P)! Spojnici TO protněme pak v bodě N nadrovinou, jdoucí kolem P kolmo na jeho tečnu! Tím dostaneme pravoúhlý trojúhelník o vrcholech P, T, N, ve kterém ex def. $\overline{PT}$ je *délka polární tečny*, $\overline{PN}$ je *délka polární normály*, $\overline{OT}$ *délka polární subtangenty* a $\overline{ON}$ *délka polární subnormály.* Uvedené délky béřeme vždy absolutně.

P. v. spirály Σ můžeme dle (3), (4) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \varrho(s) \,.\, \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \varrho(s) \,.\, \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \varrho(s) \end{aligned} \tag{14}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Přitom r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$, $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$, $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$ (resp. $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$), $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. $\varrho(s)$ je tedy vzdálenost bodu spirály od vrcholu dvojkužele a s je oblouk nadkružnice $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C$ $(i = 1, \ldots, n)$, kterou vytíná z dvojkužele nadkoule o středu ve vrcholu a o poloměru 1.

Bod P buď určen parametrem s! Pomocí směrových kosinů lze zjistiti, že pro úhel ϑ, sevřený tečnou a průvodičem bodu dotyku P, platí

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varrho}{\varrho'} \left(\varrho = \varrho(s),\ \varrho' = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s}\right), \tag{15}$$

takže délka polární tečny je

$$\tau = \left| \frac{\varrho}{\varrho'} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right|, \tag{16}$$

délka polární normály

$$\nu = \left| \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right| \tag{17}$$

délka polární subtangenty

$$s_\tau = \left| \frac{\varrho^2}{\varrho'} \right|, \tag{18}$$

délka polární subnormály

$$s_\nu = | \varrho' | \tag{19}$$

a vzdálenost pólu od tečny

$$v = \left| \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} \right|. \tag{20}$$

Jelikož dále tečna v bodě P má p. v. $x_{2i-1} = r_i \varrho \cos l_i s + \lambda r_i \cdot (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s)$, $x_{2i} = r_i \varrho \sin l_i s + \lambda r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s)$, resp. $x_{2n+1} = C\varrho + \lambda C \varrho'$ $(i = 1, \ldots n)$, kdež λ je parametr, a nadrovina, jdoucí pólem O kolmo na OP, má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} r_i (x_{2i-1} \cos l_i s + x_{2i} \sin l_i s) + [\text{resp. } C] = 0,$$

jsou souřadnice bodu T

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \sin l_i s, \quad x_{2i} = - r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \cos l_i s, \\ &\text{resp. } x_{2n+1} = 0, \ (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{21}$$

Jelikož dále nadrovina, jdoucí bodem P kolmo na jeho tečnu, má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1} - r_i \varrho \cos l_i s) \cdot r_i (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - r_i \varrho \sin l_i s) . \ r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s) + \text{resp.}$$

$(x_{2n+1} - C\varrho) C\varrho' = 0$ a spojnice OT má p. v. $x_{2i-1} = \lambda r_i l_i \sin l_i s$,

$x_{2i} = -\lambda r_i l_i \cos l_i s$, resp. $x_{2n+1} = 0$ (λ parametr), jsou souřadnice bodu N

$$x_{2i-1} = -r_i l_i \varrho' \sin l_i s, \quad x_{2i} = r_i l_i \varrho' \cos l_i s, \quad \text{resp. } x_{2n+1} = 0, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Pro mocninné spirály (8) platí tedy

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s}{m}, \tag{23}$$

$$s_\tau = \frac{k}{m} \cdot s^{m+1}, \tag{24}$$

$$s_\nu = | mk \cdot s^{m-1} |, \tag{25}$$

$$v = \frac{k \cdot s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}}. \tag{26}$$

Z (24) je patrné, že *u hyperbolické spirály jest subtangenta konstantní.* Pomocí (18) a (11) se snadno dokáže, že *je to jediná křivka na rotačním dvojkuželu* (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}), *mající tuto vlastnost.*

Z (25) je dále patrné, že *u Archimedovy spirály jest subnormála konstantní.* Z (19) a (11) plyne, že je to *jediná křivka na rotačním dvojkuželu* (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) *o této vlastnosti.*

Dle (21) a (22) platí pro mocninné spirály o p. v. (8):

Body T leží na křivce

$$x_{2i-1} = \frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = -\frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \cos l_i s, \quad \text{resp. } x_{2n+1} = 0 \ (i = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

a body N na křivce

$$x_{2i-1} = -r_i l_i \, kms^{m-1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = r_i l_i \, kms^{m-1} \cos l_i s, \quad \text{resp. } x_{2n+1} = 0 \ (i = 1, \ldots, n). \tag{28}$$

Z toho je patrné: *U mocninných spirál m-tého stupně leží koncové body subtangenty (subnormály) na mocninné spirále stupně* $m + 1$ (*stupně* $m - 1$), *jež má s původní spirálou společný pól a — v případě* R_{2n+1} *— leží v nadrovině* R_{2n} *jdoucí pólem kolmo na osu.* Tedy: *U hyperbolické spirály koncové body subtangenty a u Archimedovy spirály koncové body subnormály leží na nadkružnicích, majících středy v pólu spirály.* Z (22) je dále patrné, že u polynomické spirály stupně m leží koncové body subnormály na polynomické spirále stupně $m - 1$, jež má s původní spirálou společný pól a — v případě R_{2n+1} — leží v nadrovině R_{2n}, jdoucí pólem kolmo na osu. U Galileiovy spirály je to tedy Archimedova spirála.

Další dvě vlastnosti lze snadno dokázati pomocí (23), (15), resp. (24), (25), (18), (19):

Mocninné spirály na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) ***jsou charakterisovány vlastností, že protínají povrchové přímky dvojkužele pod úhlem*** ϑ, ***jehož (trigonometrická) tangenta je lineární***

funkcí oblouku S nadkružnice, kterou z (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru.

Mocninná spirála m-tého stupně na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) je charakterisována vlastností, že její polární subtangenta je tvaru $s_\tau = k \,.\, (S + a)^{m+1}$ a současně její polární subnormála tvaru $s_\nu = K \,.\, (S + a)^{m-1}$; přitom k, K jsou konstanty $\neq 0$ a S má týž význam jako v předchozí větě.

4. Další vlastnosti mocninných spirál.

Podáváme zde několik různorodých vlastností mocninných spirál. Především u spirály (14) uvedeme vzorec pro výpočet plochy F opsané průvodičem $\varrho(s)$, když s jde od s_1 do s_2. Na základě toho, že poloha opsaná průvodičem konstantní délky $\varrho(s) = R$ se rovná $\frac{1}{2}R^2 (s_2 - s_1)$, se snadno zjistí, že

$$F = \tfrac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} \varrho^2(s)\, ds. \tag{29}$$

Pro mocninné spirály (8) jest tedy

$$F = \tfrac{1}{2}\, k^2 \frac{s_2^{2m+1} - s_1^{2m+1}}{2m + 1} \quad \text{pro } m \neq -\tfrac{1}{2}, \tag{30}$$

$$F = \tfrac{1}{2}\, k^2 \log \frac{s_2}{s_1} \qquad \text{pro } m = -\tfrac{1}{2}. \tag{31}$$

Z toho následuje: Plocha F opsaná průvodičem $\varrho(s)$, když jeho koncový bod jde *a*) od pólu $s = 0$ do bodu $P(s)$ $F = \frac{1}{2}\, k^2 \dfrac{s^{2m+1}}{2m+1}$ pro $m > 0$, *b*) od bodu $P(s)$ do pólu $s = \infty$ (asymptotického bodu) $F = \infty$ pro $-\frac{1}{2} \leqq m < 0$, *c*) od bodu $P(s)$ do pólu $s = \infty$ (asymptotického bodu) $F = -\frac{1}{2}\, k^2 \dfrac{s^{2m+1}}{2m+1}$ pro $m < -\frac{1}{2}$.

Poznámka: U Archimedovy spirály jest plocha F omezená jejím obloukem a průvodiči koncových bodů ϱ_1, ϱ_2 rovna dle (30) $F = \dfrac{1}{6k}\,(\varrho_2^3 - \varrho_1^3)$ a u hyperbolické spirály $F = \dfrac{1}{2k}\,(\varrho_1 - \varrho_2)$.

Vlastnost vyjádřená vzorci (30), (31) je pro mocninné spirály na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) charakteristická. Platí totiž: *Jestliže u křivky* (14) *na rotač. dvojkuželi (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) jest plocha F, opsaná průvodičem $\varrho(s)$, když jeho koncový bod jde od $P(s_1)$* do *$P(s)$, tvaru $F = a \,.\, s^m + b$ $(a, m, b$ konstanty, $a \,.\, m > 0)$ nebo tvaru $F = a \,.\, \log |b \,.\, s|$ $(a > 0$, b konstanty$)$, pak křivka* (14) *je mocninnou spirálou stupně $\dfrac{m-1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2}$.* Dle předpokladu jest totiž

$F = \frac{1}{2}\int\limits_{s_1}^{s} \varrho^2(s)\,ds = a\,.\,s^m + b$ nebo $F = \frac{1}{2}\int\limits_{s_1}^{s} \varrho^2(s)\,ds = a\,.\log|b\,.\,s|$. Derivací dle s dostáváme v prvém případě $\varrho^2(s) = 2ams^{m-1}$, z čehož $\varrho(s) = \sqrt{2am}\,.\,s^{\frac{m-1}{2}}$ a ve druhém $\varrho^2(s) = \frac{2a}{s}$, z čehož $\varrho(s) = \sqrt{2a}\,.\,s^{-\frac{1}{2}}$.

V kulové inversi odpovídá mocninné spirále m-tého stupně — v případě, že střed inverse je v jejím pólu — mocninná spirála stupně — m, mající s původní spirálou společný pól a resp. osu. Archimedově spirále odpovídá tedy hyperbolická spirála a obráceně.

Jestliže střed inverse je v počátku souřadnic a poloměr nadkoule R, pak kulová inverse v p-rozměrném prostoru R_p je vyjádřena rovnicemi

$$X_j = \frac{R^2}{x_1^2 + \ldots + x_p^2}\,.\,x_j \quad (j = 1,2, \ldots, p).$$

Odpovídá tedy mocninné spirále (8) mocninná spirála

$$X_{2i-1} = r_i \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \cos l_i s, \quad X_{2i} = r_i \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \sin l_i s,$$

$$\text{resp. } X_{2n+1} = C \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Protneme-li rotač. dvojkužel (K_{2n}) *o p. v.* (3), *resp.* (K_{2n+1}) *o p. v.* (4) *nadkoulemi, majícími společný střed v jeho vrcholu V, dostaneme systém nadkružnic* (Σ), *z nichž každá protíná přímku* ξ $x_{2i-1} = r_i,\ x_{2i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, resp. $x_{2n+1} = C$, *ležící na tomto dvojkuželi. Hyperbolická spirála* (10) *jest charakterisována na* (K_{2n}), resp. *na* (K_{2n+1}) *vlastností, že délky oblouků nadkružnic systému* (Σ) *od přímky* ξ *až k průsečíkům jejich s hyperbolickou spirálou jsou konstantní* $(= k)$.

Poznámka: Přímka ξ jde vrcholem dvojkužele rovnoběžně s asymptotou hyperbolické spirály (10), jak patrno z (12).

Důkaz: Buď Q $(s_1 \neq 0)$ bod na hyperbolické spirále (10)! Nadkružnice systému (Σ), jdoucí tímto bodem, má p. v. $x_{2i-1} = \frac{k}{s_1} r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \frac{k}{s_1} r_i \sin l_i s$ $(i = 1, \ldots, n)$, resp. $x_{2n+1} = C\frac{k}{s_1}$. Její průsečík P s přímkou ξ je určen parametrem $s = 0$ na nadkružnici a parametrem $s = \frac{k}{s_1}$ na ξ. Je tedy oblouk $\widehat{PQ} = \int\limits_0^{s_1} \frac{k}{s_1}\,ds = k$.

Buď nyní obráceně h křivka na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) mající uvedenou vlastnost! Její p. v. můžeme psát ve tvaru (14). Buď dále $Q(s_1)$ bod společný této křivce a nadkružnici $x_{2i-1} = \varrho\,(s_1)\, r_i \cos l_i s$, $x_{2i} =$

$= \varrho(s_1)\, r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C\, \varrho(s_1)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ze systému (Σ)! Nadkružnice protíná ξ v bodě P, jenž je na ní určen parametrem $s = 0$. Je tedy oblouk $\widehat{PQ} = \int\limits_0^{s_1} \varrho(s_1)\, ds = \varrho(s_1) \,.\, s_1$ a ten dle předpokladu je konstantní ($= k$). Z toho následuje, že $\varrho(s) = \dfrac{k}{s}$, takže h je hyperbolická spirála, j. b. d.

Podobně se dokáže, že mocninné spirály (8) stupně m jsou charakterisovány vlastností, že shora uvedené oblouky od přímky ξ až k průsečíku $Q(s)$ na mocninné spirále jsou rovny $\widehat{PQ} = k \,.\, s^{m+1}$ (k konstanta).

Spirála „lituus“ o p. v. (8) pro $m = -\frac{1}{2}$ jest na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) charakterisována vlastností, že plocha, omezená obloukem $\widehat{PQ}$ nadkružnice $\varkappa$ systému (Σ) — když P, Q jsou průsečíky nadkružnice $\varkappa$ s přímkou ξ a spirálou — a spojnicemi koncových bodů P, Q s vrcholem V, má konstantní plochu ($= \frac{1}{2} k^2$).

Poznámka: Přímka ξ jest asymptotou spirály, jak je patrno z (13).

Důkaz: Je-li Q na spirále určen parametrem $s = s_0$, jest p. v. nadkružnice $\varkappa$ $x_{2i-1} = r_i \dfrac{k}{\sqrt{s_0}} \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \dfrac{k}{\sqrt{s_0}} \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C \dfrac{k}{\sqrt{s_0}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, takže body P, Q jsou na ní určeny parametry $s = s_0$, $s = 0$. Má tedy plocha omezená $\widehat{PQ}$ a spojnicemi $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ dle (29) obsah $F = \frac{1}{2} \int\limits_0^{s_0} \dfrac{k^2}{s_0^2}\, ds = \frac{1}{2} k^2$. Buď nyní obráceně h křivka na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) mající uvedenou vlastnost! Její p. v. lze psáti ve tvaru (14). Bod Q na ní buď určen parametrem $s = s_0$! Pak p. v. nadkružnice ze systému (Σ), jdoucí tímto bodem, jest $x_{2i-1} = \varrho(s_0)\, r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho(s_0)\, r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C \varrho(s_0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, takže P je určen parametrem $s = 0$. Dle předpokladu jest identicky vzhledem k s_0 $\frac{1}{2} \int\limits_0^{s_0} \varrho^2(s_0)\, ds = \frac{1}{2} k^2$ čili $\varrho^2(s_0) \,.\, s_0 = k^2$. Z toho plyne, že křivka h jest spirálou lituus, j. b. d.

Promítneme-li nadšroubovici v R_{2n+1} z bodu V její osy o na nadrovinu R_{2n} kolmou k této ose, dostaneme hyperbolickou spirálu, jež má asymptotický bod v průsečíku nadroviny s osou a jejíž asymptota má směr přímky, jež prochází středem promítání V, protíná nadšroubovnici a je s R_{2n} rovnoběžná.

Důkaz: Buď

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s,\quad x_{2i} = r_i \sin l_i s,\quad x_{2n+1} = C \,.\, s \tag{32}$$

($i = 1, \ldots, n$) p. v. uvedené nadšroubovice![4]) Přitom r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$, $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$ a souřadná osa X_{2n+1} jest osou nadšroubovice. Buď dále $(0, \ldots, 0, a)$ střed promítání V a $x_{2n+1} = d$ $(\neq a)$ nadrovina R_{2n} kolmá k ose nadšroubovice X_{2n+1}! Pak p. v. kužele, jenž z bodu V promítá nadšroubovici, je

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = a + \varrho(Cs - a)$$

($i = 1, \ldots, n$), kdež ϱ je parametr. Řez tohoto kužele s $x_{2n+1} = d$ jest

$$x_{2i-1} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = d \tag{33}$$

($i = 1, \ldots, n$), což je dle (11) hyperbolická spirála, mající zřejmě v bodě $(0, \ldots, 0, d)$ asymptotický bod. Použijeme-li na (33) transformaci otočení (2), v níž $L_i = l_i$, $\sigma = \frac{a}{C}$ a pak transformaci parametru $s = \omega + \frac{a}{C}$, dostaneme

$$X_{2i-1} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \cos l_i \omega, \quad X_{2i} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \sin l_i \omega, \quad X_{2n+1} = d$$

($i = 1, \ldots, n$). To se dá psát ve tvaru (*) $X_{2i-1} = R_i \frac{k}{S} \cos L_i S$, $X_{2i} = R_i \frac{k}{S} \sin L_i S$, $X_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$), při čemž platí $R_1^2 + \ldots + R_n^2 = 1$, $R_1^2 L_1^2 + \ldots + R_n^2 L_n^2 = 1$, když označíme

$$R_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}}, \quad L_i = \frac{l_i}{\sqrt{R_1^2 l_1^2 + \ldots + R_n^2 l_n^2}},$$

$$S = \sqrt{R_1^2 l_1^2 + \ldots + R_n^2 l_n^2} \,.\, \omega \text{ a } k \,.\, C = (d - a)\sqrt{r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2}.$$

Proto dle (12) má asymptota hyper. spirály (*) p. v. $x_{2i-1} = \lambda R_i$, $x_{2i} = R_i L_i$, $x_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$). Otočme dále dle (2) — kde $L_i = l_i$, $\sigma = \frac{a}{C}$ — přímku $x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i \frac{a}{C}$, $x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i \frac{a}{C}$, $x_{2n+1} = a$ ($i = 1, \ldots, n$), která spojuje střed promítání V s bodem $x_{2i-1} = r_i \cos l_i \frac{a}{C}$, $x_{2i} = r_i \sin l_i \frac{a}{C}$, $x_{2n+1} = a$ ($i = 1, \ldots, n$), ve kterém nadrovina $x_{2n+1} = a$ protíná nadšroubovici! Dostáváme $X_{2i-1} = \varrho r_i$, $X_{2i} = 0$, $X_{2n+1} = a$, což je přímka rovnoběžná s uvedenou asymptotou, j. b. d.

[4]) Viz (*D*).

Přímá plocha šroubová v R_{2n+1} jest proťata souosým rotačním nadkuželem ve dvou shodných Archimedových spirálách, souměrně položených dle přímky, jež je společnou osou plochy šroubové a nadkužele. Obě spirály mají společný pól ve vrcholu a společnou osu v ose nadkužele.

Poznámka: 1° Přímá plocha šroubová (π) jest tvořena přímkami, jež jdou body nadšroubovice a protínají kolmo její osu. Osa nadšroubovice jest osou šroubové plochy. 2° Rotační nadkužel dostaneme takto: Ve středu nadkoule, ležící v nadrovině R_{d-1} prostoru R_d, vztyčíme kolmici (osu) a na ní zvolíme bod V (vrchol). Rotační nadkužel je tvořen spojnicemi vrcholu V s body nadkoule. Každá nadrovina, kolmá k jeho ose, protíná jej v nadkouli, mající střed v průsečíku této nadroviny s osou.

Důkaz: P. v. plochy (π) s osou v X_{2n+1} můžeme psát dle (32) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \lambda r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \lambda r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = Cs + c \tag{34}$$

($i = 1, \ldots, n$), kde λ, s jsou parametry, $r_i \neq 0$, $l_i \neq 0$, $C \neq 0$, c jsou konstanty a kde platí $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$. Dále rovnice rotačního nadkužele s osou v X_{2n+1} a vrcholem v počátku souřadnic jest

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^2 = 0, \tag{35}$$

kde k jest konstanta $\neq 0$. Je patrné, že tento nadkužel protíná plochu (π) v křivkách

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k\,(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \cos l_i s, \qquad x_{2i} = \pm \frac{k\,(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$ ($i = 1, \ldots, n$), jež dle (11) jsou Archimedovy spirály, mající zřejmě uvedené vlastnosti.

Každou mocninnou spirálu v R_{2n} můžeme považovati za kolmý průmět křivky, v níž se protíná přímá plocha šroubová s vhodnou souosou rotační nadplochou v R_{2n+1}, na nadrovinu kolmou ke společné ose.

Protneme-li totiž rotační nadplochu v R_{2n+1} $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^{2m} = 0$, ($k$, m jsou konstanty $\neq 0$) — jejíž osou je souřadná osa X_{2n+1} — přímou plochou šroubovou (34), dostaneme dvě shodné křivky

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k\,(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \cos l_i s, \qquad x_{2i} = \pm \frac{k\,(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$ ($i = 1, \ldots, n$). Jejich ortogonální průmět na nadrovinu $x_{2n+1} = 0$ jsou dle (11) dvě shodné mocninné spirály stupně

m, mající společný pól v průsečíku osy nadplochy s nadrovinou $x_{2n+1} = 0$.

Dodatek.

Z jiných křivek, které souvisí s projednávanými spirálami, budiž zde uvedena *kochleoida*. Je to křivka v R_{2n}, jejíž p. v. je možno uvésti do tvaru

$$x_{2i-1} = \frac{R_i}{s}(1 - \cos l_i s), \quad x_{2i} = \frac{R_i}{s}\sin l_i s \tag{36}$$

$(i = 1, \ldots, n)$; při tom s je parametr, R_i, l_i konstanty $\neq 0$ a $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$. Z tohoto p. v. je patrné, že kochleoida (35) je souměrná dle prostoru $(X_2, X_4, \ldots, X_{2n})$ a má v počátku souřadnic asymptotický bod.

Kochleoida má čtyři pozoruhodné vlastnosti:

1° *Promítneme-li nadšroubovici z jejího bodu A na nadrovinu kolmou k její ose, dostaneme kochleoidu, mající v kolmém průmětu bodu A asymptotický bod.*

Důkaz. Nadšroubovice měj p. v. (32) a střed promítání ať odpovídá parametru $s = s_0$! Přímka, spojující A s libovolným bodem nadšroubovice protíná nadrovinu $x_{2n+1} = d$, kolmou k ose nadšroubovice, v bodě

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0 + r_i \frac{d - Cs_0}{C(s_0 - s)}(\cos l_i s_0 - \cos l_i s), \; x_{2i} = r_i \sin l_i s_0 +$$

$$+ \frac{d - Cs_0}{C(s_0 - s)}(\sin l_i s_0 - \sin l_i s), \quad x_{2n+1} = d \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Použijeme-li transformace

$X_{2i-1} = x_{2i-1} \cos l_i s_0 + x_{2i} \sin l_i s_0 - r_i$, $\quad X_{2i} = -x_{2i-1} \sin l_i s_0 + x_{2i} \cos l_i s_0$, $X_{2n+1} = x_{2n+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ a označíme-li $s_0 - s = \sigma$, dostaneme

$$X_{2i-1} = r_i \frac{d - Cs_0}{C \cdot \sigma}(1 - \cos l_i \sigma), \; X_{2i} = r_i \frac{d - Cs_0}{C \cdot \sigma} \sin l_i \sigma, \; X_{2n+1} = d$$

$(i = 1, \ldots, n)$, což je p. v. kochleoidy. Podrobíme-li dále kolmý průmět bodu A $\; x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0$, $\; x_{2i} = r_i \sin l_i s_0$, $\; x_{2n+1} = d$ $(i = 1, \ldots, n)$ uvedené transformaci, dostaneme $X_{2i-1} = X_{2i} = 0$, $X_{2n+1} = d$ $(i = 1, \ldots, n)$, tedy asymptotický bod této kochleoidy.

2° ***Buď $\widehat{AB}$ oblouk dané nadkružnice $\varkappa$ a T jeho těžiště. Je-li bod A pevný a B se pohybuje na $\varkappa$, pak T opisuje kochleoidu, mající ve středu nadkružnice asymptotický bod. Přitom všechny kochleoidy, odpovídající různým volbám bodu A na $\varkappa$, jsou až na polohu shodné.***

Důkaz: *Nadkružnice* $\varkappa$ *v* R_{2n} *měj p. v.* $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \sin l_i s$ $(i = 1, \dots, n)$ — kdež s je oblouk; r_i, l_i konstanty $\neq 0$; $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$! Bodům A, B ať odpovídají po řadě parametry s_0, s! Pak pro souřadnice ξ_j $(j = 1, 2, \dots, 2n)$ těžiště T platí $\xi_j \,.\, \int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_{s_0}^{s} x_j ds$, ž čehož dostáváme $\xi_{2i-1} = \dfrac{r_i (\sin l_i s - \sin l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$, $\xi_{2i} = -\dfrac{r_i (\cos l_i s - \cos l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$. Použijeme-li transformace $\xi'_{2i-1} = -\xi_{2i-1} \sin l_i s_0 + \xi_{2i} \cos l_i s_0$, $\xi'_{2i} = \xi_{2i-1} \cos l_i s_0 + \xi_{2i} \sin l_i s_0$ $(i = 1, \dots, n)$ a označíme-li $\sigma = s - s_0$, dostaneme $\xi'_{2i-1} = \dfrac{r_i}{l_i \,.\, \sigma} \,.\, (1 - \cos l_i \sigma)$, $\xi'_{2i} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$ $(i = 1, \dots, n)$, což je p. v. kochleoidy.

Poznámka: *a*) Podobným způsobem bychom zjistili, že těžiště T oblouků $\widehat{AB}$ nadšroubovice (32) leží na křivce $\xi'_{2i-1} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma}(1 - \cos l_i \sigma)$, $\xi_{2i} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$, $\xi'_{2n+1} = \dfrac{C}{2} \sigma$ $(i = 1, \dots, n)$.

b) Z výpočtu je patrné, že *geometrické místo těžišť* T *oblouků* $\widehat{AB}$ *na téže nadkružnici* (resp. *nadšroubovici*) *o konstantní délce* $S = s - s_0$ *leží na nadkružnici* (resp. *nadšroubovici*) $\xi_{2i-1} = \dfrac{2r_i}{l_i S} \sin \dfrac{l_i S}{2} \,.\, \cos l_i \dfrac{s + s_0}{2}$, $\xi_{2i} = \dfrac{2r_i}{l_i S} \sin \dfrac{l_i S}{2} \sin l_i \dfrac{s + s_0}{2}$ (resp. $\xi_{2n+1} = \dfrac{C}{2} \,.\, (s + s_0)$) $(i = 1, \dots, n)$, mající s původní nadkružnicí (resp. nadšroubovicí) společný střed (osu) a všechny axiální prostory.

3° *Bodem* A *hyperbolické spirály* (10) v R_{2n} *nebo* R_{2n+1} *veďme rovnoběžku s její asymptotou* (12) *a nanesme na ni od bodu* A *úsečku* $\overline{AB}$ *rovnou vzdálenosti bodu* A *od pólu* O, *a to ve směru opačném onomu, ve kterém by se bod* A *blížil na hyper. spirále do nekonečna! Pohybuje-li se nyní* A *na hyperbolické spirále, opisuje* B *kochleoidu, mající v pólu spirály svůj asymptotický bod.*

Důkaz: Je patrné, že bod B má souřadnice

$$x_{2i-1} = r_i \frac{k}{s} \cos l_i s - r_i \frac{k}{s}, \quad x_{2i} = r_i \frac{k}{s} \sin l_i s, \quad \text{resp.} \quad x_{2n+1} = C\frac{k}{s} - C\frac{k}{s} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

4° Systém nadkružnic v R_{2n} $x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s$ (ϱ parametr; $i = 1, \dots, n$), který vytíná z rotačního dvojkužele (K_{2n}) o p. v. (3) systém nadkoulí o společném středu v jeho vrcholu, pošiňme dle vztahů $X_{2i-1} = x_{2i-1} - \varrho r_i$, $X_{2i} = x_{2i}$ $(i = 1, \ldots, n)$! Tím dostaneme systém nadkružnic $x_{2i-1} = \varrho r_i (\cos l_i s - 1)$, $x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s$ (ϱ parametr; $i = 1, \ldots, n$), jež procházejí počátkem souřadnic O a mají v tomto bodě společný tečný a normální prostor.[5]) Pak platí, že *koncové body B oblouků $\widehat{OB}$ nadkružnic tohoto systému, měřených od společného bodu O a majících konstantní délku d, leží na kochleoidě, mající v O asymptotický bod.*

Důkaz: Je-li bod B určen parametrem s_0, jest $\widehat{OB} = \int_0^{s_0} \varrho \, ds = \varrho s_0$. Dle předpokladu $\varrho s_0 = d$, takže B má souřadnice $x_{2i-1} = \frac{d}{s_0} r_i (\cos l_i s_0 - 1)$, $x_{2i} = \frac{d}{s_0} r_i \sin l_i s_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, což při proměnlivém s_0 je p. v. kochleoidy s asymptotickým bodem v O.

*

Les spirales d'ordre m dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions.

Extrait de l'article précédent.

Dans le présent article, j'étudie certaines courbes de l'espace euclidien R_p à p dimensions ($p \geqq 2$) qui sont exprimées dans le système de coordonnées rectangulaires par les équations (8) et que nous appelons les *spirales d'ordre m.* Ces courbes sont bien connues dans le plan R_2 ou elles peuvent être exprimées dans le système polaire ϱ, ω par l'équation $\varrho = k \,.\, \omega^m$ (k, m étant des constantes $\neq 0$). Je démontre que la plupart des propriétés de ces spirales planes sont conservées dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions. Aux courbes que j' ai ainsi obtenu appartient la *spirale hyperbolique* (10) et celle d'*Archimède* (9), qui jouent un rôle important parmi elles.

Dans le chapître I, je définis le *bicône de rotation* avec les équations paramétriques (3) dans R_{2n}, resp. (4) dans R_{2n+1}, sur laquel sont situées toutes les spirales de différents ordres. Cette surface est engendrée par une droite qui fait un mouvement de rotation donné par les équations (1), resp. (2) et qui passe par le centre, resp. coupe l'axe de rotation. Dans les chapîtres II, III, IV, je présente un nombre de propriétés de ces spirales, par ex:

a) Sur le bicône (3), resp. (4) la spirale d'Archimède (hyperbolique) jouit de la propriété caractéristique d'avoir la subnormale (la subtangente) polaire[6]) constante.

---

[5]) Viz (*C*), (*D*).

[6]) Soit P un point d'une spirale d'ordre m et O son pôle (c'est-à-dire le sommet du bicône). Soit t la tangente de P et T le point d'intersection de t

b) Si l'on projette une hyperhélice dans R_{2n+1} d'un point de son axe sur l'hyperplan orthogonal à cet axe, on obtient une spirale hyperbolique.

c) Les points finaux des tangentes polaires T (des normales polaires N) d'une spirale d'ordre m se trouvent sur une spirale d'ordre $m + 1$ (d'ordre $m - 1$). Alors les points finaux des tangentes d'une spirale hyperbolique et ceux des normales d'une spirale d'Archimède sont situés sur une hypercicoférence ayant son centre dans le pôle de ces spirales. Etc.

Dans l'appendice sont indiquées quelques propriétés intéressantes de la *cochléoïde* donnée dans R_{2n} par les équations (36). P. ex.

a) La cochléoïde est la projection d'une hyperhélice dans R_{2n+1} d'un de ses points sur l'hyperplan orthogonal à son axe.

b) Elle est le lieu des centres de gravité des arcs $\widehat{AB}$ d'une hypercirconférence, le point A étant fixe et le point B étant mobile sur l'hypercirconférence.

---

avec l'hyperplan passant par O et orthogonal à la droite $\overline{PO}$. Soit N le point d'intersection de $\overline{TO}$ avec l'hyperplan passant par P et orthogonal à t. Alors les longueurs $\overline{PT}$, $\overline{PN}$, $\overline{OT}$, $\overline{ON}$ sont la tangente, la normale, la subtangente et la subnormale polaire.