Vladimír Ryšavý

Úvahy o zkráceném počítání

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 4, D50--D54

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121537`

Tudíž

$$x = \ldots cm$$

3. *Kontrola měření.*

Závěsem najde se poloha roviny jdoucí těžištěm kolmo k ose souměrnosti tyče. Nalezeno

$$x' = \ldots cm$$

4. *Chyba měření.*

$$Ch = \frac{100\,(x - x')}{x'}\,\% = \ldots\,\%$$

5. *Kritika měření.*

....
....
....

V.............. dne...............19..

Úlohu vypracoval:

....

Dr. VLADIMÍR RYŠAVÝ:

Úvahy o zkráceném počítání.

V VI. ročníku »Rozhledů« (sr. 115 a násl.) jsem dovodil, že dosavadní způsob některých zkrácených operací není korektní a naznačil jsem některá zlepšení i ve způsobu psaní. Za rok vyšel v VII. ročníku (str. 66—75) článek prof. dra Václava Hrušky o témže předmětě, týkající se jen zkráceného počítání s čísly úplnými. Bylo v něm dokázáno, že braní oprav během výpočtu je zbytečné, změní-li se poněkud dosavadní způsob počítání. Kromě toho výsledky mají vždy nepřesnost menší než jedna poslední ponechaná jednotka. — V tomto článku chci naznačiti, jak by se mělo zkráceně počítati vzhledem k oněm předešlým úvahám, rozšířeným i na čísla neúplná. Přitom jsme nuceni žádati, aby se dosáhlo úspory počtů, možné přesnosti a jednoduchých pravidel.

1. *Sečítání čísel úplných s přesností danou.**) Máme-li sečísti méně než 10 sčítanců s chybou $< 10^n$, sečteme řád $(n-1)$-ní a po-

*) Fassbinder: Théorie et pratique des approximations numériques, str. 59.

slední cifru ve výsledku vynecháme. Tak obdržíme dolní aproximaci s chybou $< 10 \,.\, 10^{n-1} = 10^n$.

2. *Sčítání čísel neúplných s přesností dosažitelnou.* Nejnižší řád známý ve všech sčítancích budiž n-tý. Zaokrouhlíme na něj všechny sčítance ($ch \leq \frac{1}{2}\, 10^n$), sečteme a poslední cifru oddělíme. Chyba výsledku $\leq \frac{1}{2}\, 10^{n+1}$ čili $<$ poslední zachovaná jednotka.

3. *Odečítání. U čísel úplných.* Vynecháme řády nižší než n-tý a odečteme. Chyba $< 10^n$. Při odečítání neúplných zaokrouhlíme obě čísla na týž nejnižší řád a odečteme. Chyba jest opět menší než poslední jednotka.

4. *Zkrácené násobení čísel úplných.* Jednotku násobitelovu podepíšeme pod řád o 2 nižší, než na který chceme počítati. Při násobení nebereme oprav. Ve výsledku vynecháme poslední 2 číslice. Za násobitele zvolíme číslo o menším počtu číslic.

Na příklad:

$$37{\cdot}695 \times 0{\cdot}468 \qquad \text{(na desetiny)}$$

$$\begin{array}{r}
37{\cdot}\overset{\wedge}{6}95 \\
8\,640 \\
\hline
15\,076 \\
2\,256 \\
296 \\
\hline
17{\cdot}6\underline{2}8 + \Theta \,.\, 0{\cdot}1
\end{array} \qquad 0 < \Theta < 1$$

Vzniklá chyba jest v každém řádku $< c \,.\, 10^{n-2}$, kde c jest číslice násobitelova, kterou řádek vznikl. Dohromady $Ch < s \,.\, 10^{n-2}$, kdež s značí součet oněch cifer násobitelových, kterými skutečně bylo násobeno. $s \leq 90$ a $Ch < 10^n$. Celková chyba jest tedy menší než poslední zachovaná jednotka.

Tento způsob je zdánlivě složitější než u nás obvyklý, že se násobí jen o 1 řád níže. Řád (n—2)-hý se totiž při dosavadním způsobu také násobil, avšak přistupoval další úkon — zaokrouhlení a přičtení k řádu (n — 1). Nový způsob jest tedy kratší o tolik zaokrouhlení, kolika ciframi se násobí a chyba jest stejná. (R. VI. str. 115.) Kromě toho smí býti násobitel 10-ciferný, kdežto při dřívějším způsobu jen 7-ciferný. (Viz 2. c.)

5. *Zkrácené násobení čísel neúplných.* Činitelé jsou obyčejně čísla vzniklá měřením nebo zkráceným počítáním s absolutní nepřesností $< a$. Bez újmy všeobecnosti předpokládáme, že končí jednotkami. Kdybychom násobili zkráceně, vznikla by chyba $ch_1 < a \,.\, 10^n$, kde n jest počet číslic činitele přesnějšího. Proto násobíme zkráceně na řád n-tý. Podle předchozího odstavce podepíšeme jednotky (obecně nejnižší cifru násobitelovu) pod druhou násobencovu od předu [řád (n — 2)-hý] a násobíme bez braní obrav. Činitelé mají obyčejně

nejvýše 4 cifry < 9, takže vznikne $ch_2 < s\,.\,10^{n-2} < 36\,.\,10^{n-2} < \frac{1}{2}\,10^n$. Součin bude míti nepřesnost $Ch < (\alpha + 0{\cdot}5)\,10^n$.

Násobíme-li činitele o různém počtu číslic, jest $ch < 10^n$; při stejném počtu číslic jest $ch_1 < 2\,.\,10^n$ a $Ch < 2{\cdot}5\,.\,10^n$. Jsou-li oba činitelé výsledkem zkráceného násobení, $ch_1 < 1{\cdot}5\,.\,2\,.\,10^n$ a $Ch < < 3{\cdot}5\,.\,10^n$. Celkem tedy vždy $Ch < 3{\cdot}5\,.\,10^n$.

Budeme tudíž násobiti podle pravidla: Za násobitele zvolíme číslo o menším součtu cifer. Nejnižší cifru napíšeme pod druhou násobencovu, násobíme zkráceně bez oprav a poslední dvě místa výsledku oddělíme. Chyba součinu < 3 poslední jednotky.

Vypočísti objem krychle o hraně $a = 879\ldots.$

```
 ^               ^
 879.            ..879.
  978            000277
 ------          ------
 7032.            6153.
  6153             6153
   783              174
 ------          ---------
 772|560         678570000
```

$$V = 678.10^6 \pm 3.10^6$$

Kdyby přesně $a = 879{\cdot}4$, bylo by $V = 680{\cdot}079\ldots\,.\,10^6$.

6. *Zkrácené dělení čísel úplných.* Vzhledem k vývodům prof. dra Hrušky (R. VII. 68 a násl.), které zobecňují důkaz Fassbinderův (Théorie et pratique des approximations, str. 63), měli bychom tento postup: Aby podíl měl nepřesnost $< 10^n$, podepíšeme dělitele pod dělence co možno vlevo, aby se dal odečísti. (R. VI. 117.) Jednotky dělitelovy stojí pod řádem m dělence, takže nejvyšší číslice podílu bude řádu m-tého a potřebujeme znáti $K = m - n + 1$ číslic podílu. V děliteli oddělíme od předu skupinu číslic β, aby tvořila číslo $\leqq k$ a připojíme k ní dalších k číslic dělitelových. Tím obdržíme prvého zkráceného dělitele a nad ním napsaného zkráceného dělence. Pak dělíme zkráceně obvyklým způsobem bez braní oprav.

Pro školu se dá toto pravidlo zjednodušiti tak, že se v děliteli vezme vždy $k+2$ číslic. Neboť ona skupina β má nejvýše dvě cifry. Dělme na 3 cifry 3504 : 0·2148.

```
  ^
   350 4 0 |
 : 0·214|8|0 | = 16300 ± Θ . 100
 ----------
   135 6 0 |
     6 7 2 |
```

Úvahy o řádech, jako mají některé učebnice, odpadají.

7. *Zkrácené dělení čísel neúplných.* Úvaha povede k závěru, že dvě nebo tří číslice výsledku nestojí za námahu, spojenou s naučením pravidla, které by musilo rozeznávati více případů. Před-

pokládejme číslo končící jednotkami s nepřesností 1 poslední jednotky. Bez zkráceného dělení bude chyba

$$ch_1 = \frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} < \frac{a+b}{b^2}.$$

Budiž m počet cifer čísla přesnějšího, d počet cifer dělitelových. Pak tedy

$$ch_1 < 10^m : 10^{2(d-1)} = 10^{m+2-2d}.$$

a) Při $m > d$ jest prvá cifra výsledku řádu $m - d$, resp. $m - d - 1$, podle toho, zdali prvá cifra dělence je větší nebo menší než v děliteli; jest tedy možno obdržeti $m - d - (m + 2 - 2d) = d - 2$ resp. $d - 3$ další místa. Celkem tedy by měl výsledek $d - 1$ nebo $d - 2$ správné cifry.

b) Při $m = d$ $\qquad ch_1 < 10^{2-d}.$

Má-li dělenec $d - x$ číslic, bude řád prvé ve výsledku $(d - x) - d = -x$, resp. $(d - x - 1) - d = -(x + 1)$, takže do řádu $2 - d$ schází ještě $-x - (2 - d) = d - (x + 2)$, resp. $-(x + 1) - (2 - d) = d - (x + 3)$ číslic. Podíl má tedy nejvýš $(d - x) - 1$ resp. $(d - x) - 2$ správných číslic, t. j. o 1 nebo o 2 méně než dělenec. Kdybychom nyní chtěli děliti zkráceně, musili bychom v děliteli vzíti v případě a) $d + 1$ nebo d číslic, v případě b) $(d - x) - 1 + 2 = (d - x) + 1$ nebo $(d - x) - 2 + 2 = d - x$. Avšak $x \geq 1$, tedy ve druhém případě nejvýš d číslic. Pravidlo by bylo dosti složité.

Proto jest lépe čísla neúplná děliti nezkráceně takto: *dělitele podepíšeme pod dělence co možno vlevo, aby se dal odečísti. Jednotky dělitelovy stojí pod řádem dělence, který bude řádem nejvyšší cifry podílu. Za poslední cifrou obou čísel vedeme svislou čáru a dělíme nezkráceně, až obdržíme o 1 nebo o 2 cifry méně, než jich má číslo méně přesné, podle toho, je-li prvá cifra dělence > nebo < prvá dělitelova.* Ve skutečnosti se utváří výpočet velmi jednoduše, jak patrno z příkladu

$$\begin{array}{r|l} 99\hat{9}5 & \ldots \\ :101\,. & \ldots \\ \hline 905 & 0 \end{array} \doteq 99\cdot\ldots \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \hat{\ }0{\cdot}352 & \\ :0{\cdot}0\,2378 & \\ \hline 1142 & 0 \end{array} = 15\cdot\ldots$$

Jest patrno, že se skutečně téměř nepočítá, takže nemá smyslu vymýšleti pravidlo pro zkrácené dělení bez braní oprav. Uvedené pravidlo platí i pro dělení čísla úplného neúplným nebo naopak, vedeme-li svislou čáru pro jistotu o 2 místa dále za poslední cifrou čísla neúplného. Při násobení čísla úplného neúplným zvolíme za násobitele číslo neúplné. Pak násobíme jako v případě obou čísel neúplných.

8. **Zkrácené odmocňování 2ma a 3mi.** Při dosavadním způsobu se od jistého okamžiku dělí s braním oprav. Dělíme-li bez oprav, nutno při druhé odmocnině k poslednímu zbytku připsati další skupinu a k děliteli připsati jednu nulu. Zkráceným dělením se obdrží m dalších cifer, bylo jich známo již $m+1$. Při odmocňování třemi lze obdržeti zkráceným dělením $m-2$ cifer, je-li jich známo již m. Proto v posledním děliteli vezmeme $(m-2)+2m$ míst a podle toho upravíme i poslední zbytek rozšířený o 1 číslici. Vypočtěme $\sqrt[3]{2}$ na 8 míst.

$$
\begin{array}{llr}
\sqrt[3]{2} & & = 1{\cdot}2599{,}210 \pm \Theta \, . \, 10^{-7} \\
10{,}00 & : \; 3 \, . \, 1^2 & \\
\;\;6 & \quad 3 \, . \, 2 & \\
\;\;12 & 3 \, . \, 1 \, . \, 2^2 & \\
\;\;\;\;8 & \quad\;\; 2^3 & \\
\hline
2720{,}00 & : \; 3 \, . \, 12^2 & \\
2160 & \quad\quad 432 \, . \, 5 & \\
\;\;900 & \quad 3 \, . \, 12 \, . \, 5^2 & \\
\;\;\;125 & \quad\quad\; 5^3 & \\
\hline
\;46875 & & \\
\quad\vdots & & \\
\;1002422{,}201_0 : 476204403 & & \\
\;\;4762{,}2{,}0 & & \\
\hline
\;\;\;5002 & & \\
\;\;\;\;240 & & \\
\end{array}
$$

Odmocňování čísel neúplných provádějme nezkráceně na počet míst dosažitelný vzhledem k nepřesnosti odmocněnce.

DROBNOSTI.

Periodické pohyby v různých silových polích. Jednoduché a při tom pěkné pokusy demonstrační možno provésti s ocelovou strunou několika metrů délky, 0·3 *mm* v průměru — v železářských závodech lze dostati cívky po ¼ *kg* —, jejíž jeden konec upevníme na háku ve stropě posluchárny nebo schodiště, případně větracího tunelu, na druhém konci pak zavěsíme hmotu železnou nebo olověnou ve tvaru válce asi 10 *kg*. Aby se drát v místě upevnění neprodřel, je třeba provésti upevnění na koncích bez ostrých kliček.