Josef Šoler

Přehled

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 3, R59--R72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121515`

při jiné koncentraci. Látka se podobá roztokům některých jedů, které v určité koncentraci pozbývají otravné vlastnosti. U těžké vody se zdá, že se zmíněná vlastnost jeví periodicky s rostoucí koncentrací. Poněvadž se těchto zkušeností dá použíti v lékařství, je požadavek zlevnění při přípravě čisté vody velmi žádoucí.

PŘEHLED.

Jak geometrie vypadati nemá. 1. *Povrch koule* $P = \pi^2 r^2$. Důkaz: Rozdělme polovinu kulové plochy na n malých trojúhelníků. Jeden vrchol každého z nich je v pólu, druhé dva na rovníku; stranami jsou kvadranty hlavních kružnic a n-tina oblouku rovníku. Jestliže takový trojúhelník položíme na rovinu (!), dostaneme rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku $\frac{1}{n}\,2\pi r$ a výška k ní příslušná $\frac{1}{2}\pi r$. Je tedy obsah tohoto trojúhelníku $\frac{1}{n}\,2\pi r\,.\,\frac{1}{4}\pi r$ a tedy obsah poloviny kulové plochy $n\,.\,\frac{1}{2n}\,\pi^2 r^2 = \frac{1}{2}\pi^2 r^2$. Tedy $P = \pi^2 r^2$.

2. *Těžiště úsečky jest v jedné třetině její délky.* Důkaz: Těžiště rovnoramenného trojúhelníka jest v jedné třetině výšky příslušné k základně. Jeho poloha se nemění, mění-li se rozměr základny. Rovná-li se délka základny nule, trojúhelník přejde v úsečku; její těžiště podle hořejšího je v jedné třetině. Kde je chyba?

3. $\pi = 2$. Důkaz: Délka půlkružnice jest πr. Rozdělíme-li její průměr na několik dílů a sestrojíme-li nad nimi polokružnice tak, aby se vždy dvě sousední vně dotýkaly, jest společná délka těchto oblouků opět πr. Konvergují-li poloměry těchto kružnic k nule (!), vzrůstá jejich počet nad všechny meze (!), společná délka jednak podle hořejšího jest πr, jednak, poněvadž kružnice přešly v body, jest rovna délce průměru, t. j. $2r$. Z rovnice $2r = 2\pi r$ plyne, že $\pi = 2$.*)

F. Balada.

Poznámka k dělení čísel. V čís. 1, roč. 64, str. 19 Rozhledů je v článku p. *K. Lerla* uveden Crellův způsob dělení přičítáním dekadických doplňků. Tento způsob se výborně hodí k dělení čísel na sčítacím stroji. Odčítání na sčítacích strojích starších modelů dálo se přičítáním dekadického doplňku. Na př. bylo-li na šestimístném stroji odčísti od 005327 číslo 001635, přičetl se místo toho dekadický doplněk menšitele do 10^6, tedy 998365.

---

*) Uvedené příklady jsou vzaty z *Zeitschrift für math. Unterricht.*

Výsledek byl

$$\begin{array}{r} 005327 \\ +\ 998365 \\ \hline 1|003692. \end{array}$$

Zatržená jednotka na sedmém místě jest již mimo rozsah stroje šestimístného, na němž se tedy objeví pouze rozdíl

$$\begin{array}{r} 005327 \\ -\ 001635 \\ \hline 003692. \end{array}$$

Kdybychom však užili k odčítání dekadického doplňku pouze na 10^5, nezmizí ona jednička mimo rozsah stroje,

$$\begin{array}{r} 0\,05327 \\ +\ 0\,98365 \\ \hline 1|03692 \end{array}$$

objeví se na nejvyšším místě a při každém dalším odečtení 1635 zvětší se o 1 jednotku, jak ukazuje příklad:

$$\begin{array}{r} 0\,05327 \\ +\ 0\,98365 \\ \hline 1|03692 \\ +\ 0\,98365 \\ \hline 2|02067 \\ +\ 0\,98365 \\ \hline 3|00432. \end{array}$$

Číslice na nejvyšším místě nám tedy udá, kolikrát bylo 1635 odečteno od 5327 a následující číslo 00432 jest teprve výsledek tohoto opětovného odčítání.

V nejvyšším okénku se nám tedy objeví nejvyšší číslice podílu 5327 : 1635, jestliže odčítáme tolikrát, až zbytek 00432 na ostatních místech stojící bude menší než dělitel. Podle rovnic (2) článku p. *Lerla* dělíme tedy na př. 532 : 163 na sčítacím stroji 8místném takto:

dělenec	0 0524000	
doplněk dělitele do 10^7	+ 0 9837000	
	1|0361000	
	+ 0 9837000	
	2|0198000	
	+ 0 9837000	
	3|0035000	3 je nejvyš. číslice podí-
doplněk dělitele do 10^6	+ 0 0983700	lu, zbytek 35 < děl. 163
	31|018700	

	+ 00 983700	
	32,002400	2 je druhou číslicí podílu, zbytek 24 < děl. 163
doplněk dělitele do 10^5	+ 00 098370	
	321,00770	1 je další číslicí podílu
doplněk dělitele do 10^4	+ 000 09837	
	3211,0607	
	+ 000 09837	
	3212,0444	
	+ 0000 9837	
	3213,0281	
	+ 0000 9837	
	3214,0118	

Podíl tedy bude 3214, zbytek 118 atd.

Prakticky je důležitá tato poznámka: Dekadický doplněk musí míti aspoň jednu 9 na počátku (a ovšem před ní ještě prázdné místo pro nejvyšší číslici podílu). Kdyby totiž bylo děliti 2971 : 163, obdrželi bychom správně

```
  0 02971
+ 0 98370
  1,01341
+ 0 09837
 11,1178 atd.
```

Kdybychom byli užili dek. doplňku pouze na 10^4, tedy 8370, byl by výsledek nesprávný.

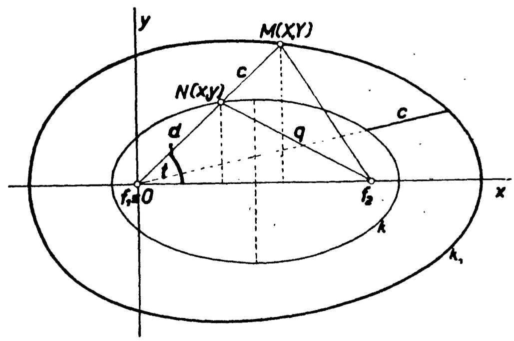
```
  0 02971
+ 0 08370
  01,1341
+ 00 0837
  012,178
```

zbytek 1178 by totiž nejvyšší číslicí zasahoval až do podílu na 4. místě.

Tohoto způsobu se dá s výhodou užíti k dělení na všech sčítacích strojích, v nichž výsledek se objevuje ihned v okénkách. Nedá se ho však užíti na sčítacích strojích, na nichž se výsledek pouze tiskne na proužek papíru po stlačení klávesy „total".

V obchodním styku jest z veškerých výpočtů asi 70% sčítání a odčítání, asi 27% násobení, které se dá také poměrně snadno provést na sčítacím stroji a asi 3% operací jest dělení, které tímto způsobem se provede velmi snadno. Myslím, že tato poznámka může býti velmi užitečná na obchodních školách, které disponují sčítacími stroji. *V. Hruška.*

O vajcovej krivce. Najužívanejším tvarom pri kanalizačných profiloch je tvar vajcovitý. Vajcovka tam sa konštruuje z oblúkov kružnic, pri čom zachovávaný určitý normami stanovený pomer šírky a výšky neboli t. zv. svetlost ⌽ na pr. 50/60, 70/105 atd. V následujicom konštruujeme pomocí riadiacej elipsy krivku, také tvaru vajcovitého určitým geometrickým zákonem a odvozujeme její rovnici. Obsah plochy omedzenej krivkou lze vypočíst také veľmi jednoduše a presne.



Její konštrukcia je v podstatě konštrukcia cisoidy*) elipsy pro pól v ohnisku a danou délku c. (Viz obr.) Abychom tedy konštruovali krivku, veďme ohniskom O libovolný paprsek, určeme jeho průsečík N s elipsou k a nanesme na něj od bodu N směrem $\overrightarrow{ON}$ délku c do bodu M. Geometrickým místem takto sestrojených bodů M je naše krivka.

Má-li elipsa excentricitu $e > b$ a volíme-li c blízké vedlejší poloose elipsy b, ale tak, aby $c < e$, dostaneme krivku tvaru vajcovitého.

Abychom odvodili její rovnici, položme pravouhle súradnicové osy do ohniska elipsy, ako počiatku. Pak môžeme písať ihned pro bod M vajcovky: $X = (d + c) \cos t$, $Y = (d + c) \sin t$. Zbývá určit d ako funkciu a, b, t, kde a, b sú poloosy elipsy. Vzdálenost d je průvodič bodu N elipsy a určí se buď z polárné rovnice elipsy $\varrho = \dfrac{p}{(1 - \varepsilon \cos t)} = \dfrac{b^2}{(a - e \cos t)} = d$, nebo prímo pomocí rovnice

*) Cisoidou k_1 dané křivky k pro daný pól O a délku c rozumíme geom. místo bodů M, pro které na paprscích $\overline{ON}$ (kde N je bod na k) platí: $\overline{NM} = c$. (Viz obr.)

$d + q = 2a$. (Viz obr.). Užijeme-li tohoto výsledku pro d, dostaneme hledané parametrické rovnice krivky:

$$X = \left(\frac{b^2}{a - e\cos t} + c\right)\cos t,$$

$$Y = \left(\frac{b^2}{a - e\cos t} + c\right)\sin t.$$

Rovnica krivky v polárných súradniciach bude mať tvar tedy

$$\varrho = \frac{b^2}{a - e\cos t} + c.$$

K výpočtu obsahu plochy omedzenej vajcovou krivkou používáme odvozené polární rovnice a píšeme:

$$O = \int_0^\pi \varrho^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{b^2}{a - e\cos t} + c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Po kratkom vypočtu dostaneme:

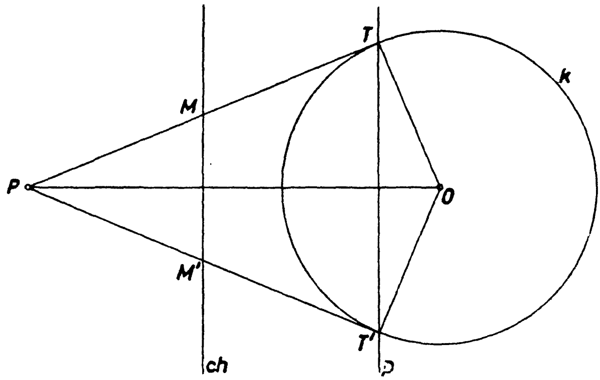
$$O = \pi ab + \pi c^2 + 2\pi cb.$$

Výsledný obsah je roven součtu obsahu plochy riadiacej elipsy, obsahu kruhu o polomeru c a obsahu elipsy o poloosách $2c$, b. *V. Karlický.*

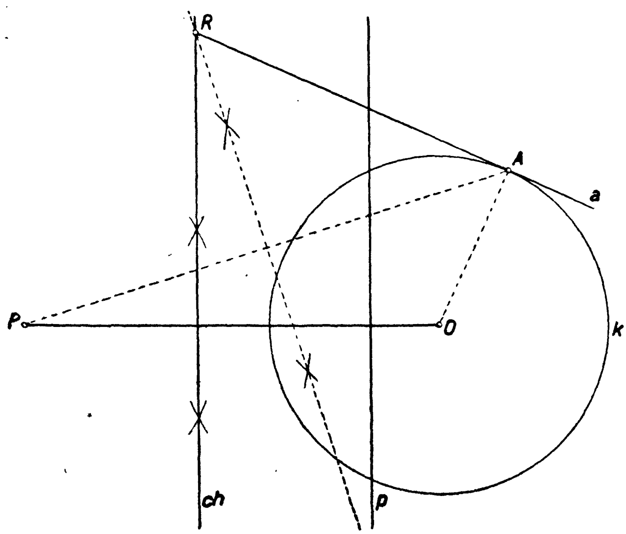
Několik konstrukcí kružnice. Chci vás seznámiti s několika konstrukcemi kružnice, které se zakládají na chordálních vlastnostech dvou nebo tří kružnic. Předpokládám tedy, že je vám známa věta o potenci bodu ke kružnici, dále vlastnosti chordály dvou kružnic a vlastnosti potenčního středu tří kružnic. Zopakujme je stručně: Mocnost bodu ke kružnici rovná se čtverci tečny nebo součinu úseků na kterékoliv sečně z toho bodu ke kružnici vedené. Chordála dvou kružnic je spojnice jejich průsečíků a stojí na střednou kolmo. Každý bod na chordále dvou kružnic má stejné mocnosti k oběma kružnicím, tečny z něho k oběma kružnicím vedené jsou stejné a jest středem kružnice, která obě kružnice ortogonálně protíná. Obdobné jsou vlastnosti chordálního středu ke třem kružnicím.

Mějme nyní kružnici k, pól P a poláru p (obr. 1). Jestliže body M, M' půlí délku tečen PT, PT' vedených z bodu P ke kružnici k a považujeme-li pól P za kružnici nulovou, tu chordála ch této kružnice nulové a kružnice dané jistě prochází body M, M', neboť potence jejich k oběma uvažovaným kružnicím jsou stejné. Pak je však zřejmé, že chordála nulové kružnice P a dané kružnice k půlí vzdálenost pólu od poláry jsouc při tom na střednou kolmá.

Jde nyní o řešení těchto úloh: Sestrojiti kružnici, je-li dán pól P, polára p a



Obr. 1.



Obr. 2.

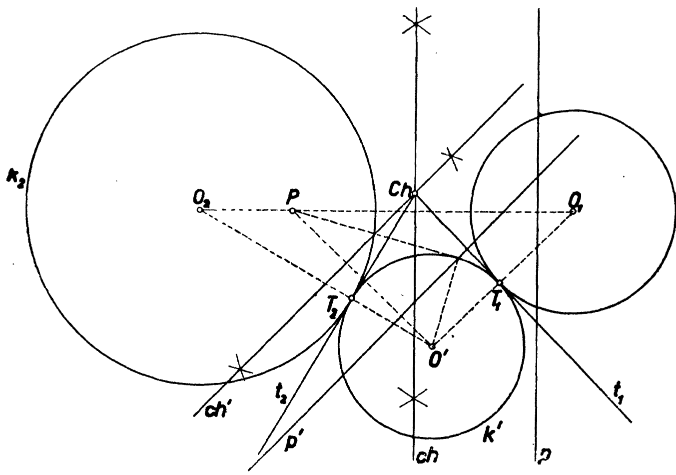
1. její bod A,
2. její tečna t,
3. její poloměr r,
4. přímka m, na které by vytínala tětivu délky a,
5. kružnice k', které by se dotýkala,
6. kružnice k', kterou by ortogonálně protínala,

7. kružnice k', kterou by diametrálně protínala (t. j. půlila její obvod),

8. kružnice k', která by ji diametrálně protínala,

9. bod M, z něhož by byla viděna pod $\sphericalangle \alpha$.

Vysvětlím pouze úlohu 1, 5 a 9. Ostatní ponechávám vám; některou z nich nalezli jste i v obvyklé soutěži tohoto časopisu.



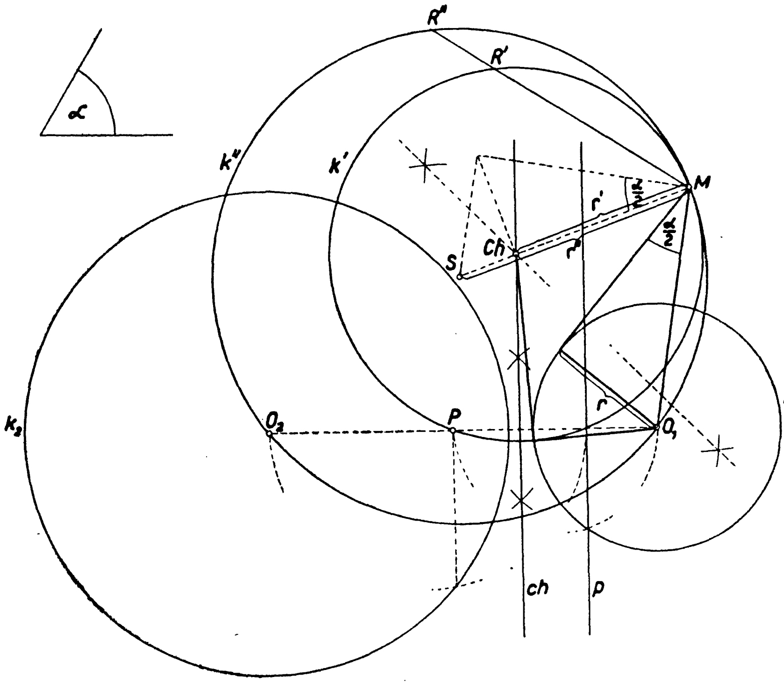
Obr. 3.

Úloha 1. (Obr. 2.) Tuto úlohu lze řešiti na základě harmonických vlastností poláry tím způsobem, že na spojnici PA vyhledáme si další bod hledané kružnice, ale lze ji také řešiti na základě vlastností chordálních takto: Nechť tečna a, která se dotýká hledané kružnice k v bodě A, protíná chordálu nulové kružnice P a hledané kružnice k v bodě R, o němž platí, že $RP = RA$. Najdeme tedy bod R jako průsečík chordály se symetrálou úsečky PA. Spojnice RA jest potom tečna hledané kružnice s dotyčným bodem A.

Úloha 5. (Obr. 3.) Uvažujme tři kružnice: nulovou kružnici P, hledanou kružnici k a danou kružnici k'. Chordála kružnic P, k budiž ch, chordála kružnic P, k' budiž ch'. Průsečíkem Ch obou chordál ch, ch' prochází i chordála kružnic k, k', která však jest jejich společnou tečnou. Sestrojíme-li tedy z potenčního středu Ch tečnu ke kružnici k', obdržíme tím zároveň tečnu hledané kružnice i s dotyčným bodem. Úloha jest dvojznačná; oba výsledky rozlišíme indexy 1, 2.

Úloha 9. (Obr. 4.) Uvažujme tři kružnice: nulovou kružnici P, nulovou kružnici M a hledanou kružnici k, jejíž střed budiž O

a poloměr r. Vyhledejme jejich potenční střed Ch. Kružnice k' o středu Ch procházející body P, M protíná ortogonálně hledanou kružnici k. Mocnost bodu O k nulové kružnici M budiž m, mocnost



Obr. 4.

bodu O ke kružnici k' budiž m'. Pak $m = \dfrac{r^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$, $m' = r^2$, odtud $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$. Avšak geom. místo bodů, jichž mocnosti k nulové kružnici M a ke kružnici k' mají daný poměr $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$, jest kružnice k'' homotetická s kružnicí k' při středu homotetie M a poměru homotetie $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$. (Důkaz: Je-li R'' nějaký bod tohoto geom. místa a protíná-li spojnice $R''M$ kružnici k'' v bodě R', tu $\dfrac{\overline{R''M}^2}{(\overline{R''M} \,.\, \overline{R''R'})} = \dfrac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$ a po úpravě $\overline{MR''} = \dfrac{\overline{MR'}}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$, což platí o každém bodu tohoto geom. místa.) Má-li kružnice k' poloměr r', tu poloměr kružnice k'' bude $r'' = \dfrac{r'}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$ a průsečík této kružnice k'' s kolmicí spuštěnou z pólu P na poláru p jest už střed hledané kružnice. Úloha jest dvojznačná; oba výsledky rozlišíme indexy 1, 2. Prof. *St. Liška.*

O Kopfově trisekci úhlu. Úloha: „*rozděliti úhel na tři stejné díly pravítkem a kružítkem*" je nemožná. Vyjádříme-li totiž první podmínkou rovnicí, dostaneme známou goniometrickou rovnici třetího stupně:

$$4 \sin^3 \tfrac{1}{3}\alpha - 3 \sin \tfrac{1}{3}\alpha + \sin \alpha = 0,$$

kterou nelze kvadratickými výkony, t. j. druhými mocninami a odmocninami, převésti na rovnici lineární a kvadratickou. (*Cardanův* vzorec pro kořeny této rovnice obsahuje třetí odmocniny!) Při úlohách, které se řeší pravítkem a kružítkem, jde vždy o stanovení průsečíků přímky s kružnicí, nebo o stanovení tečen z bodu ke kružnici, nebo konečně o stanovení průsečíků dvou kružnic; všechny tyto úlohy, vyjádřené rovnicemi, vedou na systém rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je kvadratická, druhá lineární. Obráceně jenom takové úlohy, které vedou k systému rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je kvadratická a druhá lineární, lze řešiti pravítkem a kružítkem. V úloze o trisekci úhlu tomu tak není.[1]) Je však řada přibližných konstrukcí této úlohy, které jsou provedeny pravítkem a kružítkem. V posledních letech vzbudila pozornost taková konstrukce od krejčovského mistra *Kopfa*,[2]) která je velmi jednoduchá a pro ostré úhly má největší chybu necelých patnáct úhlových vteřin. Pro úhly menší než 20° je chyba konstrukce menší než jedna úhlová vteřina. (Abychom si představili tento malý rozsah chyby, uvažme, že při poloměru jednoho metru má středový úhel 15″ na kružnici oblouk 7 setin milimetru, úhel 1″ oblouk necelých 5 tisícin milimetru, tedy délky, které i při tomto značném poloměru nelze okem odčítat.) *Kopfova* trisekce je tato:

Na libovolné přímce a (viz obr.) zvolme bod A a opišme kolem něho, jako středu libovolnou půlkružnici k. Tato seče přímku a v bodech B, C. Kolem bodu B opišme kružnici k_1 o stejném poloměru. Přímka a ji protne v bodech A, D, a kružnice k v bodě E. Na spojnici DE nanesme od bodu E do F délku zvoleného polo-

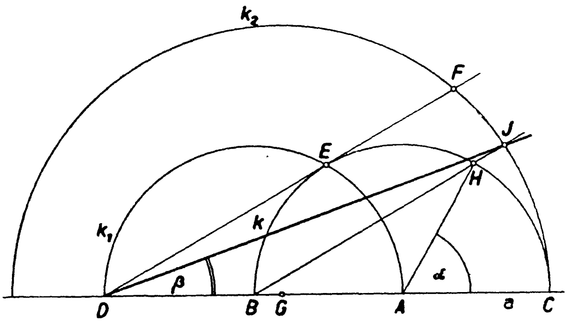
[1]) Přesný důkaz najde čtenář v každém kompendiu *Algebry*. Na př.: O. Perron: Die Grundlagen der Algebra I., II. díl (Walter de Gruyter).

[2]) Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf. Von O. Perron. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1933, str. 439.

měru r kružnice k. Tedy $\overline{EF} = r$. Sestrojíme konečně kružnici k_2 o středu na přímce a, aby procházela body C a F; potom dostaneme třetinu úhlu α takto: Naneseme úhel α při vrcholu A : $\alpha = \sphericalangle CAH$. Průsečík H druhého ramene s kružnicí k spojme s bodem B a určeme průsečík J této spojnice BH s kružnicí k_2. Potom úhel $JDC = \beta$ je přibližná třetina úhlu α.

Abychom určili chybu konstrukce, t. j. rozdíl $\delta = \frac{1}{3}\alpha - \beta$, hledejme vztah mezi úhlem α a β. Položme poloměr r kružnice k rovný jedné. Potom podle sinové věty v trojúhelníku DBJ platí:

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \beta)}{\sin\beta} = \frac{1}{\overline{BJ}}; \tag{1}$$



pro hledaný vztah je třeba sem dosaditi za $\frac{1}{\overline{BJ}}$.

$\overline{BJ}$ určíme kosinovou větou z trojúhelníka BGJ. Pro něj platí: $\overline{GJ} = r_2$ (poloměr k_2) $\overline{BG} = \overline{CD} - r_2 = 2 - r_2$, $\sphericalangle JBC = \frac{1}{2}\alpha$. Poloměr r_2 vypočteme z trojúhelníka BGF rovněž větou kosinovou, neboť

$$\sphericalangle FDG = 30^0,\ \overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = \sqrt{3} + 1,\ \overline{GF} = r_2,$$
$$\overline{DG} = 3 - r_2.$$

Dostaneme

$$r_2^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (3 - r_2)^2 - (\sqrt{3} + 1)(3 - r_2)\sqrt{3},$$

takže

$$r_2 = \tfrac{1}{6}(9 + \sqrt{3}). \tag{2}$$

Potom

$$\overline{GJ}^2 = \overline{BJ}^2 + \overline{BG}^2 - 2\overline{BJ}\,.\,\overline{BG}\cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

neboli

$$\overline{BJ}^2 - 2(2 - r_2)\overline{BJ}\cos\tfrac{1}{2}\alpha - 4(r_2 - 1) = 0.$$

Poněvadž $\overline{BJ}$ musí býti kladné, dostaneme:

$$\overline{BJ} = (2 - r_2)\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(2 - r_2)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4(r_2 - 1)}. \tag{3}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (1), vypočteme

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg} \beta - \cos \tfrac{1}{2}\alpha =$$

$$\frac{\sqrt{r_2^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha + 4\,(r_2 - 1) \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} - (2 - r_2) \cos \frac{1}{2}\alpha}{4\,(r_2 - 1)}$$

a po dosazení za r_2 z rovnice (2) dostaneme

$$\operatorname{cotg} \beta = \tfrac{1}{4}(2 + \sqrt{3}) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\sqrt{(19 - 8\sqrt{3}) \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + 12 - 4\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Abychom konečně určili výraz pro chybu $\delta = \frac{1}{3}\alpha - \beta$ počítejme

$$\operatorname{cotg} \delta = \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{3}\alpha - \beta) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{3}\alpha + \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{3}\alpha}{\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \frac{1}{3}\alpha}. \tag{5}$$

Položíme-li $\operatorname{cotg} \frac{1}{6}\alpha = x$, bude

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{3}\alpha = \frac{1 - x^2}{2x}, \quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1 - 3x^2}{3x - x^3}.$$

Potom vypočteme $\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \frac{1}{3}\alpha$ z rovnice (4). Dostaneme

$$\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{3}\alpha = \frac{-4 + \sqrt{3} - (3\sqrt{3} - 2)\, x^2 - 2x^4 + \sqrt{\mathrm{P}(x)}}{4x\,(3 - x^2)},$$

kde

$$\mathrm{P}(x) = 19 - 8\sqrt{3} + (12\sqrt{3} - 6)\, x^2 + (99 - 48\sqrt{3})\, x^4 + \\ + (12 - 4\sqrt{3})\, x^6.$$

Potom po dosazení do (5) dostaneme

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{1 - x^2}{2x} + \frac{(3 - x^2)\,[\sqrt{\mathrm{P}(x)} + 4 - \sqrt{3} + (3\sqrt{3} - 2)\, x^2 + 2x^4]}{4x^3\,(7 - 4\sqrt{3} - x^2)}$$

nebo

$$\operatorname{tg} \delta =$$

$$= \frac{4x^3\,(7 - 4\sqrt{3} - x^2)}{(3 - x^2)\sqrt{\mathrm{P}(x)} + 12 - 3\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3})\, x^2 + (5\sqrt{3} - 8)\, x^4}. \tag{6}$$

Je-li $\alpha = 90^0$, je konstrukce správnou, jak se lze přesvědčiti výpočtem chyby δ ($\frac{1}{6}\alpha = 15^0$, $x = 2 + \sqrt{3}$), nebo jak ihned plyne z konstrukce.

Pro úhel $\alpha = 0$ je $x = 0$ a také $\delta = 0$.

Abychom odhadli chybu, nahraďme ve výrazu pro $\operatorname{tg} \delta$ jmenovatel vhodným číslem menším; tím dostaneme na pravé straně rovnice (6) číslo větší než je chyba, ale které jednoduše vypočteme. Tedy: Jmenovatel pravé strany rovnice (6) je větší než

$$(3 - x^2)\sqrt{19 - 8\sqrt{3} + 12 - 3\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3})\,x^2} =$$
$$= 24 - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3x^2} > 24 - 6\sqrt{3},$$

neboť $x^2 > 0$. Je tedy

$$\operatorname{tg} \delta < \frac{4x^3\,(7 - 4\sqrt{3} - x^2)}{24 - 6\sqrt{3}}. \tag{7}$$

Maximum funkce x na pravé straně této nerovnosti dává

$$x_{\max} = \sqrt{\tfrac{3}{5}\,(7 - 4\sqrt{3})} = \tfrac{1}{5}(2\sqrt{3} - 3)\sqrt{5}.$$

Rovnice (7) po dosazení za $x_{\max}$ dává

$$\delta < 15,57''.$$

Maximální chyba leží v okolí úhlu 70°, jak vyplývá z hodnoty $x_{\max} = \operatorname{cotg} \frac{1}{6}\alpha$.

K numerickému výpočtu chyby δ se hodí nejlépe rovnice (4).

Sedmimístné tabulky poskytnou nám hodnoty:

α	0°	12°	24°	36°	48°	60°	72°	84°	90°
δ	0″	0,18″	1,38″	4,23″	8,57″	13,08″	14,76″	8,47″	0″

V okolí maximální chyby dostaneme hodnoty

α	69°	69° 30′	70°
δ	14,846″	14,863″	14,850″

Tabulka ukazuje, že největší chyba konstrukce je menší než 15″ (provedený odhad by bylo možno ještě více zostřiti) a je tedy, velmi nepatrná. *F. V.*

Fysika a sport. Na Olympiadě v Los Angelos dosáhl Čech *Skobla* světového rekordu, zvednuv oběma rukama celkem *380* kg. Po návratu do Prahy při závodech prý svůj „rekord vyrovnal", zvednuv „opět" *380* kg. Budete jistě překvapeni, řeknu-li vám nyní, že tím v Praze svůj olympický rekord překonal a to o půl kg.

Je totiž zeměpisná šířka Prahy 50°, Los Angelos 34°, tedy gravitační zrychlení v Praze 981,0, v Los Angelos jen 979,7 cm/sec², t. j. o 1,3‰ menší. A o tolik je v Praze váha *380* kg větší než v Los Angelos.

Udávajíce tlak vzduchu, provádíme redukci na hladinu moře a na 45° severní šířky anebo uvádíme jej v milibarech místo v milimetrech. Stejnou redukci by bylo třeba prováděti, aby se daly srovnávat rekordy na různých místech na zeměkouli (v různých zeměpisných šířkách a nadmořských výškách).

Na Měsíci bychom zvedli závaží šestkrát „těžší", neboť je tam zrychlení gravitační šestkrát menší (a *Skobla* by tam svůj rekord „zlepšil" na *2280* kg, aniž se více namáhal).

To neplatí jen o zvedání břemen; kdo doskočí na pólu 8 m na dálku, na rovníku by „zlepšil“ svůj výkon o 5‰, tedy o 4 cm. Tolik je totiž rozdíl ve zrychlení tíže na pólu a na rovníku. Řekne vám to na př. vzorec pro dálku šikmého vrhu, ve kterém je zrychlení g ve jmenovateli. Neznáte-li však ještě (nebo „už“) toho vzorce, pak vám to ještě jasněji vysvitne z této analogie:

Na Měsíci sice ještě nikdo nebyl, ale snad každý z vás četl Čechův „Výlet pana Broučka na měsíc“. Čím byl pan Brouček na Měsíci po fysikální stránce překvapen?

1. Cítil se velmi lehkým.

2. Běhal nadmíru rychle a všechny pohyby konal mnohem čiperněji než na zemi.

3. Sahaje do kapsy pro párek vrazil tam rukou proti své vůli tak rychle a takovou silou, že si kapsu roztrhl.

Uvažujme blíže o těchto výkonech pana Broučka! Na Měsíc nemůžeme, abychom si to tam ukázali. Nevadí! Koupete se přece v létě v řece! A sami dobře cítíte, jak jste ve vodě „lehcí“, svého kamaráda zvednete pod vodou jakoby nic: nu ovšem, vždyť (podle Archimedova zákona) váží pod vodou asi jen desetinu své váhy „na suchu“. „Váží“ tedy ještě méně, než by vážil na měsíci — tam by vážil šestinu své váhy na naší zemi. I laik pochopí (bez vzorců), kde se Sv. Čech mýlí (a že opravdu *Skobla* v Praze svůj rekord překonal), srovnáme-li pohyb na Měsíci s pohybem ve vodě.

1. První tvrzení je správné. To bychom nadělali rekordů, kdybychom směli břemena (na př. kus dřeva) zvedat pod vodou!

2. Zde už se Sv. Čech zmýlil; ve vodě ovšem můžete vyskočit mnohem výše než na vzduchu. Odrazím-li se ode dna 3 m hluboké řeky jen nohama a nekonám žádných pomocných pohybů rukama ani nohama, mohu snadno „vyskočit“ až k hladině, tedy dosáhnout světového rekordu ve skoku vysokém „s místa“ 3 m. Na Měsíci a na rovníku bych tedy opravdu vyskočil výše. Ale všimli jste si, jak pomalu při tom ve vodě vystupuji nahoru? Snažím-li se, jsa po krk ve vodě, rychle jíti kupředu, jak pomalu mi to jde! To není způsobeno jen tím, že voda klade pohybu větší odpor než vzduch. Skočím-li šipkou střemhlav do vody, cítím dobře, že padám už daleko pomaleji jakmile jsem c e l ý pod vodou. Jak se p o s t u p n ě ponořují ruce, hlava atd. pod vodu, stávám se p o s t u p n ě lehčím a můj pád se zvolňuje. Kdyby zpomalení bylo způsobeno jen odporem vody, přestalo by v okamžiku, kdy jsem se při skoku ponořil do vody po ramena, neboť ta tvoří největší průřez těla, padajícího svisle dolů hlavou napřed (odpor prostředí je tomuto průřezu přímo úměrný). Výpočet na základě Archimedova zákona, spojeného s Newtonovým dynamickým zákonem $P = am$ (kde P je váha těla pod vodou) ukazuje, že padáme pod vodou asi 10krát pomaleji než ve vzduchu (spec. hmota lidského těla je asi 1,1 g/cm^3). Spad-

neme-li za dvě sekundy ve vzduchu o 20 m, spadneme ve vodě jen o dva metry. Proto pohyby pod vodou jsou tak pomalé!

Je tedy omyl, tvrdí-li Sv. Čech, že se pan Brouček na Měsíci pohyboval rychle a čiperně. Jeho skoky, které místo kroků konal, byly sice šestkrát delší a vyšší, ale trval každý šestkrát delší dobu (vzorec pro trvání šikmého vrhu vám to také říká). Zkuste ve vodě jíti rychle kupředu, odrážejíce se jen nohama a došlapujíce po každém skoku na dno!

Jaký je vlastně mezi oběma případy 1. a 2. fysikální rozdíl? *Váha* těla se pod vodou zmenšila na jednu desetinu (síla P v napsané rovnici), ale jeho *hmota* zůstala stejná. Proto je pád desetkrát volnější. Je to velmi názorný příklad, jaký je rozdíl mezi vahou a hmotou, daleko názornější než to, že váha 1 kg na rovníku je o $5^0/_{00}$ menší než na pólu, jak víte ze školy.

Po tomto výkladu jistě nikdo nepůjde na rovník dělat rekordy v běhu na 100 m. Trvalo by mu to stejně dlouho jako u nás. Oč snáze a delší skoky by dělal, tím déle by mu každý trval. Rozhoduje tu totiž hmota, ne váha.

3. Jistě už nemáte strachu, že by si p. Brouček na Měsíci kapsu roztrhl! Řeknete si: spadnu-li oblečen do vody a sáhnu-li si do kapsy pro něco, neroztrhnu si ji snáze než „na suchu". Pod vodou k roztržení látky potřebuji stejnou sílu jako na vzduchu. Poslední zkouška výcviku záchrany tonoucích, prováděná na př. na plaveckých kursech v Nymburce, spočívá v tom, že zkoušený skočí v šatech do vody a ve vodě si je musí svléci (plovaje). Kdysi se stalo, že se to jednomu z účastníků nepovedlo a začal tonouti. Kdyby k roztržení šatů pod vodou stačila menší síla, jistě by si je byl tenkrát roztrhal.

Dokud tedy sportovním soudcům někdo neprozradí, že v zájmu správnosti měření je nutno prováděti u sportovních výkonů také redukci na určitou zeměpisnou šířku (jako u údajů tlakoměru), choďte překonávat rekordy ve skoku dalekém, vysokém o tyči, vrhu koulí, oštěpem a diskem a zvedání břemen na rovník. Marně měří se délky na desetiny cm, „váha" na desetinu kg, je-li rozdíl, způsobený zem. šířkou až půl dm a půl kg. Tento rozdíl měřicí přístroje *neukáží*, o něm je třeba *vědět*.

Je vidět, že nám rozdíl tak jednoduchých pojmů, jako hmota, váha a síla málo vnikl do krve, když ani ve dvacátém století na ty chyby nikdo neupozornil, zvlášť při dnešním zvýšeném zájmu o sport.

Josef Šoler.