Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 1, 40--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121509

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,

professor v Praze.

Z nauky o číslech. Rozložíme-li číslo N v kmenné činitele

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

je-li

$$\alpha + \beta + \lambda + \ldots = \lambda$$

a značí-li $\varphi(N)$ počet čísel kmenných menších než N (1 v to nepočítaje), jest výraz

$$x^{\lambda}\left[x^{\varphi(N)} - 1\right]$$

dělitelen číslem N. (*Ed. Lucas.*)

Jsou-li $a, b, c, \ldots$ kmenné činitele čísla N větší než 2, jest počet čísel trojúhelníkových nesoudělných s N a menších než 2N (N + 1) při sudém N

$$N\left(1 - \frac{2}{a}\right)\left(1 - \frac{2}{b}\right)\left(1 - \frac{2}{c}\right)\ldots$$

a dvojnásob takový při lichém N. (*E. Césaro.*)

Je-li $$N = 100\,a + 10\,b + c$$

dělitelno číslem 107, jest týmž číslem dělitelno

$$N' = (7a - c)^2 + 7b^2;$$

je-li však N dělitelno číslem 131, jest tímto číslem též dělitelno

$$N'' = (a - c)^2 + (3a - b)(3c - b).$$

(*R. Perrin.*)

Je-li N dělitelno číslem 10 A + B, má téhož dělitele výraz

$$N''' = cA^2 - bAB + aB^2.$$

(*Mac-Mahon.*)

Při libovolném celistvém n jest $n^{13} - n$ dělitelno 2730ti.
(*Anthony.*)

Mnohoúhelník mající $n(p-2)+2$ stran ($n>1$) lze rozložiti úhlopříčkami v n p-úhelníků s různými spůsoby, kdež

$$s=\frac{(np-n)(np-n-1)\ldots.(np-n-\overline{n-2})\,^{*})}{1.2.3\ldots.n}.$$

(*H. M. Taylor.*)
Mathesis, 1891, p. 9, 29, 95, 124, 175.
Nouvelles Annales, 1891, p. 18.*)

Řešení neurčité rovnice

$$f(x_1, x_2, x_3)=0$$

homogenní a rodu nulltého čísly celými jest úloha totožná s touto:

Na racionálné křivce dané onou rovnicí buďtež stanoveny body, jichž souřadnice jsou racionálné. Obecné řešení této úlohy podali *Hilbert* a *Hurwitz*, opírajíce se o některé práce *Nötherovy*. Je-li rovnice daná stupně n-ho, lze ji určitou racionálně převratnou transformací redukovati na rovnici stupně $n-2$. Při lichém n dospějeme, tuto transformaci opakujíce, posléze k rovnici lineárné tvaru

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0;$$

tato má nekonečně mnoho celistvých řešení, které spůsobem elementárným najíti lze. Při sudém n můžeme rovnici danou postupně převésti až na podobu

$$a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + a_3 n_3^2 = 0;$$

tato má dle *Legendrea* celistvá řešení tehdy a jen tehdy, nejsou-li a_1, a_2, a_3 souhlasného znaménka a jsou-li $-a_2 a_3$, $-a_3 a_1$, $-a_1 a_2$ kvadratické zbytky čísel a_1, a_2, a_3. V případě tomto má rovnice daná nekonečně mnoho řešení čísly celými; nejsou-li tyto podmínky splněny, nepřipouští rovnice řešení takového.

Rovnice $f=0$ může někdy míti konečný počet řešení zvláštních, která jsou pak též společnými kořeny rovnic

---

*) Srovnej Časopis, ročník XIV. str. 77.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

(*Acta mathematica*, tome 14, 1890—91, pag. 217—224).

Z theorie rovnic. Je-li v rovnici algebraické stupně n-ho s realnými součiniteli součinitel k-té mocniny absolutní hodnotou větší než součet absolutních hodnot ostatních součinitelů, má rovnice $n-k$ kořenů, jichž hodnoty jsou větší než 1 a k kořenů, jichž hodnoty jsou menší než 1. V případě kořenů neb součinitelů komplexních sluší na místě prostých hodnot klásti moduly. Ku př. v rovnici

$$8x^6 - 42x^5 - 115x^4 + 457x^3 - 130\,9x^2 + 361x - 150 = 0$$

jest

$$n = 6,\ k = 2$$

a kořeny její jsou

$$2,\ -3,\ 3 \pm 4i,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}.$$

Důkaz této věty, který zde stručně reprodukovati nelze, vede autor její *D. E. Mayer* na základě úvah o mathematické naději v určité hře.

(*Nouvelles Annales*, 1891, p. 111—118).

Determinanty. Vyvineme-li determinant n-ho stupně, obdržíme obecně $n!$ členů. Kterak se počet tento redukuje, jsou-li některé prvky determinantu rovny nulle, vyšetřoval známý mathematik francouzský *G. de Longchamps*, dopisující člen král. české společnosti nauk, a nazval determinanty toho druhu *déterminants troués* (děravé).

Vychází od determinantu n-ho stupně, který v žádném řádku a žádném sloupci nemá více než jednu nullu. Determinant ten lze tak upraviti, že nully zaujmou p prvních míst v hlavní příčce, kdežto na ostatních $n-p$ místech nejsou nully, pokud jest $p < n$. Značí-li $\varrho_{n,p}$ počet od nully různých členů, které obsahuje determinant takový po svém vyvinutí, lze úsudkem z p na $p+1$ stvrditi vzorec

$$\varrho_{n,p} = n! - \binom{p}{1}(n-1)! + \binom{p}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^p (n-p)!$$

Při $p = n$ má determinant celou příčku prázdnou a jest pak

$$\Theta_n = \varrho_{n,n} = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Uvažujme dále determinant n-ho stupně, který v jednom sloupci (neb řádku) má dvě nully, v jiných $p-1$ sloupcích (neb řádcích) po jediné nulle. Determinant taký můžeme sestaviti tak, aby prvních p prvků hlavní příčky byly nully a mimo to v prvním sloupci nulla v řádku q-tém. Již umístění této nové nully má vliv na počet členů vyvinutého determinantu. Je-li $q > p$, jest počet tento

$$\varrho_{n,p} - \varrho_{n-1,p-1};$$

je-li však $q \leqq p$, jest členů

$$\varrho_{n,p} - \varrho_{n-1,p-2}.$$

Tak na př. obdržíme, vyvinouce determinanty

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & . \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

z prvého 8, z druhého jen 7 členů, ač oba stejný počet null obsahují.

Mějme determinant s celou prázdnou příčkou, ve kterém ještě také první prvek druhého řádku $a_2^1 = 0$. Počet členů jest pak

$$\Theta_n^1 = (n-2)\,\varrho_{n-1,n-2} = \frac{n-2}{n-1}\,\Theta_n.$$

Je-li však mimo to $a_3^2 = 0$, bude

$$\Theta_n^{1.2} = (n-2)\,\varrho_{n-1,n-2} - (n-3)\,\varrho_{n-2,n-4}$$
$$= \frac{n-3}{n-1}\,\Theta_n + \frac{1}{n-1}\,\Theta_{n-1}.$$

Příkladem budiž determinant stupně 5ho

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & 0 \end{vmatrix},$$

jehož vyvinutím vzejde 25 členů, jak dle uvedených vzorců vypočítati lze.

Dále autor úvahy své nerozšiřuje, ježto by vedly k výsledkům složitým.

(*Journal de mathématiques spéciales*, 1891, p. 9, 29, 54, 85).

Věta Stewartova. Jsou-li A, B, C tři za sebou následující body přímky a O bod libovolný, jest

$$\overline{OA}^2.\overline{BC} - \overline{OB}^2.\overline{AC} + \overline{OC}^2.\overline{AB} = \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{AC}.$$

O této větě, kterou uveřejnil poprve *Stewart* ve spise Propositiones geometricae (1763), praví již *Chasles* (*Aperçu historique*, p. 176), že velice zasluhuje místo v elementech geometrie. Kterak zajímavého upotřebení jest schopna, ukázal *Cl. Thiry*, mladý učenec belgický, ve spisku Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre (Gand, 1891), vyvodiv na základě jejím četné metrické relace týkající se trojúhelníka, důležitých jeho bodů a jich vespolných vzdáleností. Zvláště pozoruhodný v té příčině jest následující vzorec, který autor jmenuje l'omniformule métrique du triangle. Jest-li každá ze stran a, b, c trojúhelníka ABC rozdělena v poměru n-tých mocnin obou stran přilehlých, protínají se spojnice bodů dělících s protějšími vrcholy v jediném bodě K_n, jehož vzdálenost od libovolného bodu P dána jest rovnicí

$$\overline{PK}_n^2 = \frac{a^n.\overline{PA}^2 + b^n.\overline{PB}^2 + c^n.\overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n}$$
$$- \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 (a^{n-2}b^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2} + c^{n-2}a^{n-2}).$$

Poulain upozornil, že vzorec ten obsažen jest ve vzorci mnohem obecnějším, který podal již *Lagrange* r. 1783. Jsou-li

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ barycentrické souřadnice bodu K vzhledem k bodům $A_1, A_2, \ldots A_n$, a klademe-li

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sigma, \qquad PA_k = \lambda_k,$$

jest

$$\overline{PK}^2 = \frac{\Sigma \alpha_k \lambda_k^2}{\sigma} - \frac{\Sigma \overline{A_i A_k}^2 \alpha_i \alpha_k}{\sigma^2}.$$

(*Mathesis 1891, p. 184—186.*)

Z geometrické kynematiky. Chceme-li analyticky vyšetřovati pohyb nepromĕnného útvaru v rovině, volíme dvě souřadné osy v poloze stálé a jiné dvě pevně spojené s útvarem hybným. Kterýkoli bod tohoto útvaru měj v soustavě prvé souřadnice x, y, v soustavě druhé ξ, η; obě soustavy předpokládejme pravoúhlé. Vzájemnost obou souřadnic vyjadřují vzorce

$$x = \lambda + \xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta$$
$$y = \mu + \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta,$$

v nichž význam veličin λ, μ, ϑ jest patrný. Klademe-li

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$
$$a = \lambda + i\mu, \quad b = \cos \vartheta + i \sin \vartheta,$$

můžeme obě rovnice hořejší nahraditi touto jedinou

$$z = a + b\zeta,$$

která pak jest základní rovnicí pohybu, pokládáme-li a, b za funkce času t. Derivujíce dle t, obdržíme

$$z' = a' + b'\zeta$$

jakožto rychlosť v příslušném bodě. Je-li $z' = 0$ čili

$$z = \frac{ab' - ba'}{b'},$$

jest tento bod C okamžitým středem otáčení.

Výraz $$z'' = a'' + b''\zeta$$

poskytuje zrychlení a při $z'' = 0$ obdržíme

$$z = \frac{ab'' - ba''}{b''}$$

určující střed zrychlení J. Vztahů těchto a jiných z nich odvozených lze s výhodou užiti k studiu pohybu v rovině, jakož učinil *Lecornu*. Týž prozkoumal zejména případy, kdy dráhy středů C a J jsou si podobny; kdy spojnice CJ zůstává stálou co do velikosti i směru a j.

(*Nouvelles Annales*, 1891, p. 5—17.)

Plochy souměrnosti ploch 2. stupně jsou plochy té vlastnosti, že část normály každého jich bodu, obsažená mezi průsečíky s danou plochou 2. stupně, jest bodem tímto půlena. Rovněž lze u ploch 2. stupně mluviti o jich křivkách souměrnosti; normálná rovina v kterémkoli bodě této křivky protíná plochu 2. stupně v kuželosečce, jejímž středem jest tento bod.

Výzkumem těchto křivek a ploch, pokud jsou algebraickými, zabýval se *Mangeot*, z jehož práce tuto některé výsledky citujeme. Ku ploše

$$P \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - K = 0$$

jest plochou souměrnosti S každá, jejíž rovnice jest homogenní vzhledem ku x^a, y^b, z^c. Rovnice

$$S \equiv \Sigma A x^m y^n z^p = 0$$

vyhoví této podmínce, je-li výraz

$$D = \frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}$$

konstantou pro všechny členy rovnice. Všecky tyto plochy souměrnosti jsou obalovými ploch zvláštních, určených rovnicí

$$ux^a + vy^b + wz^c = 0,$$

kde u, v, w jsou funkce téže proměnné t; při tom charakteristiky těchto envelop jsou křivkami souměrnosti plochy P.

Je-li $D = 0$, jest S orthopolárnou plochou ku P, t. j. polárné roviny každého bodu, stanovené vzhledem k těmto dvěma plochám, stojí na sobě kolmo.

Není-li P plochou rotační a má-li racionálnou hodnotu podíl

$$\frac{c(a-b)}{a(b-c)}=\frac{\mu}{\nu},$$

kdež μ, ν jsou čísla nesoudělná, značí rovnice

$$Ax^{\nu}z^{\mu}+By^{\mu+\nu}=0$$

kuželovou plochu souměrnosti ku P. Zvláštní pozornost věnuje pak autor plochám souměrnosti, pokud jsou stupně třetího. (*Nouvelles Annales*, 1891, p. 235—242.)

Míra křivosti ploch stanoví se dle *Gausse (Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828) takto:

Kolem bodu o na ploše P myslíme si uzavřenou křivku K omezující nekonečně malý prvek plochy, jehož obsah jest V. Dále předpokládejme kouli poloměru 1 a v ní poloměry rovnoběžné k normálám plochy P v bodech křivky K; souhrn těchto poloměrů tvoří plochu kuželovou, která na povrchu koule určuje prvek plošný obsahu U. Poměr

$$G=U:V$$

nazval Gauss mírou křivosti plochy P v bodě m a ukázal, že jest

$$G=\frac{1}{R_1R_2},$$

značí-li R_1, R_2 hlavní poloměry křivosti v tomto bodě. Výraz G jest pro vyjádření povahy plochy vskutku charakteristickým; má i tu výhodu, že nemění svou hodnotu, deformuje-li se plocha v jinou tak, že délky všech linií na ní obsažených zůstávají zachovány. V některých však případech poskytuje výsledek odchylující se od pojímání křivosti v prostém smyslu tohoto slova. Tak v každém bodě plochy rozvinutelné jest jeden z hlavních poloměrů křivosti nekonečný a dle míry Gaussovy křivost v každém bodě takové plochy rovna nulle. Říci však, že ku př. plocha válcová ve všech svých bodech nemá žádné křivosti, jest dle běžného ponětí protismyslné.

Jinou míru křivosti odporučila *Sophie Germain* (*Mémoire* *sur la courbure des surfaces*, *Crelle's Journal*, VII. Bd. 1831), totiž tak zvanou míru průměrné křivosti (courbure moyenne)

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Tato hodnota jest nejen arithmetickým průměrem převratných hodnot poloměrů křivosti každých dvou na sobě kolmých řezů normálných v daném bodě plochy, ale též arithmetickým průměrem převratných hodnot všech poloměrů křivosti v normálných rovinách dělících plný úhel kolem daného bodu plochy na libovolný počet stejných dílů.*) Patrno odtud, že míra M jest méně umělá než G; vede také u ploch rozvinutelných k výsledkům případným, nepodává však křivost ploch, u kterých jest $R_1 = -R_2$.

Nejnověji *Casorati*, prof. university v Pavii, snažil se pořídíti míru křivosti, která by vyhověla ve všech případech (Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune). Užívaje základní myšlénky Gaussovy, takto ji modifikuje:

Na ploše P opišme kolem bodu *o* geodetickou kružnici poloměru $\overline{op} = \sigma$ a omezující vrchlík

$$V' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{op}^2 \,.\, d\alpha = \pi\sigma^2.$$

Na každý z poloměrů $\overline{op}$ přenesme délku $\overline{oq} = \varphi$, kdež φ značí obloukovou míru úhlu sevřeného normalami v bodech *o* a *p* k ploše P sestrojenými. Body *q* tvoří pak křivku též uzavřenou, která omezuje plochu

$$U' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{oq}^2 \,.\, d\alpha = \frac{\pi\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Takto stanovena nová míra křivosti

$$C = \frac{U'}{V'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right),$$

*) Viz na př. Studnička, O počtu differenciálním, 2. vydání, str. 245.

která s dříve jmenovanými vázána jest relací

$$M^2 = \frac{C + G}{2}.$$

Nelze upříti, že míra Casoratiova vystihuje velice složitý pojem křivosti ploch přirozeněji než obě ostatní, poskytujíc u všech ploch výsledky přiměřené. Toliko na jejím základě lze vysloviti větu: Jest jediná plocha, v jejímž každém bodě křivost rovná se nulle; plochou tou jest rovina.

(*Acta mathematica*, tome 14, 1890—91, pag. 95—110.)

Úlohy.

Úloha 1.

Ustanoviti hodnotu nekonečného součinu

$$\sqrt{a} \, . \sqrt[4]{a^3} \, . \sqrt[8]{a^5} \, . \sqrt[16]{a^7} \ldots \text{ in inf.}$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Který jest obecný člen a_n a součet s_n řady, v níž

$$s_n = 2 - n a_n ?$$

Týž.

Úloha 3.

Do kružnice vepsati čtyrosý osmiúhelník, jehož sousední strany jsou v poměru $1 : \sqrt{2}$ a vypočítati jeho plochu. *Týž.*

Úloha 4.

Do kružnice vepsán jest čtyrúhelník stran a, b, c, d. Vyjádřiti mocnost průsečíku jeho úhlopříček vzhledem ke kružnici opsané. *Týž.*