Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Čupr

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 463--471

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121497

symmetrály úseček AC a BC kteroukoli osu kuželosečky v bodech S_1 a S_2 a tu odlehlost S_1S_2 jest veličina stálá.

V ročníku XLI. str. 229 podal p. vládní rada Jeřábek jistou větu o kuželosečkách, již jsem pak zobecnil. Věta zde uvedená jest jiným zobecněním věty p. Jeřábkem uvedené, neboť splynou-li body A a B s vrcholy kuželosečky, pak dospějeme ihned ku větě p. Jeřábkem vyslovené.

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček.

Dr. Karel Čupr.

(Dokončení.)

Když $\partial < 0$, jsou to přímky reálné, když $\partial > 0$, jsou to přímky imaginárné, v obou případech s průsečíkem reálným v konečnu. Když $\partial = 0$, jsou to přímky rovnoběžné nebo splývající; o jich realitě rozhodneme takto:

Stanovme rovnice přímek, v něž se kuželosečka rozpadá. Jest pak

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} =$$
$$(\sqrt{a_{11}}\,.\,x + \sqrt{a_{22}}\,.\,y + q_1)(\sqrt{a_{11}}\,.\,x + \sqrt{a_{22}}\,.\,y + q_2);$$

odsud plyne

$$q_1 + q_2 = \frac{2a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{2a_{23}}{\sqrt{a_{22}}},$$
$$q_1 q_2 = a_{33}.$$

Z rovnic těchto lze stanovit q_1, q_2. Vzdálenosti bodu (0, 0) od těchto dvou přímek jsou

$$\frac{q_1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}}, \quad \frac{q_2}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}}.$$

O vzdálenosti těchto dvou rovnoběžných přímek platí

$$d^2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega} = \frac{(q_1 + q_2)^2 - 4q_1q_2}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}$$
$$= \frac{4(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)\,a_{22}} = \frac{4(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)\,a_{11}}. \quad (9^{**})$$

Je-li a_{11} kladné, jest i $a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$ kladné. Připusťme, že by výraz $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos\omega$ byl buď záporný nebo rovný 0. Pak by též bylo

$$a_{11} + a_{22} \leqq 2a_{12} \cos\omega$$

čili

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} \leqq 4a_{12}^2 (\cos^2\omega - 1),$$

odkudž

$$(a_{11} - a_{22})^2 \leqq - 4a_{12}^2 \sin^2\omega,$$

což nemůže býti. Jest tedy $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos\omega$ kladné.

Ony rovnoběžné přímky budou tedy reálné, když $a_{13}^2 - - a_{11}a_{33} > 0$, imaginárné, když $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} < 0$; když konečně $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = 0$, degeneruje kuželosečka v dvojnásobnou reálnou přímku.

Vzorec (9*) udává též úhel sevřený asymptotami hyperboly; je-li $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos\omega = 0$, svírají asymptoty úhel pravý, t. j. daná hyperbola jest rovnoramenná.

4. Osy centrické kuželosečky jsou rovny poloměrům kružnic majících s kuželosečkou společný střed a této se dotýkajících.

Budiž (ξ, η) střed kuželosečky $f(x, y) = 0$; rovnici kruhu o středu (ξ, η) a poloměru r lze psáti parametricky:

$$x = \xi + r\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} = \xi + rk,$$

$$y = \eta + r\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \eta + rh;$$

snadno ukážeme, že jest $k^2 + 2kh \cos\omega + h^2 = 1$.

O průsečících kuželosečky $f(x, y) = 0$ s tímto kruhem platí rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}(\xi + rk)^2 + 2a_{12}(\xi + rk)(\eta + rh) + a_{22}(\eta + rh)^2 \\ + 2a_{13}(\xi + rk) + 2a_{23}(\eta + rh) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Rovnici tu lze psáti

$$\begin{aligned} a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2kr(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}) \\ + 2hr(a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}) + r^2(a_{11}k^2 + 2a_{12}kh + a_{22}h^2) \\ + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta + a_{33} = 0; \end{aligned}$$

použijeme-li vztahů (5*), (5**), obdržíme

$$r^2(a_{11}k^2 + 2a_{12}kh + a_{22}h^2) + \frac{D}{\partial} = 0,$$

nebo též

$$r^2(a_{11}k^2 + 2a_{12}kh + a_{22}h^2) + \frac{D}{\partial}(k^2 + 2kh\cos\omega + h^2) = 0$$

a posléze

$$k^2\left(a_{11}r^2 + \frac{D}{\partial}\right) + 2\left(a_{12} + \frac{D}{\partial}\cos\omega\right)kh + \left(a_{22} + \frac{D}{\partial}\right)h^2 = 0.$$

Mají-li se kuželosečka a kružnice dotýkati, musí poslední rovnice vzhledem k poměru $\frac{k}{h}$ míti jediné řešení, t. j. musí býti

$$\left(a_{12}r^2 + \frac{D}{\partial}\cos\omega\right)^2 = \left(a_{11}r^2 + \frac{D}{\partial}\right)\left(a_{22}r^2 + \frac{D}{\partial}\right)$$

a po úpravě

$$r^4 + \frac{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)D}{\partial^2}r^2 + \frac{D^2}{\partial^3}\sin^2\omega = 0. \quad (10^*)$$

Značíme-li a, b poloosy kuželosečky, jest

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= -\frac{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)}{\partial^2}D, \\ a^2b^2 &= \frac{D^2\sin^2\omega}{\partial^3}. \end{aligned}\right\} \quad (10^{**})$$

Je-li předložená kuželosečka elipsa, musí býti součin a^2b^2 kladný, t. j. $\partial > 0$; elipsa ta jest reálná tenkrát a jenom tenkrát, jestliže

$$(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2 > 4\partial^2\sin^2\omega.$$

Je-li $\partial < 0$, víme již z dřívějška, že kuželosečka jest hyperbolou a to vždy reálnou, neboť rovnice (10*) má vždy jeden sled a jednu změnu znamének, ať $(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)$ a D mají znaménka stejná nebo různá. Je-li $a^2 + b^2 = 0$, t. j. $a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega = 0$, jest kuželosečka hyperbola rovnoramenná a osa její jest dána vzorcem

$$a^2 = \frac{D\sin\omega}{\partial^{\frac{3}{2}}};$$

týž vzorec určuje i poloměr kružnice ($a^2 = b^2$, $\partial > 0$).

Zajímavo jest, že rovnice vyznačující směry asymptot a os obsahují pouze koefficienty quadratických členů; dále rovnice určující směry a velikosti os mají diskriminant až na multiplikativní konstantu stejný:

$$\Delta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \omega + [(a_{11} + a_{22}) \cos \omega - 2a_{12}]^2}.$$

Jsou-li koefficienty $a_{11}, a_{12} \ldots a_{33}$ racionální, jsou směrnice a velikosti os zároveň racionálná nebo irracionálná čísla; vůbec vlastnosti kořenů těchto dvou rovnic, pokud závisejí na diskriminantu, jsou stejné.

Ohnisková vzdálenost kuželosečky jest dána výrazem

$$e^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= \frac{D^2}{\partial^4}[(a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \omega + (a_{11} + a_{22} \cos \omega - 2a_{12})^2].$$

Rovnice (7**) poskytují dvě hodnoty pro A, značme je $A \pm$; rovnice (10*) poskytuje rovněž dvě hodnoty $r^2 \pm$. Jak se snadno přesvědčíme, v přímce o směrnici $A +$ leží osa o délce, jejíž čtverec $r^2 \mp$.

5. Přistupme ku případu, kdy $D \neq 0$, $\partial = 0$. Střed této kuželosečky jest v nekonečnu, kuželosečka taková nazývá se parabolou.

Jako výtvarný zákon paraboly leckdy se uvádí tato věta: Zvětšujeme-li hlavní osu (= osa, na níž jsou ohniska) elipsy nebo hyperboly nad každou mez, nebo což jest totéž, necháme střed ubíhati do nekonečna, zachovávajíce jedno ohnisko v konečnu a velikost parametru $p = \frac{b^2}{a}$ stejnou, přejde uvažovaná kuželosečka centrická v parabolu.

Použijeme této věty a kladouce ve vzorcích odvozených pro kuželosečky centrické $\partial = 0$, obdržíme příslušné vzorce pro parabolu. Směrnice os paraboly vyplývá z (7*):

$$A_n = \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{12} - a_{22} \cos \omega)(a_{11} \cos \omega - a_{12})}}{2(a_{12} - a_{22} \cos \omega)}$$
$$= \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)}{2(a_{12} - a_{22} \cos \omega)},$$

odkudž

$$A_n^+ = \frac{a_{22} - a_{12} \cos \omega}{a_{12} - a_{22} \cos \omega},$$

$$A_n^- = \frac{-a_{11} + a_{12} \cos \omega}{a_{12} - a_{22} \cos \omega}$$

$$= \frac{\frac{-a_{12}^2}{a_{22}} + a_{12} \cos \omega}{a_{12} - a_{22} \cos \omega} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}. \qquad (11^*)$$

A_n^- jest též směrnice přímek

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

určujících střed; tedy A_n^- jest směrnice hlavní osy. Druhá osa stojí kolmo na hlavní v nekonečnu; směrnice A_n^+ přísluší též vrcholové tečně a řídící přímce.

Rovnici hlavní osy odvodíme z (7**)

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{a_{22} - a_{12} \cos \omega}{a_{12} - a_{22} \cos \omega}$$

čili

$$a_{12}x + a_{22}y + \frac{(a_{12}a_{13} + a_{23}a_{22}) - (a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}) \cos \omega}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega} = 0. \qquad (11^{**})$$

Z rovnice (8*) patrno, že asymptoty paraboly jsou sice reálné, avšak splývají a jsou v nekonečnu.

Abychom vypočetli parametr paraboly p, použijeme rovnic (10**); jest pak

$$\frac{(a^2 + b^2)^3}{(a^2 b^2)^2} = -\frac{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)^3}{D \sin^4 \omega}.$$

Dále jest

$$\frac{(a^2 + b^2)^3}{a^4 b^4} = \frac{a^2}{b^4} + 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{b^2}{a^4} = \frac{1}{p^2}$$

$$- \frac{3\,(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)\,\partial}{D \sin^2 \omega} + \frac{p}{a^3}.$$

Položme nyní $\lim a = \infty$, $\lim \partial = 0$ a máme

$$p^2 = - \frac{D \sin^4 \omega}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)^3}. \qquad (12)$$

Určíme nyní znaménko determinantu D.

Rozviňme determinant ten dle elementů posledního sloupce; jest — použijeme-li dále vztahu $a_{11} = \frac{a_{12}^2}{a_{22}}$ —

$$D = a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})$$
$$= -\frac{(a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12})^2}{a_{22}}.$$

Je-li a_{11} kladné (a to předpokládáme), jest i a_{22} kladné; jest tedy p^2 vždy veličinou kladnou; pokud $a_{11}, \ldots a_{33}$ jsou veličiny reálné, definuje podmínka $D \gtrless 0$, $\partial = 0$ vždy parabolu reálnou.

Při parabole nelze o sdružených průměrech mluviti; všechny průměry jsou rovnoběžny s hlavní osou. Jeden systém průměrů lze nahraditi rovnoběžnými sečnami: středy sečen vytvořených svazkem rovnoběžných přímek o směrnici A vyplňují průměr, jehož rovnice dle (4) zní

$$(a_{11} + a_{12}A)\,x + (a_{12} + a_{22}A)\,y + (a_{13} + a_{23}A) = 0,$$

kteroužto rovnici s ohledem na vztah $\partial = 0$ lze též psáti

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{11}\,\frac{a_{13} + a_{23}A}{a_{11} + a_{12}A} = 0.$$

6. Budiž dána kuželosečka rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{33};$$

pak opět $\partial = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $D = -a_{33}\,.\,\delta$.

Když $\begin{matrix}\partial > 0\\ \partial < 0\end{matrix}$, jest předložená kuželosečka $\begin{matrix}\text{elipsou;}\\ \text{hyperbolou;}\end{matrix}$ když $\partial = 0$, jest i $D = 0$, a kuželosečka zvrhá se ve dvě rovnoběžné přímky, jež splynou, když $a_{33} = 0$.

Rovnice určující délky os zní

$$\left.\begin{aligned}
&r^4 - a_{33}\,\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\partial}\,r^2 + \frac{a_{33}^2\sin^2\omega}{\partial} = 0,\\
&\text{odkudž}\\
&a^2 + b^2 = \frac{a_{33}(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)}{\partial},\\
&a^2b^2 = \frac{a_{33}^2\sin^2\omega}{\partial},\\
&\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{a_{33}\sin^2\omega}.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Odvodíme nyní pomocí těchto vzorců metrické vztahy sdružených průměrů centrické kuželosečky. Je-li $A_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\omega - \varphi_1)}$ směrnice průměru daného, jest směrnice průměru sdruženého

$$A_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin(\omega - \varphi_2)} = -\frac{a_{11} + a_{12}A_1}{a_{12} + a_{22}A_1}.$$

Kuželosečku $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{33}$ protněme kružnicí $x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 = m^2$; o průsečících těchto křivek platí

$$(a_{11}m^2 - a_{33})x^2 + 2(a_{12}m^2 - a_{33}\cos \omega)xy + (a_{22}m^2 - a_{33})y^2 = 0,$$

čili

$$(a_{22}m^2 - a_{33})A_1^2 + 2(a_{12}m^2 - a_{33}\cos \omega)A_1 + (a_{11}m^2 - a_{33}) = 0,$$

odkudž

$$m^2 = \frac{a_{33}(A_1^2 + 2A_1 \cos \omega + 1)}{a_{22}A_1^2 + 2a_{12}A_1 + a_{11}};$$

o průměru sdruženém platí:

$$n^2 = \frac{a_{33}(A_2^2 + 2A_2 \cos \omega + 1)}{a_{22}A_2^2 + 2a_{12}A_2 + a_{11}}.$$

Jest však

$$a_{22}A_1^2 + 2a_{12}A_1 + a_{11} = A_1(a_{22}A_1 + a_{12}) + (a_{12}A_1 + a_{11}) =$$
$$= A_1(a_{22}A_1 + a_{12}) - A_2(a_{22}A_1 + a_{12}) = (A_1 - A_2)(a_{22}A_1 + a_{12});$$

podobně jest

$$a_{22}A_2^2 + 2a_{12}A_2 + a_{11} = -(A_1 - A_2)(a_{22}A_2 + a_{12}).$$

Rovnici o sdružených směrech pišme ve tvaru

$$a_{22}A_1A_2 + a_{12}(A_1 + A_2) + a_{11} = 0.$$

Nyní jest

$$\frac{m^2n^2}{a_{33}^2} = -\frac{(A_1^2 + 2A_1 \cos \omega + 1)(A_2^2 + 2A_2 \cos \omega + 1)}{(A_2 - A_1)^2(a_{22}A_1 + a_{12})(a_{22}A_2 + a_{12})}$$
$$= -\frac{(A_1^2 + 2A_1 \cos \omega + 1)(A_2^2 + 2A_2 \cos \omega + 1)}{(A_2 - A_1)^2[a_{22}^2A_1A_2 + a_{12}a_{22}(A_1 + A_2) + a_{12}^2]}$$
$$= -\frac{(A_1^2 + 2A_1 \cos \omega + 1)(A_2^2 + 2A_2 \cos \omega + 1)}{(A_2 - A_1)^2(-a_{11}a_{22} + a_{12}^2)}.$$

Pomocí vzorce (1*) obdržíme

$$m^2n^2 \sin^2 \varphi = \frac{a_{33}^2 \sin^2 \omega}{\partial},$$

kdež φ jest úhel sevřený průměry. Součin v levo jest kladný, když $\partial > 0$, t. j. když kuželosečka jest elipsou, jest záporný (m^2 a n^2 mají znaménka různá), když $\partial < 0$; kuželosečka jest pak hyperbolou. Dle (13) jest

$$m^2 n^2 \sin^2\varphi = a^2 b^2. \tag{14*}$$

O algebraickém součtu $m^2 + n^2$ obdržíme podobně

$$\frac{m^2+n^2}{a_{33}} = \frac{(A_1^2 + 2A_1 \cos\omega + 1)}{(A_1 - A_2)(a_{22}A_1 + a_{12})} - \frac{(A_2^2 + 2A_2 \cos\omega + 1)}{(A_1 - A_2)(a_{22}A_2 + a_{12})}$$

$$= \frac{2a_{12}\cos\omega + a_{12}(A_1 + A_2) - a_{22} + a_{12}A_1A_2}{a_{12}^2 + a_{12}a_{22}(A_1 + A_2) + a_{22}^2 A_1 A_2}$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

a s ohledem na rovnice (13)

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2.$$

Pro elipsu jest $\quad m^2 + n^2 = a^2 + b^2,$

pro hyperbolu $\quad m^2 - n^2 = a^2 - b^2. \qquad (14^{**})$

Uvažujme nyní průměry k sobě kolmé. O jejich směrnicích platí $1 + A_1A_2 + (A_1 + A_2)\cos\omega = 0$, odkudž

$$1 + A_1 \cos\omega = -A_2(A_1 + \cos\omega),$$

podobně

$$1 + A_2 \cos\omega = -A_1(A_2 + \cos\omega).$$

Pak o algebraickém součtu $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ platí:

$$a_{33}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a_{22}A_1^2 + 2a_{12}A_1 + a_{11}}{(A_1 - A_2)(A_1 + \cos\omega)} - \frac{a_{22}A_2^2 + 2a_{12}A_2 + a_{11}}{(A_1 - A_2)(A_2 + \cos\omega)}$$

$$= \frac{a_{22}A_1A_2 - a_{11} + a_{22}(A_1 + A_2)\cos\omega + 2a_{12}\cos\omega}{A_1A_2 + (A_1 + A_2)\cos\omega + \cos^2\omega}$$

$$= -\frac{a_{22} + a_{11} + 2a_{12}\cos\omega}{\cos^2\omega - 1} = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega};$$

posléze jest

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{14***}$$

7. Shrneme-li výsledky předchozích odstavců, dospíváme k tomuto roztřídění kuželoseček: Rovnice $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ značí, pokud aspoň jeden z koefficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} jest od nuly různý, kuželosečku buď vlastní nebo zvrhlou. Zaveďme označení

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = \partial',$$
$$a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega = \varepsilon.$$

I. Budiž $D \neq 0$, rovnice $f(x, y) = 0$ definuje kuželosečku vlastní. Je-li $\begin{Bmatrix} \partial > 0 \\ \partial < 0 \\ \partial = 0 \end{Bmatrix}$, jest kuželosečka ta $\begin{Bmatrix} \text{elipsou} \\ \text{hyperbolou} \\ \text{parabolou} \end{Bmatrix}$.

Hyperbola i parabola jsou vždy reálné; elipsa jen tenkráte, když jest splněna nerovnina $\varepsilon^2 > 4\delta \sin^2\omega$. Střed centrických kuželoseček dávají rovnice (4*), (4**); směrnice os a asymptot dávají rovnice (7*), (8**); rovnice os a asymptot poskytují vzorce (7**), (8***); vzorec (10*) udává délky os. Osa paraboly jest dána rovnicí (11**), parametr vzorcem (12).

II. Budiž $D = 0$, kuželosečka degeneruje ve dvě přímky. Je-li $\begin{Bmatrix} \partial < 0 \\ \partial > 0 \end{Bmatrix}$, jsou to dvě přímky $\begin{Bmatrix} \text{reálné} \\ \text{imaginárné} \end{Bmatrix}$ s reálným průsečíkem v konečnu; úhel přímkami těmi sevřený jest dán vzorcem (9*).

Je-li $\partial = 0$, jsou přímky ty rovnoběžné $\begin{Bmatrix} \text{reálné} \\ \text{imaginárné} \end{Bmatrix}$, když $\begin{Bmatrix} \partial' < 0 \\ \partial' > 0 \end{Bmatrix}$; vzdálenost přímek těch udává vzorec (9**). Je-li $\partial' = 0$, kuželosečka degeneruje v dvojnásobnou reálnou přímku.