

Karel Petr

O jedné formuli pro numerický výpočet určitých integrálů

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 454--455

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121495>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1915

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

rada Procházka jako znamenitý pracovník je uznáván a je i ctěn. Je mimořádným členem Král. české společnosti nauk, dopisujícím členem České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, čestným členem Jednoty českých matematiků a fysiků, členem zkušebních komisí pro učitelství na gymnasiích a reálkách a kreslení na školách středních a že i posluchači jeho mají jej v úctě a oblibě, o tom svědčí čestné členství dvorního rady Procházky ve Spolku posluchačů strojního inženýrství a elektrotechniky. —k—

## O jedné formuli pro numerický výpočet určitých integrálů.

Od K. Petra.

Formule Euler-Maclaurinova počítá integrál z funkce  $f(x)$  v mezích  $a, b$  z hodnot funkce  $f(x)$  pro  $x = a$  a pro  $x = b$ , jakož i z hodnot derivací řádu 1., 3., 5. . . až řádu  $(2r-1)$ -vého té funkce v bodech  $x = a, x = b$ . V následujícím jest podána bez důkazu formule počítající hodnotu integrálu z hodnot funkce  $f(x)$  jakož i z hodnot všech derivací (řádu lichého i sudého) až do řádu  $(n-1)$ -vého v bodech stanovených mezemi integrálu. Formule ta má tvar

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + A_1 h^2 [f'(a) - f'(b)] \\ + A_2 h^3 [f''(a) + f''(b)] + \dots \\ + A_k h^{k+1} [f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)] + \dots \\ + A_{n-1} h^n [f^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)] + R_n, \\ h = b - a.$$

Při tom lze numerické konstanty  $A_1, A_2 \dots$  tak voliti, že zbytek  $R_n$  jest v  $h$  řádu  $(2n+1)$  za předpokladu ovšem, že existuje  $2n$ -tá derivace funkce  $f(x)$  v intervalu  $(a, b)$  a že jest derivace ta v  $(a, b)$  spojitou. V tomto případě lze dáti zbytku  $R_n$  tvar

$$R_n = h^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)! (2n+1)!} f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Hodnoty  $A_1, A_2, \dots$  jsou závisly jednak na svém indexu, jednak na čísle  $n$  a jest

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \binom{n-1}{1} \frac{1}{2 \cdot (4n-2)}, & A_3 &= \binom{n-2}{3} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot (4n-2)(4n-6)}, \\
 A_5 &= \binom{n-3}{4} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (4n-2)(4n-6)(4n-10)}, & \dots & \dots, \\
 A_{2k-1} &= \binom{n-k}{k} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4k-2)(4n-2)(4n-6) \dots (4n-4k+2)}; \\
 A_2 &= \binom{n-2}{1} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot (4n-2)}, \\
 A_4 &= \binom{n-3}{2} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (4n-2)(4n-6)}, \\
 A_6 &= \binom{n-4}{3} \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot (4n-2)(4n-6)(4n-10)}, \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Tak ku př. pro  $n = 8$  máme vztah

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + \frac{7h^2}{60} [f'(a) - f'(b)] \\
 &+ \frac{h^3}{60} [f''(a) + f''(b)] + \frac{h^4}{624} [f'''(a) - f'''(b)] \\
 &+ \frac{h^5}{9360} [f^{(4)}(a) + f^{(4)}(b)] + \frac{h^6}{205920} [f^{(5)}(a) - f^{(5)}(b)] \\
 &+ \frac{h^7}{7207200} [f^{(6)}(a) + f^{(6)}(b)] + \frac{h^8}{518918400} [f^{(7)}(a) - f^{(7)}(b)] \\
 &+ \frac{h^{17}}{218790} \frac{f^{(16)}(\xi)}{16!}.
 \end{aligned}$$

Podobně pro  $n = 5$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + \frac{h^2}{9} [f'(a) - f'(b)] \\
 &+ \frac{h^3}{72} [f''(a) + f''(b)] + \frac{h^4}{1008} [f'''(a) - f'''(b)] \\
 &+ \frac{h^5}{30240} [f^{(4)}(a) + f^{(4)}(b)] + \frac{h^{11}}{2772} \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}.
 \end{aligned}$$