Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O jedné formuli pro numerický výpočet určitých integrálů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 454--455

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121495

rada Procházka jako znamenitý pracovník je uznáván a je i ctěn. Je mimořádným členem Král. české společnosti nauk, dopisujícím členem České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, čestným členem Jednoty českých mathematiků a fysiků, členem zkušebních komisí pro učitelství na gymnasiích a reálkách a kreslení na školách středních a že i posluchači jeho mají jej v úctě a oblibě, o tom svědčí čestné členství dvorního rady Procházky ve Spolku posluchačů strojního inženýrství a elektrotechniky. —*k*—

O jedné formuli pro numerický výpočet určitých integrálů.

Od K. Petra.

Formule Euler-Maclaurinova počítá integrál z funkce $f(x)$ v mezích a, b z hodnot funkce $f(x)$ pro $x = a$ a pro $x = b$, jakož i z hodnot derivací řádu 1., 3., 5. . . až řádu $(2r - 1)$-vého té funkce v bodech $x = a$, $x = b$. V následujícím jest podána bez důkazu formule počítající hodnotu integrálu z hodnot funkce $f(x)$ jakož i z hodnot všech derivací (řádu lichého i sudého) až do řádu $(n - 1)$-vého v bodech stanovených mezemi integrálu. Formule ta má tvar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + A_1 h^2 [f'(a) - f'(b)]$$
$$+ A_2 h^3 [f''(a) + f''(b)] + \dots$$
$$+ A_k h^{k+1} [f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)] + \dots$$
$$+ A_{n-1} h^n [f^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)] + R_n,$$
$$h = b - a.$$

Při tom lze numerické konstanty A_1, A_2 . . . tak voliti, že zbytek R_n jest v h řádu $(2n + 1)$ za předpokladu ovšem, že existuje $2n$-tá derivace funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) a že jest derivace ta v (a, b) spojitou. V tomto případě lze dáti zbytku R_n tvar

$$R_n = h^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)!} f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Hodnoty A_1, A_2, ... jsou závisly jednak na svém indexu, jednak na čísle n a jest

$$A_1 = \binom{n-1}{1}\frac{1}{2\,.\,(4n-2)}, \quad A_3 = \binom{n-2}{3}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,(4n-2)(4n-6)},$$

$$A_5 = \binom{n-3}{4}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,10\,.\,(4n-2)(4n-6)(4n-10)}, \quad \ldots\ldots,$$

$$A_{2k-1} = \binom{n-k}{k}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,10\ldots(4k-2)(4n-2)(4n-6)\ldots(4n-4k+2)};$$

$$A_2 = \binom{n-2}{1}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,(4n-2)},$$

$$A_4 = \binom{n-3}{2}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,10\,.\,(4n-2)(4n-6)},$$

$$A_6 = \binom{n-4}{3}\frac{1}{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,(4n-2)(4n-6)(4n-10)},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Tak ku př. pro $n = 8$ máme vztah

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{7h^2}{60}[f'(a)-f'(b)]$$

$$+\frac{h^3}{60}[f''(a)+f''(b)] + \frac{h^4}{624}[f'''(a)-f'''(b)]$$

$$+\frac{h^5}{9360}[f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)] + \frac{h^6}{205920}[f^{(5)}(a)-f^{(5)}(b)]$$

$$+\frac{h^7}{7207200}[f^{(6)}(a)+f^{(6)}(b)] + \frac{h^8}{518918400}[f^{(7)}(a)-f^{(7)}(b)]$$

$$+\frac{h^{17}}{218790}\,\frac{f^{(16)}(\xi)}{16!}.$$

Podobně pro $n = 5$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{h^2}{9}[f'(a)-f'(b)]$$

$$+\frac{h^3}{72}[f''(a)+f''(b)] + \frac{h^4}{1008}[f'''(a)-f'''(b)]$$

$$+\frac{h^5}{30240}[f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)] + \frac{h^{11}}{2772}\,\frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}.$$