

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Zdeněk Horák

Détermination expérimentale du coefficient apparent de restitution  
tangentielle

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 2, 131--151

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121490>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1937

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Détermination expérimentale du coefficient apparent de restitution tangentielle.

Zdeněk Horák, Praha.

(Reçu le 16 décembre 1936.)

Dans le travail *Théorie générale du choc dans les systèmes matériels*,<sup>1)</sup> j'ai établi les lois générales du choc qui entraînent comme conséquence l'existence théorique de quelques phénomènes nouveaux.<sup>2)</sup> Il s'en suit que, dans le cas du choc de deux corps en même temps élastiques et parfaitement rugueux, non seulement la composante normale de la vitesse relative des points de contact des deux corps, mais aussi la composante tangentielle, changent de signe et diminuent dans un certain rapport ce qui est en contradiction avec la supposition habituelle que la composante tangentielle après le choc doit être nulle. J'appelle *coefficient de restitution tangentielle* le rapport, dans lequel diminue la composante tangentielle, pour le distinguer du coefficient de restitution de Newton que je désigne comme *coefficient de restitution normale*.

Dans le présent travail, je déduis à nouveau d'une manière simple les formules (2), (3), (6), (7) que j'ai données primitivement dans le travail cité plus haut (voir p. 63 et 61). Les équations (2) définissent le mouvement après le choc d'un marteau sur un disque tournant autour d'un axe fixe; les formules (3), (6), (7) donnent celui d'un disque circulaire après le choc sur un plan horizontal fixe dans le cas où le disque se meut, avant le choc, dans un plan vertical fixe, l'axe du disque ayant une direction horizontale constante. On suppose, en outre, que les deux corps sont parfaitement rugueux, leur élasticité étant, en général, imparfaite. C'est sur les formules (3), (6), (7) que j'ai fondé une méthode de mesure du coefficient de restitution tangentielle. La façon de procéder

<sup>1)</sup> Journal de l'École Polytechnique, 2<sup>e</sup> série, 28 (1931), 15—64.

<sup>2)</sup> Voir aussi mes travaux: *Les principes d'une théorie générale du choc*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 188 (1929), 226—228 et *L'effet du frottement de pivotement sur le choc des corps élastiques*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 200 (1935), 897—899.

est la suivante: On abandonne le disque à l'action de la pesanteur après l'avoir fait tourner autour de son axe horizontal. Le disque heurte verticalement une plaque horizontale bien fixée, en tournant avec la vitesse angulaire  $\omega_0$  (la verticalité du mouvement de chute a été garantie en s'aidant d'un appareil spécialement construit pour faire tourner le disque et pour l'abandonner ensuite à l'action de la pesanteur sans lui donner une impulsion inadmissible). Après le choc, le disque rebondit avec une certaine vitesse dans une direction oblique, sa vitesse angulaire  $\omega_1$  étant donnée par l'expression

$$\omega_1 = \frac{\frac{R^2}{a^2} - e}{\frac{R^2}{a^2} + 1} \omega_0,$$

où  $e$  désigne le coefficient apparent de restitution tangentielle,  $a$  étant le rayon géométrique du disque et  $R$  son rayon de giration. Donc le rapport  $\omega_1/\omega_0$  est de même signe que la différence  $R^2/a^2 - e$  ce qui rend possible de procéder comme il suit: On change, d'une manière convenable, la répartition de la masse du disque — et par conséquent aussi la quantité  $R$  — jusqu'à ce que l'on trouve deux valeurs du rayon de giration  $R_1$  et  $R_2$  peu différentes pour lesquelles le rapport  $\omega_1/\omega_0$  prend deux valeurs de signe contraire ce qu'on établit par l'observation. En raison de l'équation ci-dessus, il en est de même avec la différence  $R^2/a^2 - e$  ce qui veut dire que la valeur du coefficient  $e$  est comprise entre  $R_1^2/a^2$  et  $R_2^2/a^2$ . On peut donc poser approximativement

$$e = \frac{1}{2a^2} (R_1^2 + R_2^2)$$

et l'on est sûr que l'écart entre cette valeur moyenne et la valeur réelle de  $e$  est inférieur à

$$\left| \frac{R_2^2 - R_1^2}{2a^2} \right|.$$

Le changement du rayon de giration a été effectué de deux manières différentes, suivant que  $e$  était inférieur ou supérieur à 0,5, car le rapport  $R^2/a^2$  est, pour un disque homogène, égal à 0,5. Dans le premier cas, il fallait diminuer  $R$ , en mettant sur l'axe du disque des plaques circulaires en laiton plus ou moins faibles et de différents diamètres (naturellement toujours plus petites que le disque). En cas contraire, où  $e > 0,5$ , il était nécessaire d'agrandir  $R$ , en découpant autour du centre du disque une ouverture circulaire. On obtenait ainsi des anneaux de plus en plus petites

étroits dont la largeur était diminuée jusqu'à ce que la rotation après le choc devienne de sens contraire à celle d'avant le choc.

Il faut remarquer que nos formules ont été déduites, en supposant que le disque et la plaque étaient parfaitement rugueux. Donc les conclusions précédentes ne sont vraies que pour ce cas limite de corps parfaitement rugueux qui n'existent point en réalité. Cependant, il faut prétendre quelles restent valables — au moins approximativement — dans le cas de corps assez rugueux pour lesquels le glissement pendant le choc est négligeable. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que la composante tangentielle de la vitesse du point de contact du disque après le choc soit également de signe contraire à celle d'avant le choc, mais qu'elle diminue dans une plus forte proportion que si le coefficient de frottement était infini. Par conséquent, la quantité  $e$  éprouve une diminution apparente qui sera évidemment d'autant plus faible que la vitesse angulaire du disque avant le choc sera plus petite et que la hauteur de chute et le coefficient de frottement de glissement seront plus grands. Conformément à la dernière de ces trois conditions, j'ai choisi comme une des substances, constituant le disque et la plaque, pour toutes les expériences, le liège ou la gomme élastique, l'autre étant bois, laiton, ébonite etc. Les pourtours des disques ont été — suivant le besoin — rendus assez rugueux au moyen d'un limage approprié. Dans ces conditions, on peut supposer que les valeurs de  $e$  que j'ai obtenues par la mesure et que j'appelle coefficients apparents de restitution tangentielle, ne diffèrent pas beaucoup des valeurs limites, correspondant aux corps parfaitement rugueux.

En appliquant la méthode, que je viens d'exposer, en plus de vingt cas, j'ai obtenu pour le coefficient apparent de restitution tangentielle des valeurs intermédiaires entre 0,2 et 0,7. J'ai réuni les résultats individuels dans les deux tableaux A et B où j'ai indiqué: les substances et les dimensions du disque et de la plaque, les valeurs  $R_1^2/a^2$ ,  $R_2^2/a^2$  et le coefficient apparent  $e'$ .

En somme, les résultats obtenus montrent qu'il y a accord complet entre les prévisions de ma théorie et l'expérience et que par conséquent la supposition habituelle, mentionnée plus haut, n'est pas correcte. Dans la généralité des cas, les coefficients apparents de restitution tangentielle obtenus sont exacts de 1 à 4% près, ce qui est une précision satisfaisante en raison de la simplicité de notre méthode et de ce fait que ces valeurs dépendent de la rugosité des corps expérimentés. Il faut, en outre, souligner que les valeurs publiées dans le présent travail sont les premiers résultats expérimentaux quantitatifs de ce genre.

## 1. Théorie élémentaire de la méthode de mesure.

Dans ma théorie du choc, j'ai établi quelques lois générales relatives au choc dans les systèmes matériels lesquelles, interprétées dans l'hyperespace (variété) riemannien des configurations du système, ont une forme analogue aux lois valables pour le choc d'un point matériel sur un plan. Les conséquences de ces lois générales du choc se trouvent, dans le cas de corps parfaitement mous ou de ceux parfaitement polis, en accord complet avec toutes nos connaissances théoriques et expérimentales. Cependant, pour le choc de corps en même temps élastiques et parfaitement rugueux, j'obtiens des résultats qui sont en contradiction avec la supposition habituelle qu'après le choc de deux corps parfaitement rugueux, la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact des deux corps est *nulle*. Dans la suite, je vais montrer que cette supposition n'est pas fondée, je vais la remplacer par une hypothèse plus générale et ensuite je déduirai, par des raisonnements élémentaires, les lois du choc correspondantes.

Si deux surfaces rugueuses de deux solides se rencontrent en un point, la vitesse relative de leurs points de contact n'étant pas perpendiculaire au plan tangentiel commun, la percussion, qu'éprouvent les deux solides, n'est plus perpendiculaire à ce plan. Lors du choc prend donc naissance, outre une déformation normale (compression) une déformation tangentielle des deux solides. Quant à la compression, elle s'accroît jusqu'à ce que la composante normale de la vitesse relative des points de contact s'annule, puis les deux corps commencent à reprendre progressivement leur forme primitive. Au cours de cette restitution, les deux corps continuent leur action mutuelle, de sorte que la composante normale de la vitesse relative change de signe. Il en est de même avec la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact. A mesure que la compression se poursuit, la pression normale entre les corps croît, ainsi que la force tangentielle, due au frottement de glissement. Cela entraîne comme conséquence une déformation tangentielle progressive des deux corps, laquelle fait naître des forces tangentielles, agissant sur les solides, de sorte que la composante tangentielle de la vitesse relative diminue. Si le frottement est assez grand, la dite composante s'annule pendant la durée du contact, avant la fin du choc. Dès ce moment, les deux solides commencent à reprendre leur forme primitive ce que j'appelle *restitution tangentielle*. Au cours de cette restitution, les solides sont encore en contact ce qui a pour conséquence, que la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact prend — à la fin du choc — une direction opposée à celle d'avant le choc. Donc, la supposition habituelle que les points de contact des

deux corps parfaitement rugueux ont — après le choc — la même vitesse tangentielle ne peut être vraie que si les corps sont parfaitement mous. Dans tous les autres cas, où il n'est pas permis de négliger l'élasticité tangentielle, elle apparaît fausse.

Le cas, où le frottement est assez faible pour que la composante tangentielle de la vitesse relative ne s'annule pas avant la fin du choc, constitue un problème assez compliqué dont je ne parlerai pas dans ce qui suit. Au contraire, je supposerai d'abord que le coefficient de frottement est, mathématiquement parlant, infini. Cela veut dire que le glissement d'un corps contre l'autre lors du choc est infiniment petit. Cette supposition faite, on est sûr que la composante tangentielle de la vitesse relative s'annule pendant la durée du choc et, en raison de la restitution tangentielle, change de signe après le choc. Or, on sait que la composante normale de la vitesse relative, d'après la règle connue de Newton, change de signe et diminue dans un certain rapport, appelé coefficient de restitution. On peut s'attendre à ce que, dans le cas de corps parfaitement rugueux, l'effet du choc sur la composante tangentielle soit analogue.

Cela me conduit à énoncer l'hypothèse que *la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact des deux corps parfaitement rugueux change de signe, après le choc, et se réduit dans un certain rapport que j'appelle coefficient de restitution tangentielle, ou simplement coefficient tangentiel, en désignant celui de Newton comme coefficient de restitution normale (ou bien coefficient normal).*

Comme on sait, la valeur du coefficient normal dépend non seulement des substances des corps se heurtant mais aussi de leur forme, de leurs dimensions et de leur vitesse relative avant le choc. Cela conduit à penser qu'il en est de même pour le coefficient tangentiel ce qui impose d'admettre qu'en général les deux coefficients de restitution ont des valeurs différentes.

Le cas limite des corps parfaitement rugueux ne peut pas être réalisé physiquement que d'une façon approchée. Si le frottement des corps suffit pour arrêter le glissement de l'un corps contre l'autre en un temps assez court, la composante tangentielle changera évidemment de signe, mais elle se réduira, à cause d'une perte d'énergie mécanique, dans une plus grande mesure que si les corps étaient parfaitement rugueux. Par conséquent, la valeur du coefficient tangentiel éprouve une diminution apparente et, dans le cas considéré du choc de corps imparfaitement rugueux, je vais donc appeler le rapport des grandeurs absolues des composantes tangentielles de la vitesse relative après et avant le choc *coefficient apparent de restitution tangentielle*. Je désignerai comme coefficient *vrai* sa valeur limite, correspondant au cas idéal de la rugosité parfaite. La différence entre les coefficients vrai et apparent sera d'autant

plus petite que la percussion normale entre les deux corps sera plus grande et que la composante tangentielle de la vitesse relative, au commencement du choc, sera plus faible. De plus, on s'assure aisément que la valeur du coefficient tangentiel apparent dépend aussi de la préparation mécanique des surfaces des deux corps (qui commande le coefficient de frottement) et de la composante normale de la vitesse relative des points de contact.

Pour faire bien connaître la signification physique de notre idée fondamentale, je traiterai, comme première application, le cas très simple du *choc d'un marteau à face plane sur un disque à axe fixe*, où le phénomène essentiel est particulièrement marqué. Supposons l'axe du disque fixé dans l'espace et imaginons un marteau tournant autour d'un axe fixe, parallèle à celui du disque. De plus, le plan de la face de choc du marteau contient l'axe de rotation du marteau, de façon que la vitesse du marteau, au moment du choc, soit dirigée vers le centre du disque. On peut vérifier la correction de ce montage, en constatant que le choc du marteau sur le disque en repos ne produit aucune rotation du disque. Faisons alors tourner le disque avec la vitesse angulaire  $\omega_0$  et supposons que le marteau heurte le disque avec la vitesse angulaire  $\Omega_0$ . Donc les composantes normale  $v_0$  et tangentielle  $u_0$  de la vitesse relative des points de contact s'écrivent:

$$v_0 = b\Omega_0, \quad u_0 = a\omega_0,$$

où  $b$  désigne la distance du point de contact à l'axe du marteau,  $a$  étant le rayon géométrique du disque. Si les deux corps sont parfaitement rugueux, les raisonnements précédents entraînent les relations:

$$v_1 = -fv_0, \quad u_1 = -eu_0, \quad (1)$$

où  $f$  et  $e$  sont les coefficients normal et tangentiel de restitution, les indices 0 et 1 désignant respectivement les vitesses avant et après le choc. Il s'en suit

$$\Omega_1 = -f\Omega_0, \quad \omega_1 = -e\omega_0. \quad (2)$$

Donc le marteau rebondit après le choc et de même le disque commence à tourner en sens inverse avec la vitesse réduite dans le rapport  $e$ . C'est déjà en 1928 que j'ai confirmé ce résultat théorique par une expérience faite sur un disque en gomme élastique et un marteau en bois dur (Voir fig. 1), comme je l'ai mentionné dans le travail cité plus haut (p. 64<sup>1</sup>). Malheureusement, à cause du frottement inévitable dans le coussinet de l'axe du disque, ce cas simple ne se prête guère à la détermination expérimentale du coefficient tangentiel.

Je vais donc considérer le *choc imparfaitement élastique d'un disque circulaire à axe libre sur un plan parfaitement rugueux*.

Le cas général d'un tel choc se trouve déjà résolu dans mon travail antérieur, que je viens de citer (no 11<sup>1</sup>) et je me borne alors au cas particulier où le disque de rayon  $a$  et de masse  $m$  se meut dans un plan vertical fixe, son axe gardant une direction horizontale fixe (perpendiculaire au dit plan vertical). La masse du disque est distribuée d'une manière symétrique par rapport à son axe, de sorte que son centre de gravité est situé sur cet axe. Prenons le point de contact  $O$  du disque avec le plan horizontal

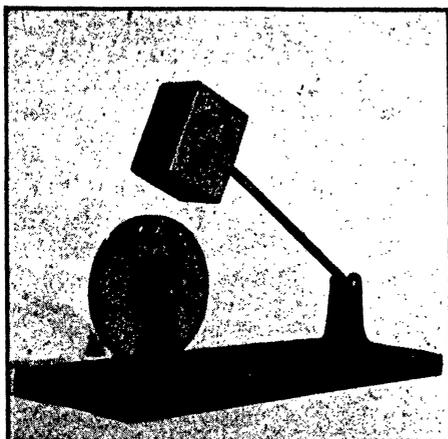


Fig. 1. Appareil pour l'étude du choc d'un marteau sur un disque à axe fixe.



Fig. 2. Appareil A pour l'expérimentation des disques.

fixe, au moment du choc, pour l'origine du système de coordonnées rectangulaires  $OXY$ . Les deux axes  $OX$  et  $OY$  sont situés dans le plan vertical du disque, l'axe  $OY$  étant orienté vers le haut. Par suite, l'axe  $OX$  se confond avec la ligne d'intersection du plan du disque avec celui que le disque va choquer. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse de translation du centre  $G$  du disque sont, avant le choc,  $u_0$  et  $v_0$ . Si l'on désigne de plus par  $\omega_0$  la vitesse angulaire de la rotation du disque autour de son axe avant le choc, et par  $u_1, v_1, \omega_1$  les mêmes quantités après le choc, la composante normale de la vitesse du point de contact après le choc s'écrit, en vertu de la règle de Newton,

$$v_1 = -fv_0 \quad (3)$$

et notre hypothèse entraîne pour la composante tangentielle une relation analogue

$$u_1 + a\omega_1 = -e(u_0 + a\omega_0). \quad (4)$$

Ces deux équations ne suffisent pas naturellement pour déterminer les trois inconnues  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\omega_1$  et il faut chercher la troisième relation nécessaire; pour la trouver, on raisonne ainsi: Le point d'application de toutes les forces de percussion, agissant sur le disque lors du choc, se trouve au point de contact. Alors, le moment de la percussion résultante par rapport au point de contact est nul. Or, d'après un théorème bien connu, la quantité de mouvement perdue pendant une percussion et la percussion appliquée sont en équilibre et par suite le moment de la quantité de mouvement du disque par rapport au point de contact ne change pas par le choc. En exprimant que le moment de la quantité de mouvement du disque par rapport à son point de contact (c'est-à-dire l'origine de coordonnées  $O$ ) après le choc est égal à celui avant le choc, nous obtenons la relation cherchée. On s'assure aisément qu'en désignant par  $L$  le moment d'inertie du disque relatif à son axe de rotation, cette relation est la suivante

$$L\omega_1 - mau_1 = L\omega_0 - mau_0, \quad (5)$$

car le moment de la quantité de mouvement, due à la rotation du disque autour de son axe, est le même par rapport à toutes les droites parallèles à cet axe et donc égal à celui calculé par rapport à l'axe de rotation du disque elle-même. En résolvant les équations (4) et (5), on obtient

$$u_1 = \frac{(ma^2 - Le)u_0 - La(1 + e)\omega_0}{L + ma^2}, \quad (6)$$

$$\omega_1 = \frac{-ma(1 + e)u_0 + (L - ma^2e)\omega_0}{L + ma^2}. \quad (7)$$

Les trois relations (3), (6), (7) déterminent les composantes de la vitesse du centre de gravité et la vitesse angulaire du disque à la fin du choc. Elles concordent parfaitement avec les équations que j'ai déduites, pour le cas envisagé, sur la base de ma théorie générale.<sup>3)</sup> Dans les équations (6) et (7) intervient la masse du disque  $m$  qui peut être éliminée, en introduisant le rayon de giration

$$R = \sqrt{\frac{L}{m}},$$

ce qui donne

$$u_1 = \frac{(a^2 - R^2e)u_0 - R^2(1 + e)a\omega_0}{R^2 + a^2}. \quad (8)$$

<sup>3)</sup> Voir <sup>1)</sup> p. 61. Il n'y a qu'une différence de notation: Pour arriver aux équations, que j'ai données dans le travail cité, il suffit dans (3), (6), (7) de remplacer  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  par  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$ .

$$\omega_1 = \frac{-(1 + e) au_0 + (R^2 - a^2e) \omega_0}{R^2 + a^2}. \quad (9)$$

Les relations (3), (8), (9) définissent le mouvement du disque immédiatement après le choc, dans le cas particulier que nous avons considéré. Tandis que la relation (3) traduit le résultat bien connu, celles (8) et (9) diffèrent essentiellement des équations habituelles qui correspondent à la supposition que la restitution tangentielle n'existe pas. On obtient évidemment les équations habituelles, si l'on pose, dans (8) et (9),  $e = 0$  d'où l'on tire les relations

$$u_1 = \frac{a^2 u_0 - R^2 a \omega_0}{R^2 + a^2}, \quad \omega_1 = \frac{-au_0 + R^2 \omega_0}{R^2 + a^2} \quad (10)$$

qui avec (3) expriment les lois du choc conformes à l'ancienne théorie.

## 2. Description de la méthode.

Le coefficient de restitution tangentielle n'a pas été mesuré, jusqu'à présent, il faut alors chercher d'abord une méthode convenable, pour y parvenir. Il n'y a pas naturellement de corps parfaitement rugueux et il ne peut donc s'agir que d'une mesure du coefficient *apparent*. Nos formules ont été établies pour le cas limite d'une rugosité parfaite, elles restent néanmoins valables encore pour le mouvement réel du disque, si l'on y remplace le coefficient vrai de restitution tangentielle par celui apparent et si les conditions d'expérience sont, bien entendu, aussi voisines que possible de celles que j'ai fixées au no 1. Sous ces réserves, nous pouvons donc considérer les formules (3), (8), (9) comme exactes et les utiliser pour la mesure du coefficient apparent de restitution tangentielle que je vais désigner par  $e'$ . Ces formules, en général assez compliquées, se simplifient notablement par le choix convenable d'un mouvement particulier du disque avant le choc. A savoir: si le disque se meut, sans tourner, dans une direction oblique, on a

$$\omega_0 = 0, \quad u_0 \neq 0$$

et les formules (8) et (9) se réduisent aux suivantes:

$$u_1 = \frac{a^2 - R^2 e'}{R^2 + a^2} u_0, \quad (11)$$

$$\omega_1 = -\frac{1 + e'}{R^2 + a^2} a u_0. \quad (12)$$

Si, au contraire, on abandonne le disque à l'action de la pesanteur, après l'avoir fait tourner autour de son axe horizontal, il va heurter verticalement le plan, en tournant avec la vitesse  $\omega_0$ . On a donc

$$u_0 = 0, \omega_0 \neq 0$$

et les équations (8) et (9) prennent la forme:

$$u_1 = - \frac{1 + e'}{R^2 + a^2} R^2 a \omega_0, \quad (13)$$

$$\omega_1 = \frac{R^2 - a^2 e'}{R^2 + a^2} \omega_0. \quad (14)$$

Les formules (11), (12) et (13), (14) sont du même type et pour juger, lequel des deux cas est préférable à l'autre, il faut se rendre compte que, pour un disque réel, on a toujours

$$R < a, e' < 1. \quad (15)$$

Donc, en raison de (11) et (12)

$$\frac{u_1}{u_0} > 0, \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} < 0,$$

c'est-à-dire qu'au premier cas ni la composante tangentielle de la vitesse de translation ni celle de rotation ne peut s'annuler après le choc. On voit également que d'après (13), dans le second cas

$$\frac{u_1}{\omega_0} < 0,$$

tandis que l'équation (14), que l'on peut mettre sous la forme

$$\omega_1 = \frac{\frac{R^2}{a^2} - e'}{\frac{R^2}{a^2} + 1} \omega_0, \quad (16)$$

montre qu'il suffit de remplir la condition

$$\frac{R^2}{a^2} = e' \quad (17)$$

pour faire disparaître la rotation du disque après le choc. Or, cette condition est, en raison des relations (15), bien réalisable, car on a

$$0 < \frac{R^2}{a^2} < 1, \quad 0 < e' < 1.$$

On voit de plus que d'après (16)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\omega_1}{\omega_0} > 0 \text{ lorsque } \frac{R^2}{a^2} > e', \\ \frac{\omega_1}{\omega_0} < 0 \text{ lorsque } \frac{R^2}{a^2} < e'. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Pour un disque circulaire homogène

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et donc la rotation après le choc est de même signe que celle d'avant le choc, si le coefficient tangentiel

$$e' < \frac{1}{2};$$

si au contraire

$$e' > \frac{1}{2},$$

le disque tourne, après le choc, en sens inverse à celui d'avant le choc. Si enfin

$$e' = \frac{1}{2},$$

la rotation disparaît et le disque homogène rebondit, après le choc, dans une direction oblique, tout en restant dans le même plan. D'une manière analogue, dans le cas général d'un disque quelconque, dont on connaît le rayon de giration, la grandeur et le sens de la rotation après le choc nous permettent de déduire la grandeur de  $e'$ , comme nous allons le montrer.

Si l'on pourrait changer le rayon de giration  $R$  d'un disque, sans changer son rayon géométrique  $a$ , d'une manière continue, il suffirait de modifier la répartition de sa masse jusqu'à ce que le disque, après la chute verticale sur une plaque horizontale, rebondisse sans tourner et cela fait, calculer simplement le coefficient  $e'$  d'après l'équation (17). En réalité, il est évidemment impossible de produire une variation du moment d'inertie aussi petite que l'on désire et, de plus, on ne saurait distinguer une rotation très faible du mouvement purement translatore. Au surplus, le procédé mentionné ne donne pas la possibilité de juger la précision de mesure.

Il a donc fallu baser la méthode de mesure du coefficient apparent de restitution tangentielle sur les relations (18) et j'ai choisi le procédé suivant: On donne au disque une rotation faible initiale et on l'abandonne à l'action de la pesanteur, de sorte que le disque frappe verticalement une plaque horizontale, et l'on observe le sens de sa rotation après le rebondissement. Pour éliminer l'influence d'une dissymétrie éventuelle, comme par exemple une légère inclinaison de la plaque ou une incidence légèrement oblique, on répète l'expérience, en changeant le sens de la rotation initiale du disque. Enfin, on détermine le moment d'inertie ou bien directement le rayon de giration du disque dont je parlerai ultérieurement. Lorsqu'on observe le changement du sens de la rotation après le rebondissement (et cela dans les deux cas), on est sûr, en vertu des relations (18), que

$$\frac{R^2}{a^2} < e'.$$

Dans ces circonstances, on modifie la répartition de la masse du disque de telle sorte que son rayon de giration augmente et l'on reprend l'étude. On continue pareillement jusqu'à ce que le rapport  $\omega_1/\omega_0$  change de signe, c'est-à-dire devienne positif. Par ce procédé, nous obtiendrons deux valeurs du rayon de giration  $R_1$  et  $R_2$  telles qu'en raison de (18), on ait:

$$\frac{R_1^2}{a^2} < e' < \frac{R_2^2}{a^2}. \quad (19)$$

Sous la supposition que ces deux valeurs soient suffisamment voisines, on peut prendre pour  $e'$  leur moyenne

$$e' = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2a^2} \quad (20)$$

et l'on est sûr que l'écart entre la valeur juste de  $e'$  et cette moyenne est inférieur à

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{2a^2}.$$

Au surplus, si les vitesses des deux rotations après le choc sont approximativement égales entre elles, on peut admettre avec vraisemblance que la valeur réelle de  $e'$  est plus voisine de la moyenne arithmétique que d'une des valeurs limites, intervenant dans l'inégalité (19). On peut donc apprécier l'erreur probable  $\varepsilon$  de la détermination de  $e'$  au quart de la différence des valeurs limites, c'est-à-dire

$$\varepsilon = \pm \frac{R_2^2 - R_1^2}{4a^2}. \quad (21)$$

Le raisonnement que nous venons de faire a été développé en supposant que la rotation du disque après le choc soit de sens opposé à celle d'avant le choc. Dans le cas contraire, lorsque le disque tourne, après le rebondissement, dans le sens primitif, on sait qu'en vertu de (18)

$$\frac{R^2}{a^2} > e'$$

et il est donc nécessaire de diminuer son rayon de giration jusqu'à ce que la rotation après le choc change de sens. Cela fait, on aura, en raison de (18),

$$\frac{R^2}{a^2} < e',$$

de sorte qu'on aboutit encore ici à une relation du type (19) et l'on évalue le coefficient  $e'$  de la manière exposée antérieurement.

Il reste à indiquer le procédé dont je me suis servi pour évaluer le rayon de giration du disque. La formule bien connue, relative à la durée d'oscillation  $\tau$  d'un pendule composé, peut se mettre à la forme

$$\tau = \frac{\pi r}{\sqrt{gl}},$$

$r$  étant le rayon de giration du pendule par rapport au couteau distant de  $l$  du centre de gravité et  $g$  désignant l'accélération due à la pesanteur. Il s'en suit, conformément au théorème de Steiner,

$$R^2 = r^2 + l^2 = \frac{gl}{\pi^2} \tau^2 + l^2 \quad (22)$$

ce qui fournit directement le carré du rayon de giration, intervenant dans l'inégalité (19). Pour obtenir sa valeur numérique, il suffit donc de faire osciller le disque, à la manière d'un pendule, sur un couteau parallèle à son axe de rotation et d'évaluer  $l$  et  $\tau$ .

Dans ce qui précède, j'ai décrit sommairement la méthode de mesure du coefficient de restitution tangentielle. La méthode suppose qu'on satisfasse à certaines conditions, indiquées plus haut, et je me propose maintenant de montrer, comment j'y suis parvenu dans mes expériences. Notre méthode ne permet que la mesure des coefficients *apparents* de restitution tangentielle. D'après ce que j'ai exposé dans le no 1, la valeur du coefficient apparent sera d'autant plus voisine de celle du coefficient vrai que la percussion normale sera plus grande et que la vitesse de rotation du disque sera plus faible — la chute étant supposée verticale. Par suite, la vitesse de rotation initiale du disque ne devait pas dépasser la valeur nécessaire pour apprécier, sans aucun doute, le sens de la rotation du disque après le rebondissement. Dans les expériences réalisées, la vitesse initiale des disques avant le choc était d'un ou deux tours par seconde. D'autre part, pour que la percussion normale soit assez grande, j'ai choisi une hauteur de chute de 150 à 190 cm. Enfin, pour avoir des coefficients de frottement suffisamment élevés, un au moins des solides, à savoir le disque ou la plaque, ont été constitués en *liège* ou en *gomme élastique*. Ce choix du matériau nous a permis d'obtenir, en même temps, un rebondissement assez grand pour examiner le sens de rotation après le choc. Les pourtours des disques en bois, ébonite et fibre ont été rendus rugueux à l'aide d'un limage approprié.

La condition essentielle pour l'application de notre méthode est l'incidence normale du disque sur la plaque qui peut être réalisée le plus aisément par une chute verticale sur une plaque horizontale. Cette plaque a été amenée à l'horizontalité au moyen d'un niveau à bulle et bien fixée dans cette position sur le plancher. Les plaques

de liège et de gomme élastique ont été munies d'un châssis en bois. Quant à la verticalité de la chute du disque, elle a été garantie, en se servant d'un appareil spécial dont je parlerai plus tard. On peut ici, je crois, négliger les perturbations du mouvement du disque dues à l'air. On a surtout affaire à l'*effet Magnus*. Par action de la résistance de l'air, la trajectoire du centre du disque se courbe faiblement dans le sens de la rotation du disque. On s'assure facilement qu'une telle courbure de la trajectoire augmente la rotation rétrograde du disque après le choc. Ceci se présente comme une *augmentation* apparente du coefficient de restitution tangentielle. Donc, si l'effet Magnus n'est pas complètement négligeable, il contrebalance, en partie, la diminution apparente du coefficient tangentiel due au glissement ayant lieu pendant le choc. Car ce qu'il y a de certain, c'est que cette diminution dépasse l'augmentation due à l'air, parce que les disques utilisés étaient relativement très plats. On voit, en somme, que l'action de l'effet Magnus ne peut pas augmenter l'écart entre les coefficients vrai et apparent.

Nous avons réalisé deux appareils d'expérimentation, suivant qu'il s'agisse de disques ou d'anneaux.

**A. Appareil pour l'expérimentation des disques.** (Voir fig. 2.) Cet appareil comporte un bâti rigide constitué par deux montants verticaux assemblés par une entretoise. Chaque disque, comportant un axe muni de deux tourillons coniques creux, peut tourner entre deux pointes fixées sur les montants du bâti. Ces pointes, maintenues en position par deux ressorts à boudin, peuvent s'écarter brusquement et simultanément grâce à un dispositif d'escamotage dont la commande est placée sur le dessus du bâti.

**B. Appareil pour l'expérimentation des anneaux.** (Voir fig. 3a, b.) Il est essentiellement constitué par une fourche dont les branches portent deux plateaux circulaires concentriques, pouvant tourner librement, dont l'écartement est commandé à l'aide d'une fourchette mobile. L'anneau à expérimenter est placé entre les deux plateaux; il est maintenu par la pression de ces plateaux; le centrage de l'anneau est réalisé très simplement par trois rangées de pointes à  $120^\circ$ , portées par l'un des plateaux et venant se placer dans des trous correspondants de l'anneau. Une rotation de  $90^\circ$  de la fourche maintenant les plateaux amène ceux-ci dans la position horizontale ce qui permet une mise en place très facile des anneaux.

L'appareil du type A convient spécialement à l'étude des disques homogènes. Il exige que ceux-ci soient munis en leur centre des coupelles permettant de tourner entre les pointes de l'appareil. On commence par essayer le disque homogène et deux cas peuvent se présenter:

1<sup>er</sup> cas. La rotation après le choc est du même sens que la rotation primitive, ce qui signifie  $e' < 0,5$ . On ajoute alors des disques concentriques en laiton de diamètres inférieurs à celui du disque expérimenté, de manière à réduire le rayon de giration jusqu'à obtenir une rotation de sens inverse après le choc. • •

2<sup>e</sup> cas. La rotation après le choc du disque homogène tel quel est déjà de sens inverse à la rotation primitive, — c'est-à-dire que:  $e' > 0,5$ . En ce cas, on augmente le rayon de giration, l'en

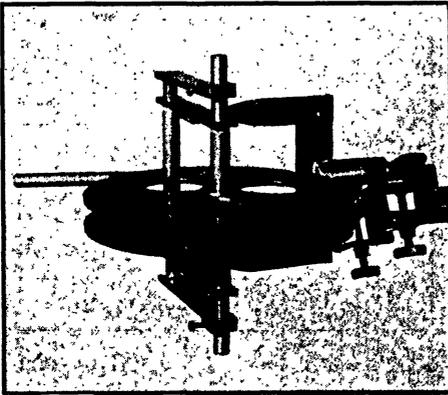


Fig. 3a. Appareil B pour l'expérimentation des anneaux, dans la position horizontale.

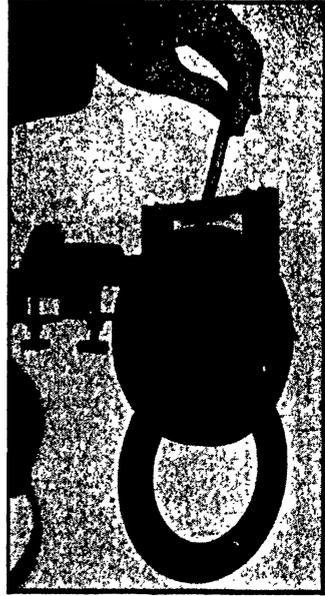


Fig. 3b. Appareil B avec un anneau qui vient d'être abandonné à l'action de la pesanteur.

fixant de part et d'autre du disque des anneaux en laiton de différentes largeurs, jusqu'à changement de sens de la rotation après le choc.

Mais il est plus avantageux, dans ce second cas, d'utiliser l'appareil B, car le montage sur l'appareil A exige les coupelles de centrage qui diminuent encore le rayon de giration.

L'appareil B ne peut être utilisé que dans les cas où  $e' > 0,5$ . On augmente progressivement le rayon de giration du disque expérimenté, en l'évidant en sa partie centrale suivant un cercle, dont on fait croître le rayon jusqu'à ce qu'on obtienne le changement de sens de la rotation après le choc.

### 3. Résultats expérimentaux.

Les mesures du coefficient apparent de restitution tangentielle, que j'ai exécutées par la méthode décrite au numéro précé-

TABLEAU A.

*Mesures exécutées à l'aide de l'appareil A sur les disques pleins.*

	Matériau constituant		Dimensions en cm		Valeurs limites	$e' \pm \epsilon$
	le disque	la plaque	du disque $a$ $d$	de la plaque $D$		
1.	liège comprimé	liège comprimé	7,80 0,8	0,8	0,205 0,239	$0,222 \pm 0,009$
2.	liège brut	liège comprimé	7,42 1,3	0,8	0,219 0,248	$0,253 \pm 0,007$
3.	liège naturel	liège naturel	4,48 0,8	0,7	0,233 0,290	$0,262 \pm 0,014$
4.	liège naturel	bois de chêne	4,48 0,8	3,8	0,233 0,290	$0,262 \pm 0,014$
5.	liège comprimé	bois de chêne	7,80 0,8	3,8	0,246 0,297	$0,272 \pm 0,013$
6.	liège comprimé	liège naturel	7,80 0,8	0,7	0,246 0,297	$0,272 \pm 0,013$
7.	liège comprimé	liège brut	7,80 0,8	3,0	0,259 0,297	$0,278 \pm 0,010$
8.	liège brut	liège brut	7,42 1,4	3,0	0,248 0,521	$0,38 \pm 0,07$
9.	bois de chêne et gomme grise	parquet en bois	8,66 1,0	—	0,559 0,591	$0,575 \pm 0,008$
10.	bois de chêne et gomme grise	liège comprimé	8,70 1,0	0,8	0,610 0,648	$0,629 \pm 0,010$
11.	bois d'aune	gomme élastique (blanche)	8,16 1,0	1,0	0,628 0,656	$0,642 \pm 0,007$
12.	bois de chêne	gomme élastique (blanche)	8,16 1,0	1,0	0,624 0,679	$0,651 \pm 0,014$
13.	bois de chêne	gomme élastique (grise)	8,16 1,0	1,0	0,624 0,679	$0,651 \pm 0,014$
14.	bois de chêne	gomme élastique (grise)	8,20 1,0	1,0	0,646 0,665	$0,655 \pm 0,008$
15.	bois de chêne et gomme grise	gomme élastique (grise)	8,66 1,0	1,0	0,653 0,676	$0,664 \pm 0,006$

TABLEAU B.

Mesures exécutées à l'aide de l'appareil B sur les anneaux.

	Matériau constituant		Dimensions en cm		Valeurs limites	$e' \pm \epsilon$
			de l'anneau <i>a b d</i>	de la plaque <i>D</i>		
16.	fibre	gomme élastique (grise)	7,89 3,57 0,6	1,0	0,618 0,648	$0,633 \pm 0,008$
17.	pertinax	gomme élastique (grise)	7,93 3,54 0,4	1,0	0,630 0,656	$0,643 \pm 0,007$
18.	gomme naturelle	bois de chêne	5,90 2,90 1,0	3,8	0,603 0,689	$0,646 \pm 0,022$
19.	ébonite	gomme élastique (grise)	7,92 3,08 0,6	1,0	0,665 0,697	$0,681 \pm 0,008$
20a.	ébonite (pourtour poli)	gomme élastique (grise)	8,01 3,81 0,4	1,0	0,626 0,633	$0,630 \pm 0,002$
20b.	ébonite (pourtour rugueux)	gomme élastique (grise)	7,99 3,00 0,4	1,0	0,677 0,706	$0,691 \pm 0,008$
21.	laiton	gomme élastique (grise)	6,45 2,28 0,25	1,0	0,685 0,716	$0,701 \pm 0,008$

dent, se résument dans les deux tableaux A et B. Le premier contient des données relatives aux mesures, au nombre de 15, exécutées à l'aide de l'appareil A sur les disques pleins. Le second tableau réunit les résultats obtenus par des mesures, au nombre de 7, faites sur les anneaux, en se servant de l'appareil B. Voici les détails de manipulation pour chacune des catégories de mesure.

Dans la première colonne du tableau A, on trouve les indications sur les matériaux constituant le disque et la plaque; les dimensions inscrites dans la seconde colonne ont la signification suivante:  $a$  signifie le rayon géométrique du disque,  $d$  son épaisseur et  $D$  est l'épaisseur de la plaque dont je n'indique pas les autres dimensions dans le tableau, car la longueur et la largeur de la plaque étaient, dans tous les cas, à peu près les-mêmes, à savoir 15 cm environ. La troisième colonne contient les deux valeurs limites  $R_1^2/a^2$ ,  $R_2^2/a^2$  satisfaisant à l'inégalité (19). La première valeur, en tous cas plus petite que la seconde, correspond à la

rotation rétrograde du disque, tandis que la seconde se rapporte à une répartition de la masse du disque telle qu'il tourne après le choc dans le sens primitif. Enfin, dans la dernière colonne du tableau, j'ai inscrit la valeur  $e'$  du coefficient apparent de restitution tangentielle calculée par la formule (20). J'y ai ajouté aussi l'erreur vraisemblable  $\varepsilon$  donnée par l'expression (21).

Je donne ensuite quelques détails techniques relatifs aux mesures exécutées:

*Mesure no 8.* (Voir le tableau A.) L'espèce du liège brut employée était peu homogène ce qui a occasionné une certaine indétermination du coefficient tangentiel. C'est pourquoi l'erreur probable dépasse notablement les erreurs des autres mesures.

*Mesure no 9.* Le disque a été fabriqué en bois de chêne et muni sur son pourtour d'un anneau de gomme élastique grise, d'épaisseur de 0,7 cm. La plaque, heurtée par le disque dans cette expérience, était le plancher lui même (parquet en bois).

*Mesure no 10.* Le disque employé était identique au précédent, à la différence qu'entre le pourtour du disque et l'anneau en gomme élastique on avait intercalé une bande de papier-émeri, pour éviter le glissement de la gomme.

*Mesures nos 11, 12, 13.* Le pourtour du disque en bois était finement encoché à l'aide d'une roulette crénelée.

*Mesure no 14.* Le disque en bois de chêne était muni d'une bande de papier-émeri (comme au no 10, mais sans l'anneau de gomme).

*Mesure no 15.* Cette mesure a été faite sur le même disque que la mesure no 9.

Il reste à remarquer que dans les expériences 1 à 8, le rayon de giration du disque a été réduit en mettant sur l'axe du disque des plaques circulaires en laiton, tandis que, dans les cas nos 9 à 15, il était nécessaire de munir le disque d'anneaux de laiton, situés des deux cotés du disque pour obtenir un rayon de giration supérieur à  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Quant aux mesures de la seconde catégorie, elles sont numérotées de 16 à 21 et les résultats correspondants sont réunis dans le tableau B. Dans la première colonne de ce tableau, j'indique les matériaux constituant l'anneau et la plaque. Dans la deuxième colonne, on trouve les dimensions de ces deux solides, à savoir: le rayon extérieur de l'anneau  $a$ , sa largeur  $b$ , c'est-à-dire la différence entre ses deux rayons extérieur et intérieur, l'épaisseur de l'anneau  $d$  et celle de la plaque  $D$ . Les deux dernières colonnes sont constituées de la même façon que les colonnes correspondan-

tes du tableau A. Voici quelques remarques relatives aux mesures de la deuxième catégorie:

*Mesure no 18* (Voir le tableau B): La gomme naturelle utilisée était de provenance assez ancienne et par suite assez dure pour pouvoir constituer un anneau permettant d'être utilisé tel quel, sans qu'il soit besoin de le soutenir par des disques minces en laiton, par exemple. A remarquer que l'erreur possible sur la mesure est environ trois fois plus grande que celle des autres mesures, en raison de la tendance de ce matériau à conserver momentanément une déformation permanente.

*Mesure no 20a*) a été effectuée sur un anneau en ébonite dont le pourtour extérieur était poli.

*Mesure no 20b*) a été faite sur le même anneau, à la différence que son pourtour a été rendu rugueux à l'aide d'un limage approprié.

En regardant les deux tableaux, on voit que, abstraction faite des deux cas exceptionnels (nos 8 et 18), dont j'ai déjà parlé, l'erreur relative probable de détermination du coefficient apparent de restitution tangentielle est de l'ordre de 4% dans les sept cas, où ce coefficient est inférieur à 0,5, tandis que l'erreur probable moyenne, calculée pour les cas restants, en nombre de treize, où le coefficient tangentiel dépasse la valeur 0,5, est égale à 1,2% seulement. Pour apprécier convenablement la précision des résultats obtenus, il faut envisager les circonstances suivantes. D'abord la méthode est bien simple et n'exige, outre les deux appareils A et B, aucun instrument particulier. Deuxièmement, les valeurs des coefficients apparents de restitution tangentielle dépendent, non seulement des dimensions et des vitesses des corps se choquant, mais aussi de la rugosité de leurs surfaces. J'ai été conduit à ce résultat par des considérations théoriques et les mesures exécutées l'ont légitimé. Par exemple, les mesures 13 et 14 montrent qu'en munissant le pourtour du disque d'une bande de papier-émeri, on accroît le coefficient apparent de 0,651 à 0,655, c'est-à-dire d'une valeur inférieure à l'erreur probable. Dans une plus grande mesure, les valeurs du dit coefficient diffèrent dans les expériences 20a), b), où j'ai fait la mesure d'abord pour l'anneau poli, puis sur le même anneau à pourtour rugueux, pour rendre manifeste l'effet du frottement sur l'allure du choc. D'après le tableau B, les valeurs du coefficient apparent, relatives à ces deux cas, sont 0,630 et 0,691 et l'on constate qu'elles diffèrent entre elles de presque 10%. Enfin, il importe de remarquer que les mesures exécutées sont les premières expériences quantitatives de ce genre.

En terminant, je crois utile de signaler que tous les résultats obtenus vérifient pleinement l'exactitude de nos formules fonda-

mentales lesquelles découlent de notre théorie générale. En revanche, ils sont en contradiction directe avec la supposition habituelle que la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact est nulle après le choc. Les expériences, décrites dans le présent travail, confirment ainsi nos prévisions théoriques.

\*

## Experimentální určení zdánlivého koeficientu smykové restituce.

(Obsah předešlého článku.)

V práci *Théorie générale du choc dans les systèmes matériels* (Journal de l'École Polytechnique, 2<sup>e</sup> série, 28, p. 15—64, Paris 1931) odvodil jsem obecné zákony rázu. z nichž vyplývá, že při rázu dokonale drsných těles tečná složka relativní rychlosti dotykových bodů obou těles změní znamení a zmenší se v jistém poměru, který nazývám *koeficientem smykové restituce*. Tento výsledek odporuje dosud běžnému předpokladu, že zmíněná složka po rázu vymizí, což je podle mé teorie splněno jen pro tělesa dokonale nepružná (plastická), pro která je koeficient smykové restituce roven nule. Obecně však má tento koeficient hodnoty různé od nuly, které podle mých měření leží mezi 0,2 a 0,7. K experimentálnímu stanovení těchto hodnot užil jsem metody založené na vzorcích, odvozených v prve citované práci pro fyzikální ráz kotouče na pevnou rovinu, za předpokladu, že se jedná o tělesa dokonale drsná. Taková tělesa nelze ovšem realizovati, ale ukazuje se, že při dostatečně velkém tření zůstávají vzorce v platnosti; rozdíl je pouze v tom, že část pohybové energie promění se při smyku kotouče po rovině v teplo a proto tečná složka rychlosti dotykového bodu kotouče se zmenší více, než kdyby byl koeficient tření nekonečně veliký. Tím se zdánlivě zmenší koeficient smykové restituce, jehož hodnotu pak označuji jako *zdánlivý koeficient smykové restituce*. Je vždycky menší než koeficient *pravý*, který odpovídá případu dokonale drsných těles, ale za vhodně volených podmínek se neliší mnoho od koeficientu pravého.

Při měření zdánlivého koeficientu smykové restituce postupoval jsem takto: Roztočený kotouč známého momentu setrvačnosti nechal jsem dopadnouti svisele na vodorovnou rovinnou desku a pozoroval jsem směr jeho otáčení po odskoku. Při tom byl vhodným způsobem měněn moment setrvačnosti kotouče a byly stanoveny dvě (pokud možno málo odlišné) hodnoty jeho poloměru setrvačnosti, pro které se kotouč po rázu otáčel v opačných směrech. Z těchto dvou hodnot odvodil jsem pak početně horní i dolní mez pro zdánlivý koeficient smykové restituce a za správnou

hodnotu vzal jsem aritmetický střed obou mezních hodnot. Získané výsledky jsou obsaženy ve dvou tabulkách A a B. Týkají se rázu kotoučů korkových, pryžových, dřevěných, mosazných, ebonitových a pertinaxových na pevnou desku, zhotovenou z některé ze jmenovaných hmot.

Provedená měření velmi dobře souhlasí s teorií a bezpečně prokazují nesprávnost obvykle činěného předpokladu, o němž jsem mluvil na počátku.

---