Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Milan Mikan

Cartanova geometrie na ploše kulové

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 2, 103--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121488

Cartanova geometrie na ploše kulové.

Milan Mikan, Praha.

(Došlo dne 19. října 1936.)

Na ploše kulové zřiďme přenos tak, aby jednotkové vektory ve směru rovnoběžek a meridiánů byly autoparallelní, při čemž délky měří se klasicky. Tento přenos je integrovatelný, polosymetrický-metrický a je-li R poloměr kulové plochy, ξ^1 zeměpisná délka, ξ^2 zeměpisná šířka ($|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$ pokud není výslovně jinak stanoveno), jakožto v radiantech dané geografické souřadnice, je differenciál oblouku[1]):

$$ds^2 \overset{\times}{=} R^2 \cos^2 \xi^2 \, d\xi^1 \, d\xi^1 + R^2 \, d\xi^2 \, d\xi^2, \tag{1}$$

fundamentální tensor má složky $a_{11} = R^2 \cos^2 \xi^2$, $a_{22} = R^2$, $a_{12} = a_{21} = 0$, a jednotkové vektory ve směru „východ" a „sever" jsou: $\underset{1}{i}^1 = \dfrac{1}{R \cos \xi^2}$, $\underset{1}{i}^2 = 0$; $\underset{2}{i}^1 = 0$, $\underset{2}{i}^2 = \dfrac{1}{R}$, Jest $\Gamma_{21}^1 = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = 0$, $S_{12}^{\cdot\cdot 1} = -S_{12}^{\cdot\cdot 1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \xi^2$, $S_2 = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ a $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0$.

(Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, str. 127, 179 a 180, úloha 11.9.)

Pro kovariantní křivost k libovolné křivky M jest:

$$k = \begin{vmatrix} j^1 & j^2 \\ Dj^1 & Dj^2 \end{vmatrix} \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

(Dr. V. Hlavatý: Differenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet (v tisku).)

je-li j^ν tangenciální versor křivky, $j^\nu = \dfrac{d\xi^\nu}{ds}$, $Dj^\mu = j^\nu D_\nu j^\mu$ a D_ν symbol kovariantní derivace podle ξ^ν.

---

[1]) V následujícím se omezíme vesměs na reálné hodnoty všech proměnných, parametrů a funkcí, pokud není jinak výslovně stanoveno.

Dosazením vyplývá, je-li C libovolná konstanta, $k\,\mathrm{d}\xi^2 = = \mathrm{d}\left(\cos \xi^2 \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}s} - C\right)$, odkudž, je-li β úhel, v němž M protíná meridiány,

$$Rk = \frac{\mathrm{d}\,(\sin \beta - RC)}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{2}$$

Rovnice (2) je integrovatelná v takovém oboru proměnných $\sin \beta$, ξ^2 (po případě β, ξ^2), ve kterém je k funkcí buď obou proměnných $\sin \beta$, ξ^2 (po případě ve kterém je $\frac{k}{\cos \beta}$ funkcí obou proměnných β, ξ^2) nebo jedné z nich a to vždy funkcí spojitou, mající spojitou (nebo nule rovnou) parciální derivaci podle $\sin \beta$ (po případě β), nebo je-li k konstantou.

Integrací rovnice (2) získáváme, je-li k konstantou,

$$\frac{\sin \beta}{R} = k\xi^2 + C, \tag{3}$$

jakožto rovnici křivek konstantní křivosti.[2]) Vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 tato rovnice zní:

$$\mathrm{d}\xi^1 = \frac{R(k\xi^2 + C)}{\sqrt{1 - R^2(k\xi^2 + C)^2}\cos \xi^2}\,\mathrm{d}\xi^2. \tag{4}$$

Poněvadž na pravé straně koefficient differenciálu $\mathrm{d}\xi^2$ je spojitou funkcí proměnné ξ^2 v každém intervalu, v němž $|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$, $|\sin \beta\,| = |\,R(k\xi^2 + C)\,| < 1$, má tato differenciální rovnice pro libovolně dané hodnoty parametrů k, C soustavu partikulárních integrálů, interpretovaných v tomto oboru na kulové ploše vesměs shodnými křivkami, tvořícími jednoparametrovou soustavu, invariantní vzhledem k rotaci kolem osy plochy kulové. V dalším ukážeme, že rovnice (4) má řešení dokonce i v intervalu, v němž $|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$, $|\,R(k\xi^2 + C)\,| \leq 1$. Nazývejme tuto soustavu rotační, proměnné $\sin \beta$, ξ^2 rotačními souřadnicemi a označujme křivky konstantní křivosti písmenou K. Jsou určitou analogií kružnic klasické geometrie. Jejich rotační soustavu označme (K).

Loxodromy ($k = 0$), včetně meridiánů a rovnoběžek, jsou autoparallelní.

---

[2]) Rovnice $\frac{\sin \beta}{R} = k\xi^2 + C$ značí soustavu křivek K, $\frac{\sin \gamma}{R} = - k\eta^2 - C$ soustavu, jejíž křivky $\overline{K}$ jsou s předešlými totožné, ale, vzhledem k $\sin \beta = -\sin \gamma$ pro $\eta^2 = \xi^2$ opačně orientované, $\frac{\sin \delta}{R} = -k\zeta^2 + C$ značí soustavu, jejíž křivky $\overline{\overline{K}}$ jsou, vzhledem k $\zeta^2 = -\xi^2$ pro $\sin \delta = = \sin \beta$ ke křivkám K pravoúhle souměrné podle roviny rovníku.

Je-li dána rovnice $m\xi^2 + C = \frac{\sin\beta}{R}$, m = konst., vyplývá dosazením z rovnice (2) $k = m$, t. j. křivky K a jen tyto mají vzhledem k rotačním souřadnicím $\sin\beta$, ξ^2 lineární rovnici. RC je sinus úhlu, ve kterém K protíná meridián na rovníku.

$$K \left\{ \begin{array}{l} \text{protíná rovník reálně} \\ \text{dotýká se rovníku} \\ \text{protíná rovník imaginárně} \end{array} \right\} \text{je-li } |RC| \left\{ \begin{array}{l} < 1 \\ = 1. \\ > 1 \end{array} \right.$$

Vzhledem ke vztahu $\frac{v}{R} = l \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$ je rovnice křivky K_1 jakožto Mercatorova obrazu křivky K

$$\operatorname{sech} \frac{v}{R} = \cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right). \tag{5}$$

Pro libovolnou křivku M jest $\frac{R\,\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}s} = \cos\beta = \frac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\beta}$, tudíž vzhledem k (2):

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = k.$$

Tato rovnice je zcela analogická vzorci pro křivost klasické geometrie. Pro k = konst. jest:

$$\frac{\beta}{k} = s + \text{konst.}, \tag{7}$$

jakožto analogie vzorce pro kružnici klasické geometrie.

Rovnice (5) je rovnicí soustavy křivek K_1, invariantních vzhledem k translaci ve směru rovnoběžek na Mercatorově mapě (pro určitou hodnotu parametrů k, C je tato soustava jednoparametrová, tyto křivky jsou vzájemně shodné a tvoří translační soustavu). Proměnné $\sin\beta$, v nazývejme translačními souřadnicemi.

Translační soustava kružnic L_1 o poloměru r, t. j. klasické křivosti $\varkappa = \frac{1}{r}$ má v translačních souřadnicích rovnici

$$\sin\beta = \varkappa v + B, \quad (B \text{ konst.}), \tag{8}$$

což je úplná analogie rovnice (3) křivek K daných v souřadnicích rotačních. Kružnice L_1 jsou Mercatorovými obrazy křivek L na kulové ploše, jakožto ortogonálních trajektorií svazků loxodrom. procházejících body, jejichž obrazy na mapě jsou středy kružnic L_1. Tím získána druhá analogie kružnic na ploše kulové. Křivky L mají rovnici:

$$\sin\beta = \varkappa \,.\, Rl \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\xi^2) + B. \tag{9}$$

Jejich kovariantní křivost je

$$k = \frac{\varkappa}{R \cos \xi^2} = \frac{1}{R r \cos \xi^2}. \tag{10}$$

(10) je rovnicí všech křivek L, zobrazených na mapě kružnicemi $\underset{1}{L}$ o témž poloměru r.

Na mapě je bodem a přímkou jím procházející vytknut (Lie-ův) element o souřadnicích u, v, β, zobrazující bodem a příslušnou loxodromou jím procházející vytknutý element na ploše kulové o souřadnicích $R\xi^1 = u$, $\xi^2 = 2 \operatorname{arctg} c^{\frac{v}{R}} - \frac{1}{2}\pi$, β. Volme na meridiánech n. př. směr „sever“ jakožto kladný, orientujme též daný element vytknutím kladného směru a vytkněme ještě jakožto kladnou orientaci úhlu β, který je sevřen kladným směrem elementu s kladným směrem meridiánu n. př. požadavkem, aby na mapě tato orientace byla zobrazena kladným smyslem úhlu β.

Přikážeme-li proměnným v, β na mapě a proměnným ξ^2, β na ploše kulové určité hodnoty, získáváme na mapě translační soustavu elementů, na ploše kulové rotační soustavu elementů. Je to jiný druh rotačních a translačních souřadnic. Naproti tomu v předchozím poprvé užité rotační a translační souřadnice $\sin \beta, \xi^2$; $\sin \beta, v$ vzhledem ke vztahu $\sin \beta = \sin (\pi - \beta)$ stanoví dvě rotační a dvě translační soustavy elementů, jejichžto soustavy loxodrom na ploše kulové a přímek na Mercatorově mapě jsou vzájemně podle meridiánů souměrné, orientace těchto loxodrom (přímek) však jsou souměrné vždy podle rovnoběžky. Nazývejme tyto dvě vždy k sobě vzhledem k uvažované souměrnosti příslušné soustavy elementů soustavami sdruženými a označme je $(\sin \beta, \xi^2)$, po př. $(\sin \beta, v)$.

Budiž nyní dána rovnice:

$$\sin \beta = F(\xi^2), \tag{11}$$

kde $$\sin \beta = \frac{\cos \xi^2}{\overset{+}{(-)} \left| \sqrt{\cos^2 \xi^2 (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2} \right|} d\xi^1 = \sin (\pi - \beta). \tag{11'}$$

a kde $F(\xi^2)$ je spojitá, spojitě differencovatelná a pro $| F(\xi^2) | \leqq 1$ jednoznačná funkce v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leqq \xi^2 \leqq + \frac{1}{2}\pi$, v němž všude $\frac{dF(\xi^2)}{d\xi^2} \neq 0$ a buď $\xi^2 = \Phi(\sin \beta)$ její inversní funkce. Budiž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{0}{\xi^2} < \underset{1}{\xi^2} < \frac{1}{2}\pi$, $\underset{0}{\xi^2} = \Phi(\sin \underset{0}{\beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{0}{\beta}))$, $\underset{1}{\xi^2} = \Phi(\sin \underset{1}{\beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{1}{\beta}))$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \xi^2 \, d\xi^1}{d\xi^2} = \frac{F(\xi^2)}{+ \left| \sqrt{1 - (F(\xi^2))^2} \right|}$,

$$\operatorname{tg} (\pi - \beta) = \frac{F(\xi^2)}{- \left| \sqrt{1 - (F\xi^2)^2} \right|}.$$

Rovnicí (11), differenciální vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 je dána rotační soustava (M) křivek M, interpretujících příslušné partikulární integrály. Interval $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{1}{\xi^2})$ budiž ještě volen tak, aby funkce $\dfrac{F(\xi^2)}{\overset{+}{(-)}\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}}$, alespoň od jedné hodnoty $\underset{2}{\xi^2}$ v tomto intervalu počínaje, byla stále kladná nebo stále záporná. Potom integrál

$$\int_{\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{1}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\cos\xi^2} \tag{12}$$

má určitou konečnou hodnotu i tenkráte, existuje-li reálná hodnota $\underset{\times}{\xi^2} = \Phi(\overset{+}{(-)}\sin\tfrac{1}{2}\pi)$, $F(\underset{\times}{\xi^2}) = \overset{+}{(-)}1$, $|\underset{\times}{\xi^2}| < \tfrac{1}{2}\pi$ a volíme-li $\underset{1}{\xi^2} = \underset{\times}{\xi^2}$, poněvadž již pro $\tfrac{1}{2} < n < 1$ je $\lim\limits_{\xi^2=\underset{\times}{\xi^2}} \dfrac{F(\xi^2)\,(\xi^2-\underset{\times}{\xi^2})^n}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\cos\xi^2} = 0$.[3])

Probíhá-li ξ^2 interval $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{3}{\xi^2})$, kde $\underset{3}{\xi^2}$ je libovolná hodnota v intervalu $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{1}{\xi^2})$, probíhá současně $\overset{1}{\beta}$ jednak interval $(\underset{0}{\beta}, \underset{3}{\beta})$ a vytvořena je rotační soustava $(\overset{1}{V})$ větví $\overset{1}{V}$, jednak interval $(\pi - \underset{0}{\beta}, \pi - \underset{3}{\beta})$ a tím je vytvořena rotační soustava $(\overset{2}{V})$ větví $\overset{2}{V}$. Na prvé je rozdíl zeměpisných délek krajních bodů $a = \underset{3}{\xi^1} - \underset{0}{\xi^1} = \displaystyle\int_{\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{3}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{+\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, na druhé $b = \underset{5}{\xi^1} - \underset{4}{\xi^1} = \displaystyle\int_{\underset{4}{\xi^2}=\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{5}{\xi^2}=\underset{3}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{-\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, $a = -b$, t. j. větve $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ jsou navzájem souměrné vždy podle určité meridiánové roviny. Existuje-li však alespoň jedna reálná hodnota $\underset{3}{\xi^2} = \underset{1}{\xi^2} = \Phi(\overset{+}{(-)}\sin\tfrac{1}{2}\pi)$, $F(\underset{1}{\xi^2}) = \overset{+}{(-)}1$, $|\underset{1}{\xi^2}| < \tfrac{1}{2}\pi$, existuje ke každé větvi $\overset{1}{V}$ soustavy $(\overset{1}{V})$ vždy taková větev $\overset{2}{V}$ soustavy $(\overset{2}{V})$, pro niž $\underset{1}{\xi^1} = \underset{5}{\xi^1}$, obě větve tvoří souvislou větev V křivky M, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu $\underset{1}{\xi^1} = \underset{5}{\xi^1}$ a tato větev je protťata každou rovnoběžkou buď ve dvou bodech, nebo (omezíme-li se na reálné body) vůbec

[3]) O určení zda předložený omezený integrál má konečnou hodnotu, viz n. př.: K. Petr, Počet integrální.

není proťata, kdežto rovnoběžka n. př. $\underset{1}{\xi^2}$ se této větve dotýká ve společném bodě větví $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$.

Křivky konstantní křivosti K sestávají, jak z rovnice (3) patrno ($F(\xi^2)$ je v tomto případě lineární funkcí) z takovýchto podle meridiánů vzájemně souměrných větví $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ a mají-li jednu tečnu (nebo více tečen) $\|$ s rovinou rovníku, sestávají z jedné nebo určitého množství větví V, z nichž každá je podle roviny určitého meridiánu souměrná a jsou proto souměrné podle jedné nebo určitého množství meridiánových rovin. Níže shledáme, že v případě $\underset{\times}{\xi^2} = \underset{1}{\xi^2}$, $|\, \underset{1}{\xi^2} \,| < \frac{1}{2}\pi$ jeden nebo druhý případ nastává, je-li křivka K tvořena jedinou uzavřenou větví podél níž β probíhá hodnoty n. př. od $-\frac{1}{2}\pi + q\pi$ do $+\frac{3}{2}\pi + q\pi$ pro q celé (pro $C = 0$), nebo množstvím větví, z nichž na každé β probíhá tytéž hodnoty, ale z nichž ani jedna není sama o sobě uzavřenou (pro $C \neq 0$).

Rovnicí $\beta = f(\xi^2)$, kde $f(\xi^2)$ je spojitá a spojitě differencovatelná jednoznačná funkce je naproti tomu dána rotační soustava křivek $\overset{1}{M}$, které obecně nejsou podle meridiánových rovin souměrné. Soustava (rotační) křivek $\overset{2}{M}$ k prvým podle těchto rovin souměrných je dána rovnicí $\beta = \pi - f(\xi^2)$. Obě soustavy jsou současně dány společnou rovnicí $\sin\beta = \sin(f(\xi^2))$ a je-li $\frac{1}{2}\pi = f(\underset{1}{\xi^2})$, $\underset{1}{\xi^2}$ reálné a $|\, \underset{1}{\xi^2} \,| < \frac{1}{2}\pi$ lze střídavě z větví $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ křivek $\overset{1}{M}$, $\overset{2}{M}$ vytvořiti větve V určitých křivek M, souměrné podle meridiánových rovin, podél nichž se β spojitě mění.

Prve doplňme však ještě úvahy o křivosti odvozením vztahu kovariantní křivosti k křivky M a klasické křivosti $\varkappa$ jejího obrazu $\underset{1}{M}$ na Mercatorově mapě.

Buďtež opět na mapě zřízeny souřadnice $\frac{u}{R} = \xi^1$, $\frac{v}{R} = l\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$. I jest:

$$\varkappa = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}v^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\cos\xi^2\,\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}v^2} = \frac{\mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}\xi^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\beta \,.\, \cos\xi^2}{\cos^2\xi^2\,\mathrm{d}\xi^2}, \qquad \varkappa = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi^2}\cos\beta\cos\xi^2,$$

a vzhledem k rovnici (2):

$$\varkappa = Rk \cos \xi^2, \tag{13}$$
což použito na křivky L dává rovnici (10).

Poněvadž v bodě vratu (obratu) křivky $\overset{1}{M}$ je $1/\varkappa = 0$, $(\varkappa = 0)$, je vzhledem k rovnici (13) a $| \xi^2 | < \frac{1}{2}\pi$ v příslušném bodě křivky M: $1/k = 0$, $(k = 0)$; nazývejme takovéto body křivky M také body vratu (obratu). Křivky K a jejich obrazy $\overset{1}{K}$ nemají ani bodů vratu ani bodů obratu. Křivka K mající v určitém bodě s křivkou M týž úhel β a totéž k je analogií oskulační kružnice. V bodě obratu je (vzhledem ke $k = 0$) takovouto oskulační křivkou K loxodroma. Dvě křivky M mající v určitém bodě totéž β a k mají v onom bodě tutéž oskulační křivku K.

Uvažujme nyní opět křivku konstantní křivosti K danou rovnicí (3). V bodě A svírej K s meridiánem úhel $\underset{A}{\beta}$, $-\frac{1}{2}\pi \leqq \underset{A}{\beta} < 0$, v B úhel $\underset{B}{\beta} = 0$, v E úhel $\underset{E}{\beta} = -\underset{A}{\beta}$. I jest

$$\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{A}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk} \int_0^{-\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}, \tag{14}$$

$$\underset{E}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}; \tag{14'}$$

Na pravých stranách rovnic jsou trigonometrické formy integrálu, analogického integrálu (12), rozdíly zeměpisných délek jsou tu parametricky vyjádřeny, zeměpisná šířka je, jak známo, vyjádřena rovnicí $\xi^2 = \dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}$ a probíhá-li β intervaly resp. $(\underset{B}{\beta}, \underset{A}{\beta})$, $(\underset{B}{\beta}, \underset{E}{\beta})$, nechať je opět vždy $-\frac{1}{2}\pi < \xi^2 < \frac{1}{2}\pi$; potom integrály (14), (14′) mají konečnou hodnotu.

Podél oblouku $\widehat{BA}$ ve smyslu od B do A položme $-\beta = \gamma$, $\sin(-\beta) = \sin\gamma$, $d(-\beta) = d\gamma$, $\underset{A}{\gamma} = -\underset{A}{\beta} = \underset{E}{\beta}$ tudíž $\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} =$

$$= \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{A}{\gamma}} \frac{\sin\gamma \, d\gamma}{\cos\left(\dfrac{-\sin\gamma - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)}.$$ V inter-

valu $0 < |\beta| \leqq \frac{1}{2}\pi$ je v kterémkoli bodě vždy $\cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)$.
. $\left\{\begin{matrix}\neq\\ =\end{matrix}\right\} \cos\left(\frac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)$, tudíž $\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} \left\{\begin{matrix}\neq\\ =\end{matrix}\right\} \underset{E}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1}$. je-li $C \left\{\begin{matrix}\neq\\ =\end{matrix}\right\} 0$. Existuje-li tudíž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{A}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{A}{\beta} = -\frac{1}{2}\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi < \underset{E}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{E}{\beta} = +\frac{1}{2}\pi$, t. j. je-li resp. $\left|\frac{1-RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$. $\left|\frac{1+RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$ a bod E tedy bodem maximálního (minimálního) ξ^2, A bodem minimálního (maximálního) ξ^2 a je-li $C \neq 0$, neleží body A, E na témž meridiánu, čehož další důsledek je, že (reálná) větev křivky K od $\beta = -\frac{1}{2}\pi$ do $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ není uzavřenou, je však, jak z předchozí úvahy vyplývá, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu procházejícího bodem E. V bodě A přechází K ve druhou větev, na níž β probíhá, hodnoty od $-\frac{1}{2}\pi$ do $-\frac{3}{2}\pi$; atd. Také větev n. př. na níž β probíhá hodnoty od $-\frac{3}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$ je souměrnou podle meridiánu procházejícího bodem A atd. Je-li však $C = 0$ $\left(\text{a ovšem opět } \left|\frac{1-RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi, \left|\frac{1+RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi\right)$, leží body A. E na témž meridiánu, z čehož dále vyplývá, že body A, D, v nichž resp. $\beta = -\frac{1}{2}\pi$, $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ se ztotožňují a křivka K je tvořena jedinou uzavřenou větví.

Naproti tomu jestliže $\left|\frac{1-RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, po případě $\left|\frac{1+RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, sestává křivka K, jak z Mercatorovy mapy patrno, z jedné dvojice nebo z množství dvojic větví, z nichž vždy dvě větve v téže dvojici jsou pravoúhle souměrné podle roviny určitého meridiánu a k jednomu nebo oběma pólům se asymptoticky blíží — vyjímaje případ, kdy, jak níže uvedeno, $|(\pm) Rk\frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ — na způsob loxodrom.

Asymptotické blížení se křivky K k pólům pro $0 < |(\pm) Rk\frac{1}{2}\pi + RC| \leqq 1$, $\left|\frac{1(\mp)RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$ vysvítá i z toho, že limita integrálu (jakožto funkce jeho horní meze)

$$\int_{\xi^2_0}^{\xi^2} \frac{(Rk\xi^2 + RC)\,d\xi^2}{\sqrt{1-(Rk\xi^2+RC)^2}\cos\xi^2} \qquad (15)$$

(což je jiná forma integrálu (14, 14′) daného v trigonometrické formě), majícího konečnou hodnotu pro $|\overset{0}{\xi^2}| < \frac{1}{2}\pi$, $|Rk\overset{0}{\xi^2} + RC| \leqq 1$, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$,[4]) pro $\lim \xi^2 = {\scriptstyle(\pm)}\frac{1}{2}\pi$ roste nade všechny meze, neboť

$$\lim_{\xi=\frac{1}{2}\pi} \frac{(Rk\xi^2 + RC)(\frac{1}{2}\pi - |\xi^2|)^n}{\sqrt{1 - (Rk\xi^2 + RC)^2 \cos \xi^2}} \tag{16}$$

je konečná toliko pro $n \geqq 1$, je-li $0 < |{\scriptstyle(\pm)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| < 1$ a je-li $|{\scriptstyle(\pm)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 1$ dokonce toliko pro $n \geqq \frac{3}{2}$. Úvahu lze zobecniti i pro křivky M, jejichž rotační soustava $\overline{(M)}$ je dána rovnicí (11). Naproti tomu integrál (15) má pro $|\xi^2| = \frac{1}{2}\pi$, $|\pm Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ konečnou hodnotu, poněvadž v tomto případě limita (16) je $= 0$ pro každé n kladné, tedy již pro $0 < n < 1$. Větve $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ křivky K se přibližují k sobě v pólu, aniž by se k pólu blížily asymptoticky.

Mají-li soustavy (K) křivek $K \ldots \frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C$ společné sdružené rotační soustavy elementů η^2, $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$, (kde η^2, $\sin\gamma$ jsou dané konstanty), jest:

$$\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + \frac{\sin\gamma}{R} - \eta^2 k, \text{ t. j. } C = \frac{\sin\gamma}{R} - \eta^2 k. \tag{17}$$

Tyto křivky konstantní křivosti tvoří rotační soustavu jednoparametrových soustav, majících společný dotyk podél elementů obou vzájemně sdružených soustav $(\eta^2, \sin\gamma)$. Nazývejme tuto (dvojparametrovou) soustavu křivek K dotykovou soustavou rotační. Obecně dvojparametrová soustava křivek K, jakožto rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav daná rovnicí $\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + \Psi(k)$, (kdež pro každou hodnotu k dostáváme určitou jednoparametrovou soustavu rotační) není dotyková: Každou danou dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \frac{\sin\delta}{R}\right)$ prochází tolik rotačních jednoparametrových soustav (K), kolik kořenů pro k má rovnice

$$k\zeta^2 + \Psi(k) = \frac{\sin\delta}{R}.$$

Aby rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav křivek K byla dotyková, k tomu je nutné a stačí, aby $\Psi(k)$ byla celistvou lineární funkcí parametru k: $\Psi(k) = ak + b$, pro reálný dotyk $|Rb| = |\sin\gamma| < 1$, $|a| = |\eta^2| < \frac{1}{2}\pi$.

[4]) Srovnejme s úvahou o integrálu (12).

V tom případě každou další dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \frac{\sin\delta}{R}\right)$ prochází jediná rotační soustava (K) křivek K a její rovnice jest:

$$\begin{vmatrix} \sin\beta & \xi^2 & 1 \\ \sin\gamma & \eta^2 & 1 \\ \sin\delta & \zeta^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \sin\beta = \frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}\xi^2 - \frac{\zeta^2\sin\gamma - \eta^2\sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}.$$

To je rovnice jednoparametrové rotační soustavy (K) procházející danými dvěma dvojicemi sdružených rotačních soustav elementů $(\eta^2, \sin\gamma)$; $(\zeta^2, \sin\delta)$.

Vzhledem k tomu, že — jak z předchozích úvah vyplývá — křivka K protínající danou rovnoběžku η^2 v úhlu ϱ protíná ji též v úhlu $-\varrho$, možno vysloviti větu:

Křivky konstantní křivosti K protínající dvě dané rovnoběžky resp. η^2, ζ^2 v úhlech daných resp. ϱ, σ jsou shodné; mají kovariantní křivost

$$k = \frac{\cos\varrho - \cos\sigma}{R(\eta^2 - \zeta^2)}$$

a jsou obsaženy v téže rotační soustavě (K).

Dvěma sousedními elementy na dvou sousedních rovnoběžkách je dána určitá křivka konstantní křivosti. Křivka K ke křivce M v daném bodě oskulační má s ní v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak). Dvě v daném bodě oskulující se křivky M, N mají v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak).

Rovnicí

$$\sin\beta = F(\xi^2) \tag{18}$$

je dána jednoparametrová soustava rotační (M) křivek M.

Budiž kromě toho dána rotační soustava (N) křivek N rovnicí:

$$\sin\gamma = \Phi(\xi^2). \tag{19}$$

Je-li některá z křivek N isogonální trajektorií soustavy (M), jest: $\gamma = \beta + a$, a konst. a je-li m kovariantní křivost této křivky N, $m = \frac{\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma}{R\,\mathrm{d}\xi^2}$, jest v průsečících křivky N s křivkami M:

$$\frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos\gamma} \tag{20}$$

čili:

$$\frac{k}{m} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\cos\beta}{\cos(\beta + a)}, \quad \frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos(\beta + a)}. \tag{21}$$

Potom je však také každá další křivka soustavy (19) isogonální trajektorií soustavy (18), neboť je-li pro jednu z křivek N

$$\sin\gamma = \sin(\beta + \alpha) = \Phi(\xi^2) = F(\xi^2)\cos\alpha + \sqrt{1 - (F(\xi^2))^2}\,\sin\alpha,$$

je tato rovnice platná pro každou křivku N soustavy (N) dané rovnicí (19) a je-li v platnosti (20), jest $\dfrac{d\gamma}{d\xi^2} = \dfrac{d\beta}{d\xi^2}$, $\gamma = \beta + \alpha$, α konst., při čemž α je vzhledem k tomu, že soustavy (M), (N) jsou rotační, pro každou dvojici křivek M, N totéž.

Isogonální trajektorie rotační soustavy (M) tvoří zase rotační soustavu (N). Aby soustavy (M), (N) byly takovýmito vzájemnými soustavami isogonálních trajektorií, k tomu je nutnou a postačující podmínkou (20) *nebo* (21).

Isogonální trajektorie rotační soustavy loxodrom jsou zase loxodromy a každé dvě rotační soustavy loxodrom jsou vzájemně soustavami isogonálních trajektorií.

Kromě toho z podmínky (21) vyplývá:

Isogonální trajektorie rotační soustavy (K) křivek konstantní křivosti jsou tenkráte a jen tenkráte zase křivkami konstantní křivosti, jsou-li (K) loxodromami. Ony isogonální trajektorie jsou potom též loxodromami.

K objasnění některých dosud odvozených výsledků lze také použíti — kromě zobrazení Mercatorova — ještě jiných zobrazení rotačních soustav. Nanášíme-li na vodorovnou osu B jakožto úsečky hodnoty úhlů β, na svislou osu X jakožto pořadnice hodnoty zeměpisných šířek ξ^2 (po volbě libovolných délek jakožto jednotkových), zobrazí se rotační soustava elementů (ξ^2, β) bodem, ležícím vzhledem k $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ uvnitř rovinného pásu omezeného přímkami P, Q ve vzdálenostech $+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi$ rovnoběžných s osou B, rotační soustava křivek M daná rovnicí $\beta = f(\xi^2)$ určitým obloukem uvnitř tohoto pásu. Rotační soustava isogonálních trajektorií (N) rotační soustavy (M) zobrazuje se obloukem $(\underset{2}{N})$, vzniklým pošinutím oblouku $(\underset{2}{M})$ o délku α ve směru osy B, (K) se zobrazují sinusoidami, rotační soustavy loxodrom o daném úhlu β svislou přímkou ve vzdálenosti β od osy X. Osa X zobrazuje všechny meridiány, body osy B zobrazují všechny elementy na ploše kulové, jejichž body leží na rovníku, body rovnoběžky s osou B všechny elementy, jejichž body leží na určité rovnoběžce plochy kulové.

Průsek dvou oblouků $(\underset{2}{M})$, $(\underset{2}{N})$ je obrazem dotyku dvou rotačních soustav (M), (N) podél jedné rotační soustavy elementů, dotyk takovýchto oblouků, jak z předešlého patrno, je obrazem oskulace těchto soustav (M), (N) podél příslušné rotační soustavy elementů.

Na hranici pásu P, Q není zobrazení jednoznačné (ve smyslu: bod v obraze — rotační soustava elementů na ploše kulové). Protíná-li však oblouk (M) reálně resp. P, Q, v bodech, jejichž $\beta \neq \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, značí to, že křivky M soustavy (M) se asymptoticky blíží resp. k severnímu, k jižnímu pólu a zároveň k oněm loxodromám tvořícím rotační soustavu, jejichž β je rovno vzdálenosti oněch průsečíků od X.

Jiné zobrazení získáváme, naneseme-li na svislou osu X hodnotu zeměpisné šířky, na vodorovnou osu S hodnotu $\sin\beta$. Jednotlivé sdružené rotační soustavy (reálních) elementů (jejichž $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$) jsou zobrazeny body uvnitř pravoúhelníku $abcd$, jehož vrcholy mají souřadnice: $a\,(-\frac{1}{2}\pi, -1)$, $b\,(-\frac{1}{2}\pi, +1)$, $c\,(+\frac{1}{2}\pi, +1)$, $d\,(+\frac{1}{2}\pi, -1)$. Určitá soustava (K) je zobrazena úsečkou $(K) \equiv \overline{mn}$ uvnitř $abcd$, jejíž body na obvodu $abcd$ jsou m, n. Probíháme-li množství elementů na křivkách K podél větví $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ vzájemně podle meridiánových rovin souměrných[5]) je současně úsečka $\overline{mn}$ proběhnuta v obou smyslech $\overline{mn}$ a $\overline{nm}$.

V rovnici (11) vyskytující se funkce $F(\xi^2)$ proměnné ξ^2, pro $|F(\xi^2)| \leq 1$ jednoznačná v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leq \xi^2 \leq +\frac{1}{2}\pi$, k níž přísluší na ploše kulové soustava (M), je uvnitř pravoúhelníku $abcd$ interpretována obloukem (M), proťatým každou přímkou $\parallel S$ v jediném bodě. Neprotíná-li tento oblouk reálně úsečky $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, nepřibližují se M pólům. Protíná-li však reálně resp. $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, blíží se M asymptoticky k jednomu nebo oběma pólům, jak patrno ze zobecnění úvahy o integrálu (15). Rotační soustava loxodrom, zobrazená nyní opět rovnoběžkou s X procházející vždy jedním z oněch průsečíků je soustavou asymptot křivek M. Protíná-li však (M) obvod pravoúhelníka v některém z vrcholů, přibližují se v pólu k sobě podle meridiánové roviny souměrné větve křivek M, aniž by se M k tomuto pólu blížily asymptoticky. Proběhneme-li v obou směrech oblouk (M), probíháme současně množství elementů na obou soustavách větví $\overset{1}{V}\overset{2}{V}$ na ploše kulové, z nichž sestává soustava (M) křivek M a jež jsou vzájemně podle meridiánových rovin souměrné.[6])

[5]) Při tom zachováváme tutéž orientaci podél větví $V = \overset{1}{V} + \overset{2}{V}$ křivek K i úhlu β. Změníme-li orientaci, zobrazí se (K) úsečkou $\overline{m'n'}$ vzniklou zrcadlením $\overline{mn}$ na X.

[6]) Změna orientace jeví se v obraze zrcadlením na X.

Úsečky $(\underset{s}{K})$ procházející bodem (0, 0) zobrazují křivky K, jejichž $C = 0$ poněvadž vzdálenost průsečíku S $(\underset{s}{K})$ od bodu (0, 0) je rovna sinusu úhlu, v němž K protíná meridián na rovníku, pro $C = 0$ protíná K rovník v pravém úhlu. Pro libovolnou křivku M je $Rk = \dfrac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\xi^2} = \operatorname{tg}\alpha$, je-li α úhel, který svírá $(\underset{s}{M})$ s pořadnicí. Průsek oblouků $(\underset{s}{M}), (\underset{s}{N})$ je obrazem dotyku soustav $(M), (N)$ podél sdružených soustav elementů na ploše kulové, svazek úseček $(\underset{s}{K})$ o společném bodě je obrazem rotační soustavy dotykových soustav křivek K na ploše kulové, dotyk oblouků $(\underset{s}{M}), (\underset{s}{N})$ je obrazem oskulace soustav $(M), (N)$ podél příslušných sdružených soustav elementů. (Totéž vzhledem k rovnici (13) lze vysloviti o translačních soustavách $(\underset{1}{M}), (\underset{1}{N})$ na Mercatorově mapě.)

Partikulární integrály Clairautovy rovnice vzhledem k proměnným $\sin\beta$, ξ^2 v oboru, jemuž přísluší část roviny omezená pravoúhelníkem $(abcd)$: $\sin\beta = \dfrac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\xi^2}\,\xi^2 + f\left(\dfrac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)$ čili vzhledem k rovnici (2)

$$\sin\beta = Rk\xi^2 + f(Rk) \tag{22}$$

jsou, jak ze zobrazení v pravoúhelníku $(abcd)$ patrno, na ploše kulové interpretovány soustavami (K), oskulujícími určitou soustavu (M) jakožto interpretaci singulárního integrálu rovnice (22).

Z tvaru oblouku $(\underset{s}{M})$ uvnitř $(abcd)$ možno přímo posouditi některé vlastnosti křivek M soustavy (M): Na př. existuje-li k $(\underset{s}{M})$ uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel S$, roste v dotyčném bodě k nade všechny meze, křivky M mají na příslušné rovnoběžce body vratu, existuje-li však uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel X$, je příslušné $k = 0$, křivky M mají body obratu. Je-li v některém bodě oblouku $(\underset{s}{M})\ \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$, má k v tomto bodě extrém, $(\underset{s}{M})$ bod obratu, příslušné body křivek M možno nazývati vrcholy, poněvadž křivky $\underset{1}{M}$ vskutku v takovýchto bodech mají vrcholy. Vzhledem k souměrnosti křivek M (a $\underset{1}{M}$) vzhledem k meridiánovým rovinám (a k meridiánům), dány-li jejich rovnice ve tvaru (11), jsou též body, v nichž je $\beta = \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, vrcholy.

Analogické úvahy lze provésti s některými změnami vzhledem ke zobrazení o osách X, B jsou-li rotační soustavy křivek dány rovnicemi typu $\beta = f(\xi^2)$.

Aby rotační soustava (M) daná rovnicí

$$\beta = f(\xi^2) \text{ čili } \frac{d\xi^1}{d\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg} f(\xi^2) \tag{23}$$

připouštěla infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$a\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{24}$$

kde a je libovolná konečná konstanta $\neq 0$, při čemž se omezíme na takový obor proměnných $\xi^1, \xi^2, |\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, ve kterém $\operatorname{tg} f(\xi^2)$, $\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, $\Phi(\xi^1, \xi^2)$ jsou spojité funkce, mající alespoň první derivace spojité, k tomu je nutná a postačující podmínka

$$\frac{d\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,d\xi^2} = \frac{d\,f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,d\xi^2}\,{}^{7)} \tag{25}$$

aneb, položíme-li $\gamma = \varphi(\xi^2)$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} b, \tag{26}$$

kde b je libovolná konstanta, nebo

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos\gamma\cos\beta} = \operatorname{tg} b. \tag{27}$$

Je-li k kovariantní křivost kterékoli z křivek M (podél M obecně proměnná) a položíme-li $m = \dfrac{d\sin\varphi(\xi^2)}{R\,d\xi^2}$, lze uvésti podmínku na tvar

$$\frac{m}{\cos^3\gamma} = \frac{k}{\cos^3\beta} \quad \text{nebo} \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^3. \tag{28}$$

Rovnice (25), (26), (27), (28) jsou ekvivalentní a jsou vesměs souměrné vzhledem k veličinám vyskytujícím se v rovnicích soustav (M) a $(N) \ldots \gamma = \varphi(\xi^2)$. Dráhy infinitesimální transformace (24) tvoří rotační soustavu (N), jejíž rovnice je

$$\frac{d\xi^1}{d\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg}\varphi(\xi^2) \tag{29}$$

čili

$$\gamma = \varphi(\xi^2) \tag{30}$$

a kovariantní křivost m křivek N vyhovuje rovnici (28).

Naopak, soustava (N) připouští infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$c\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{31}$$

c) libovolná konečná konstanta $\neq 0$).

---

[7]) Pro srovnání n. př. J. A. Serret-G. Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III. (Lipsko 1909), str. 199 a další.

Její dráhy jsou křivky M soustavy (M), t. j. vztah obou soustav je reciproký.

Kdyby místo transformace (24) byla dána transformace

$$a\varrho\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{32}$$

kde ϱ je spojitou funkcí proměnných ξ^1, ξ^2 (nebo alespoň jedné z nich), mající v uvažovaném oboru spojité parciální derivace alespoň prvého řádu, byla by podmínka (25) nahražena podmínkou

$$\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}\,f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}\right)+$$
$$+(\operatorname{tg} f(\xi^2)-\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\left(\operatorname{tg} f(\xi^2)\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}\right)=0. \tag{33}$$

Transformace (32) je, jak patrno, nejobecnější transformací, jejíž dráhy tvoří rotační soustavu. Je to soustava (N), daná rovnicí tvaru (30), při čemž funkce $\varphi(\xi^2)$ vyhovuje podmínce (33).

Tato podmínka (33) je symetrická vzhledem k funkcím f, φ, je-li buď $\operatorname{tg} f(\xi^2)=\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, t. j. triviální transformace, při níž $(M)\equiv(N)$, nebo $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}=0$, t. j. ϱ je toliko funkcí proměnné ξ^2, $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=\dfrac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\xi^2}$, načež soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\varrho\left(\operatorname{tg} f(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right), \tag{34}$$

a je-li také $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, jedná se o transformace (24), (31). Nebo konečně, je-li $\operatorname{tg} f(\xi^2)\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, t. j. je-li $\varrho=$ konst. integrálem rovnice (23), t. j. rovnicí soustavy (M). Podmínka (33) přechází v podmínku (28), při čemž soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\sigma\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{35}$$

je-li $\sigma=$ konst. integrálem differenciální rovnice (29). Obecně možno říci: Kterákoli z rovnic (25), (26), (27), (28) je nutnou a postačující podmínkou, aby rotační soustava (M) daná differenciální rovnicí (23) připouštěla infinitesimální transformaci

$$a\varrho^p\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right] \tag{36}$$

a rotační soustava (N) daná differenciální rovnicí (29) infinitesimální transformaci

$$c\sigma^q\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{37}$$

jsou-li $\varrho = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$ integrály rovnic resp. (23), (29), při čemž p, q může býti též $= 0$. Naopak, aby byla splněna kterákoli z podmínek (25), (26), (27), (28), k tomu je nutné a stačí, aby uvažované infinitesimální transformace měly symboly (36), (37) a aby $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1} \neq 0$. A toliko v případě $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1} = 0$ je pro $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=\frac{d\varrho}{d\xi^2} \neq 0$ podmínka (33) souměrná a jiná než (28).

Z rovnice (27) plyne pro transformaci (24):

Je-li soustava (N) soustavou isogonálních trajektorií soustavy (M), tu vzhledem k rovnici (21) buď identicky $\beta = \gamma$ a úhel $\alpha = 0$, t. j. triviální transformace, nebo vzhledem k (20) $k = m = 0$, t. j. rotační soustava invariantní netriviálních infinitesimálních transformací (24) je tenkráte a jen tenkráte soustavou isogonálních trajektorií rotační soustavy drah této transformace, jsou-li obě soustavy soustavami loxodrom (potom ovšem $\frac{d\, f(\xi^2)}{d\xi^2} = \frac{d\,\varphi(\xi^2)}{d\xi^2} = 0$).

Dráhy každé infinitesimální transformace, již připouští rotační soustava (M), netvoří však vždy rotační soustavu v našem slova smyslu. Příkladem toho je na př. rotace kolem osy plochy kulové, jejíž dráhy (rovnoběžky) sice zůstávají invariantními vzhledem k rotaci (je to jejich triviální transformace), nepříslušejí však uvažované kategorii infinitesimálních transformací, poněvadž pro ně je vesměs $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, t. j. $\operatorname{tg}\gamma$ roste nade všechny meze. Symbol této transformace jest:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}.$$

Příslušná podmínka, aby (M) připouštěla rotaci je ovšem identicky splněna pro každou rotační soustavu (M).[8])

Na Mercatorově mapě mějtež dráhy grupy infinitesimálních transformací rovnice $u = \varphi(\overset{0}{u}, \overset{0}{v}, t)$, $v = \psi(\overset{0}{u}, \overset{0}{v}, t)$, je-li t parametr jednotlivých transformací, $\overset{0}{u}, \overset{0}{v}$ hodnoty funkcí φ, ψ pro $t = 0$, a tyto funkce jsou spojité a spojitě differencovatelné, a směrnice libovolného elementu se transformuje podle rovnice

$$v' = \frac{\psi_{\overset{0}{u}} + \psi_{\overset{0}{v}}\overset{0}{v}'}{\varphi_{\overset{0}{u}} + \varphi_{\overset{0}{v}}\overset{0}{v}'},\quad v' = \frac{dv}{du},\quad \varphi_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \text{atd., při čemž}\ \begin{vmatrix}\varphi_u, & \varphi_v\\ \psi_u, & \psi_v\end{vmatrix} = 0.^{9)}$$

[8]) Dosaďme n. př. do rovnice (4) na str. 198, Serret-Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III.

[9]) Tamtéž, str. 213.

Jsou-li těmito drahami loxodromy, jest $u = \underset{0}{u} + t\cos\alpha$, $v = \underset{0}{v} + t\sin\alpha$, $\underset{0}{\psi_u} = 0$, $\underset{0}{\psi_v} = 1$, $\underset{0}{\varphi_u} = 1$, $\underset{0}{\varphi_v} = 0$, $v' = \underset{0}{v}'$.

Tudíž možno vysloviti větu:

Infinitesimální transformace na ploše kulové, jejíž dráhy tvoří libovolnou jednoparametrovou (obecně nerotační) soustavu loxodrom, má tu vlastnost, že integrální křivky každé differenciální rovnice, jež uvažovanou infinitesimální transformaci připouštějí, svírají s každou jednotlivou loxodromickou drahou úhel, který je konstantní vždy vzhledem ke všem transformacím příslušné grupy.

Jedná-li se o rotační soustavy loxodromických drah, jsou ovšem příslušnými integrálními křivkami, jak již dokázáno prve, opět loxodromy.

*

La géométrie de Cartan sur la sphère.

(Extrait de l'article précédent.)

Sur la sphère nous construisons une connexion de sorte que les vecteurs unitaires dans la direction des méridiens et des parallèles soient autoparallèles, les longueurs étant mésurées classiquement. Cette connexion est intégrable, demi-symétrique, métrique, et si R est le rayon de la sphère, ξ^1 la longueur géographique, ξ^2 la largeur géographique ($|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ sauf l'avis contraire), la différentielle de l'arc est donnée par l'équation (1). Soit β l'angle d'un méridien et d'une courbe au point d'intersection. Les courbes K à courbure covariante constante k sont données par l'équation (3), où C est une constante arbitraire, c'est-à-dire par l'équation (4), différentielle par rapport aux variables ξ^1, ξ^2. Cette équation a des intégrales dans un intervalle, dans lequel $|R(k\xi^2 + C)| \leqq 1$, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$. (Nous nous bornons aux paramètres et valeurs réels.) Les courbes K constituent une analogie aux cercles de la géométrie classique, et de plus, elles se réduisent, pour $k = 0$ aux loxodrômes (c'est-à-dire aux droites de la géométrie loxodromique). Les loxodrômes, et seulement celles-ci, sont courbes autoparallèles.

Si nous appelons les variables $\sin\beta$, ξ^2 „les coordonnées de révolution" on voit, qu'il n'y a que des courbes K qui ont, par rapport aux coordonnées de révolution, l'équation linéaire. Pour une valeur déterminée des constantes C, k nous obtenons un système (K) des courbes K, invariant par rapport à la rotation autour de l'axe de la sphère.

Nous appelons ce système un système de révolution. La représentation (K_1) de Mercator de ce système est donnée par l'équation (5) en coordonnées (de translation) sin β, v. En général, une équation arbitraire en coordonnées sin β, ξ^2 est une équation d'un système de révolution (M) des courbes M, et pour leur courbure covariante k (en général variable le long de M), nous avons l'équation (6), parfaitement analogue à l'équation correspondante de la géométrie classique. Nous obtenons une autre analogie aux cercles en considérant des courbes L, dont la représentation de Mercator est constituée par les cercles L_1. Elles sont les trajectoires orthogonales aux réseaux de loxodrômes passant par un point sur la sphère et leurs équations sont resp. (9), (10).

On peut démontrer, que des courbes données par les équations en coordonnées sin β, ξ^2, sont orthogonalement symétriques par rapport aux certains plans des méridiens; en particulier, les courbes K jouissent de cette propriété. D'autre côté, en introduisant autres coordonnées de révolution, à savoir β, ξ^2, les équations en ces coordonnées représentent des courbes qui ne sont pas en général symétriques par rapport aux plans des méridiens, mais on peut toujours construire 1. d'autres équations, dont les courbes correspondantes sont symétriques aux courbes précédentes, et de plus, 2. des équations communes, en coordonnées sin β, ξ^2, de ces deux espèces des courbes. L'équation (13) nous donne le rapport de la courbure classique $\varkappa$ de la représentation de Mercator M_1 et de la courbure covariante k des courbes M. En passant, on voit, que les images K_1 n'ont ni des points d'inflexion, ni des points de rebroussement. La courbe K, ayant, dans un point, avec une courbe M les mêmes β et k est une analogie au cercle osculateur de la géométrie classique.

Nous démontrons de plus, que, si $\left|\dfrac{1-RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$, $\left|\dfrac{1+RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$, les courbes consistent ou d'un seul arc fermé (pour $C = 0$), ou d'une multitude des arcs, pas du tout fermés (pour $C \neq 0$). Au contraire, si $\left|\dfrac{1-RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$ ou $\left|\dfrac{1+RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$ la courbe K consiste de deux arcs, (ou d'un nombre pair d'arcs en général) s'approchant asymptotiquement vers l'un, ou vers tous les deux pôles, comme on voit, en considérant l'intégrale (15).

Étant donné un système de révolution (M), ses trajectoires isogonales N forment aussi un système de révolution (N). Les équations équivalentes (20), (21) expriment le rapport de ces deux systèmes, si m est la courbure covariante, γ l'angle, formé par n'importe quelle courbe N et le méridien à un point d'intersection.

Si l'on se sert d'une représentation, en portant la variable $\sin\beta$ sur l'axe B, ξ^2 sur l'axe X, $B \perp X$, on voit facilement, que l'image d'un système (M) (si nous nous bornons aux valeurs réelles) est un certain arc (M_3) situé dans le rectangle, pour lequel $|\sin\beta| \leqq 1$, $|\xi^2| \leqq \frac{1}{2}\pi$, l'image d'un système (K) est un segment (K_3) d'une droite. Deux arcs (M_3), (N_3) tangents représentent deux systèmes (M), (N), osculateurs le long d'une parallèle, et l'équation (22) de Clairaut (par rapport aux variables $\sin\beta$, ξ^2) donne des intégrales particulières, interprétées sur la sphère par des systèmes (K), osculants le système (M), c'est-à-dire l'intégrale singulière de l'équation (22).

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (M) donné par l'équation (23) admette la transformation infinitésimale au symbole (24) est (25); les conditions (25), (26), (27), (28) sont équivalentes, si les courbes N du système (N) donné par l'équation (30), sont des trajectoires de la transformation considérée. Ces conditions sont symétriques par rapport aux valeurs, figurant dans les équations des systèmes (M), (N). De plus, on démontre le théorème: Le groupe des transformations infinitésimales sur la sphère, dont les trajectoires forment un système (en général non de révolution) des loxodrômes, jouit de la propriété, que les courbes intégrales de n'importe quelle équation différentielle, admettant le groupe considéré, forment un angle constant avec chacune trajectoire loxodrômique particulière.